

Física II

Eng. Informática 2003-2004

1

Carga e densidade de carga

As partículas elementares carregadas são o electrão e o próton. Possuem uma carga de igual valor, mas de sinal contrário.

Carga do electrão: $e = -1.60210 \times 10^{-19}$ [C]

Os electrões são normalmente considerados como **cargas pontuais**, pois possuem uma carga finita num volume extremamente pequeno.

As cargas produzem efeitos que são função não só da quantidade de carga existente numa dada região, mas também da forma como a carga está distribuída ao longo dessa mesma região.

Faz sentido falar em **distribuição de carga**

2

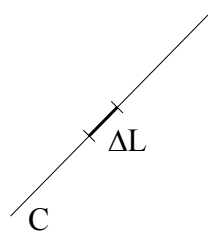
Carga e densidade de carga

Densidade linear de carga

Carga uniformemente distribuída por unidade de comprimento

$$\lambda = \lim_{\Delta L \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta L} = \frac{dq}{dl} \quad [C/m]$$

$$dq = \lambda \, dl \quad [C]$$



3

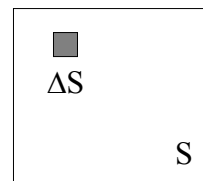
Carga e densidade de carga

Densidade superficial de carga

Carga uniformemente distribuída pela área de uma dada superfície

$$\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta S} = \frac{dq}{ds} \quad [C/m^2]$$

$$dq = \sigma \, ds \quad [C]$$



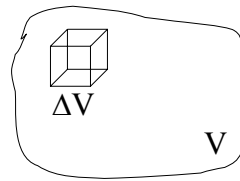
4

Carga e densidade de carga

Densidade volumétrica de carga

Carga uniformemente distribuída ao longo de um volume

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V} = \frac{dq}{dv} \quad [C/m^3]$$



$$dq = \rho \, dv \quad [C]$$

5

Força Eléctrica

Coulomb estabeleceu que a força entre dois objectos pequenos, separados pelo vácuo, ou pelo espaço livre, a uma distância grande, comparada com os seus tamanhos, é directamente proporcional à carga de cada um e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre eles.

$$F = k \frac{Q_1 Q_2}{r_{12}^2}$$

A amplitude e direcção da força entre duas partículas carregadas com uma determinada carga é dada pela Lei de Coulomb, tendo em conta:

Cargas do mesmo sinal repelem-se e de sinais contrários atraem-se

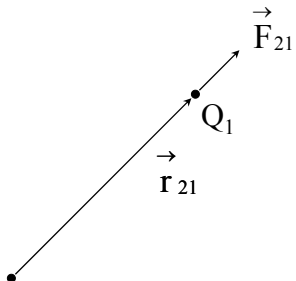
A força actua na direcção da linha de acção que une as duas partículas

A força é proporcional ao valor de cada carga

A força é inversamente proporcional ao quadrado da distância entre as partículas.

6

Força Eléctrica



$$\vec{F}_{21} = K_{e0} \frac{Q_1 Q_2}{r_{21}^2} \frac{\vec{r}_{21}}{\|\vec{r}_{21}\|} \text{ [N]}$$

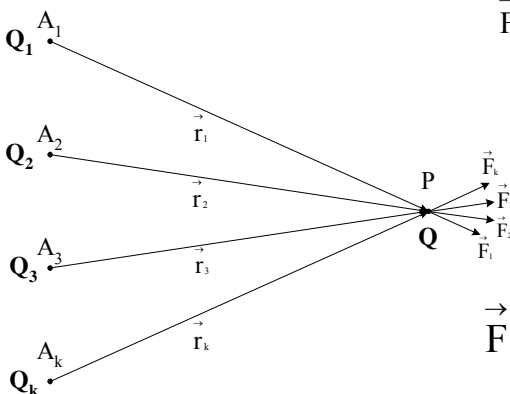
$$K_{e0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9 \left[\frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} \right]$$

$\epsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} \left[\frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2} \right]$
 \vec{F}_{21} - força exercida na carga Q_2 pela carga Q_1 [N]
 \vec{r}_{21} - vector que posiciona Q_2 relativamente a Q_1 [m]
 Q_1, Q_2 - valor das cargas [C]

7

Princípio da sobreposição

A força resultante exercida na carga Q colocada no ponto P é dada por



$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_k$$

$$\vec{r}_k = \vec{A}_k P$$

$$\vec{F} = k_{e0} Q \sum_{k=1}^n \frac{Q_k}{r_k^2} \frac{\vec{r}_k}{r_k}$$

8

Campo Eléctrico

Chama-se campo eléctrico no ponto P à força que se exerce por unidade positiva de carga colocada nesse ponto.

