

Mestrados em Engenharia Química e Industrial - 1º semestre 2007/2008
Matemática Aplicada

Ficha prática nº 6 - Métodos Numéricos para Equações Diferenciais

Docente: Carlos Balsa - Departamento de Matemática - ESTiG

1. Consideramos a equação do calor

$$u_t = cu_{xx}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0$$

com condições inicial e de fronteira

$$u(0, x) = \sin(\pi x), \quad u(t, 0) = 0, \quad u(t, 1) = 0$$

- .
- (a) Deduza o esquema explícito de primeira ordem para resolução numérica através da discretização total por diferenças finitas.
 - (b) Deduza os sistemas de equações algébricas que deverão ser resolvidos se $0 \leq t \leq 0.3$, $\Delta x = 0.25$ e $\Delta t = 0.1$.
 - (c) Resolva os sistemas obtidos de forma a obter a distribuição da temperatura.
 - (d) Use o programa escrito em linguagem Matlab/Octave `eqcalorimplicito.m` para resolver computacionalmente este problema, fazendo variar Δx , Δt e o tempo total de integração da equação.

2. Consideramos a equação da onda

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0$$

com condições iniciais

$$u(0, x) = \sin(x\pi), \quad u_t(0, x) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1$$

e condições de fronteira

$$u(t, 0) = 0, \quad u(t, 1) = 0 \quad t \geq 0$$

- (a) Deduza o esquema implícito de primeira ordem para a resolução numérica através da discretização total por diferenças finitas.
- (b) Adapte o script `eqcalorimplicito.m` para a resolução deste problema.
- (c) Integre a equação de $t = 0$ a $t = 2$ e apresente os resultados na forma de gráfico de uma superfície tridimensional ao longo do plano (t, x) (arbitre Δx e Δt).
- (d) Determine o erro máximo na solução calculada comparando com a solução exacta dada por

$$u(t, x) = \cos(\pi t) \sin(\pi x).$$

Calcule para vários valores de Δx e tente caracterizar a variação do erro máximo com a variação deste passo (sugestão: fazer gráfico em escala logarítmica do erro máximo em função de Δx).

3. Considere uma partícula de catalisador de geometria placa plana onde se leva a cabo uma reacção de primeira ordem. Considerando que a equação diferencial ordinária que descreve o perfil de concentrações no interior do catalizador é

$$f_{xx} - \phi^2 f = 0,$$

em que f é a concentração adimensional de reagente no interior do catalisador e ϕ é um número adimensional (módulo de Thiele) e x a variável espacial (0 no centro do catalisador e 1 na superfície). Considerando as condições de fronteira

$$f_x(0) = 0 \quad \text{e} \quad f(1) = 1$$

- (a) Use o método das diferenças finitas para determinar o perfil das concentrações para $0 \leq x \leq 1$, considerando $\phi = 0.1$. Apresente os resultados na forma de um gráfico.
- (b) Use o método das diferenças finitas para determinar o perfil das concentrações para $0 \leq x \leq 1$, considerando $\phi = 1$. Apresente os resultados na forma de um gráfico.
- (c) Use o método das diferenças finitas para determinar o perfil das concentrações para $0 \leq x \leq 1$, considerando $\phi = 10$. Apresente os resultados na forma de um gráfico.
- (d) Compare os valores obtidos com os valores exactos dados pela solução analítica

$$f(x) = \frac{\cosh(\phi x)}{\cosh(\phi)}.$$