

Mestrados em Engenharia Química e Industrial - 2007/2008

Matemática Aplicada

Exame de Recurso - 11/02/2008

Docente: Carlos Balsa (balsa@ipb.pt) - Departamento de Matemática - ESTiG

Instruções:

- É permitida a consulta bibliográfica.
- Os cálculos deverão ser efectuados recorrendo ao software Octave ou Matlab.
- Os cálculos devem ser efectuados com o máximo de precisão possível.
- Apresente os resultados dos cálculos com uma precisão de pelo menos 5 dígitos significativos.
- Os computadores só poderão ser ligados à *Internet* no final do exame com a permissão do docente.

I - Parte teórica (Duração: 30 min, cotação: 5 valores).

1. O que distingue um problema de valores fronteira de um problema de valor inicial para uma EDO?
2. Classifique cada uma das seguintes EDPs como hiperbólicas, parabólicas ou elípticas. Diga também se estas são ou não dependentes do tempo.
 - (a) Equação de Laplace
 - (b) Equação da onda
 - (c) Equação do calor
 - (d) Equação de Poisson
3. O que significa *molécula* de um método de diferenças finitas para a resolução numérica de um EDP?
4. No contexto da optimização não-linear que desvantagens apresenta o método de Newton comparativamente com o método do gradiente conjugado.

II - Parte prática (duração: 1 h e 30 min, cotação: 15 valores)

1. Consideramos a equação da onda

$$u_{tt} = 2u_{xx}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0$$

com condições iniciais

$$u(0, x) = 0.5 + 3 \sin(x\pi), \quad u_t(0, x) = 1, \quad 0 \leq x \leq 1$$

e condições de fronteira

$$u(t, 0) = 0.5, \quad u(t, 1) = 0.5 \quad t \geq 0$$

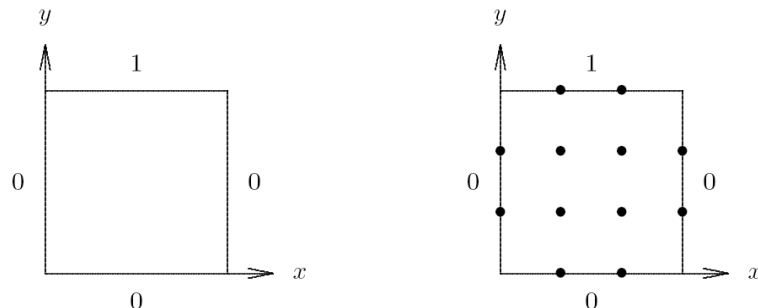
- (a) Deduza o esquema implícito de primeira ordem para a resolução numérica através da discretização total por diferenças finitas.
- (b) Escreva os sistemas de equações algébricas lineares a resolver em cada passo de tempo no caso de pretendermos obter a solução da equação para $0 \leq t \leq 0.8$ com $\Delta t = 0.2$ e $\Delta x = 0.2$.

- (c) Escreva um programa em linguagem Octave/Matlab para resolução deste problema e integre a equação de $t = 0$ a $t = 2$. Apresente os resultados na forma de gráfico de uma superfície tridimensional ao longo do plano (t, x) , considerando $\Delta x = 0.05$ e $\Delta t = 0.1$ (o programa Matlab/Octave utilizado para obter o gráfico deverá ser entregue ou enviado por e-mail ao docente no fim do exame).

2. Considere a resolução por diferenças finitas da equação de Helmholtz

$$u_{xx} + u_{yy} - u = 2$$

num quadrado unitário com as condições de fronteira abaixo indicadas.



- (a) Obtenha o sistema de equações algébricas lineares correspondente à malha usada para discretizar o domínio (lado direito da figura).
- (b) Calcule os valores aproximados da variável independente u nos pontos interiores do domínio.
3. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = 3(2y - 1)^2 + 3(3 - x)^2$$

Efectue duas iterações do método do gradiente conjugado para aproximar o ponto onde a função é mínima. Use como aproximação inicial o ponto $\mathbf{x}_0 = [-4 \ -2]^T$. Apresente todos os cálculos efectuados (se optar por efectuar um programa em Octave/Matlab deverá entregá-lo ou enviá-lo por e-mail ao docente).