O campo eléctrico Coulombiano, criado por uma única carga pontual Q colocada no ponto A é dado pela expressão

$$\vec{E}_C = k_{e0} \times \frac{Q}{r^2} \times \frac{\vec{r}}{r} \quad \vec{r} = \vec{AP}$$

O campo Coulombiano criado por qualquer distribuição de cargas Q_k num ponto P do vazio é dado pela expressão:

$$\vec{E}_C = k_{e0} \sum_{k=1}^n \frac{Q_k}{r_k^2} \frac{\vec{r}_k}{r_k}$$

Expressão geral da
Lei de Coulomb

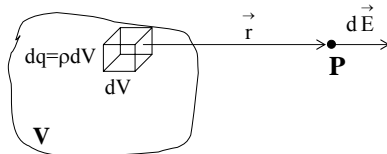
9

Campo Eléctrico

Como as cargas são, à nossa escala, pequeníssimas e muito próximas umas das outras, podemos considerar que elas estão num determinado domínio D, continuamente distribuídas.

O campo eléctrico, infinitamente pequeno, $d\vec{E}$, criado por dq em P é dado pelas expressões:

1. O domínio D é composto por um volume



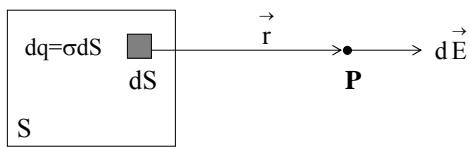
$$d\vec{E} = k_{e0} \frac{dq}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} = k_{e0} \frac{\rho dV}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\vec{E} = k_{e0} \int_D \frac{dq}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} = k_{e0} \int_V \frac{\rho dV}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

10

Campo Eléctrico

2. O domínio D é composto por uma superfície

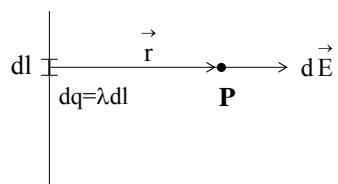


$$dq = \sigma dS$$

$$\vec{dE} = k_{e0} \frac{dq}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} = k_{e0} \frac{\sigma dS}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\vec{E} = k_{e0} \int_D \frac{dq}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} = k_{e0} \int_S \frac{\sigma dS}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

3. O domínio D é composto por uma linha



$$dq = \lambda dl$$

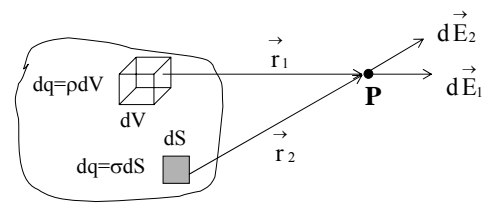
$$\vec{dE} = k_{e0} \frac{dq}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} = k_{e0} \frac{\lambda dl}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\vec{E} = k_{e0} \int_D \frac{dq}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} = k_{e0} \int_1 \frac{\lambda dl}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

11

Campo Eléctrico

4. O domínio D é composto por um volume e uma superfície



$$dq = \rho dV$$

$$dq = \sigma dS$$

$$\vec{dE}_1 = k_{e0} \frac{dq}{r_1^2} \frac{\vec{r}_1}{r_1} = k_{e0} \frac{\rho dV}{r_1^2} \frac{\vec{r}_1}{r_1}$$

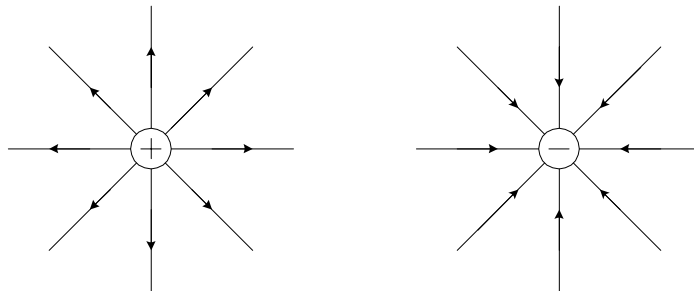
$$\vec{dE}_2 = k_{e0} \frac{dq}{r_2^2} \frac{\vec{r}_2}{r_2} = k_{e0} \frac{\sigma dS}{r_2^2} \frac{\vec{r}_2}{r_2}$$

$$\vec{E} = k_{e0} \int_V \frac{\rho dV}{r_1^2} \frac{\vec{r}_1}{r_1} + k_{e0} \int_S \frac{\sigma dS}{r_2^2} \frac{\vec{r}_2}{r_2}$$

12

Campo Eléctrico

Campo criado por uma carga pontual



As linhas de campo ou linhas de força são, em cada ponto, tangentes ao campo e onde se indica o sentido do campo.

De cargas positivas partem linhas de força e a cargas negativas chegam linhas de força.

13

Consequência da Lei de Coulomb

Circulação

$$\begin{aligned}
 C &\equiv \int \vec{E}_C \cdot d\vec{r} = k_{e0} \int \sum \frac{Q_k}{r_k^2} \frac{\vec{r}_k}{r_k} \cdot d\vec{r} = \\
 &= k_{e0} \sum \int \frac{Q_k}{r_k^2} dr_k = -k_{e0} \sum \frac{Q_k}{r_k} + C'
 \end{aligned}$$

Quando a circulação de uma função vectorial é independente da trajectória seguida, diz-se que a função vectorial deriva de uma função potencial.

À função vectorial de que deriva o Campo Eléctrico chama-se Potencial Eléctrico.

14

Potencial Eléctrico

$$V = -\int \vec{E}_c \cdot d\vec{r}$$

1. Se existir uma distribuição discreta de cargas

$$V = k_{e0} \sum_k \frac{Q_k}{r_k} + C$$

2. Se a distribuição de carga for contínua

2.1. Densidade volumétrica

$$V = k_{e0} \int_v \frac{\rho dv}{r} + C$$

15

Potencial Eléctrico

2.2. Densidade superficial

$$V = k_{e0} \int_s \frac{\sigma ds}{r} + C$$

2.3. Densidade linear

$$V = k_{e0} \int_l \frac{\lambda dl}{r} + C$$

Define-se a origem dos potenciais no infinito, pelo que $C=0$.

16

Diferença de potencial

A diferença de potencial entre dois pontos A e B é definida pela expressão:

$$V(A) - V(B) = \int_A^B \vec{E}_c \cdot d\vec{r}$$

que é igual à diferença do potencial no ponto A e potencial do ponto B

Se estivermos na presença de um conjunto de cargas discretas:

$$V(A) - V(B) = \int_A^B \vec{E}_c \cdot d\vec{r} = k_{e0} \left(\sum_k \frac{Q_k}{r_{kA}} - \sum_k \frac{Q_k}{r_{kB}} \right)$$

17

Diferença de potencial

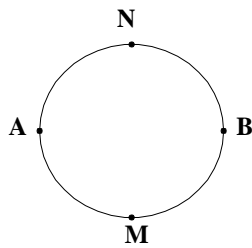
Para o cálculo da diferença de potencial entre dois pontos A e B a origem escolhida é irrelevante, qualquer que esta seja.

$$\begin{aligned} V(A) - V(B) &= - \int_{OA} \vec{E}_c \cdot d\vec{r} + \int_{OB} \vec{E}_c \cdot d\vec{r} = \\ &= \int_{AO} \vec{E}_c \cdot d\vec{r} + \int_{OB} \vec{E}_c \cdot d\vec{r} = \\ &= \int_{AB} \vec{E}_c \cdot d\vec{r} = \int_A^B \vec{E}_c \cdot d\vec{r} \end{aligned}$$

18

Consequências da lei da circulação

1. A circulação do Campo Elétrico ao longo de uma curva fechada é nula.



$$V_A - V_B = \int_{\overline{AMB}} \vec{E}_c \cdot d\vec{r} = \int_{\overline{ANB}} \vec{E}_c \cdot d\vec{r} = - \int_{\overline{BNA}} \vec{E}_c \cdot d\vec{r}$$

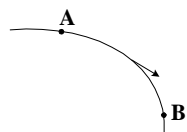
$$\int_{\overline{AMBNA}} \vec{E}_c \cdot d\vec{r} = \int_{\overline{AMB}} \vec{E}_c \cdot d\vec{r} + \int_{\overline{BNA}} \vec{E}_c \cdot d\vec{r} =$$

$$= - \int_{\overline{BNA}} \vec{E}_c \cdot d\vec{r} + \int_{\overline{BNA}} \vec{E}_c \cdot d\vec{r} = 0$$

19

Consequências da lei da circulação

2. O potencial decresce sempre ao longo de uma linha de força, ou o campo aponta no sentido dos potenciais decrescentes.



$$V(A) - V(B) = \int_A^B \vec{E}_c \cdot d\vec{r}$$

Quando circulamos ao longo de uma linha de campo de A para B temos sempre:

$$\vec{E}_c \cdot d\vec{r} > 0 \quad V_A - V_B > 0 \quad V_A > V_B$$

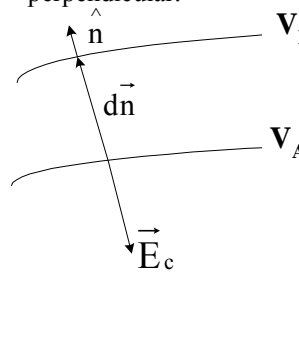
Como os potenciais decrescem ao longo de uma linha de campo, podemos concluir que estas não podem ser fechadas. Se tal acontecesse, teríamos no mesmo ponto potenciais diferentes

20

Consequências da lei da circulação

3. Podemos definir superfície equipotencial como o lugar geométrico dos pontos cujo potencial é o mesmo.

Em qualquer ponto da superfície equipotencial o campo eléctrico é-lhe perpendicular.



$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + d\vec{v}$$

$$V_B - V_A = dv = -\vec{E}_c \cdot d\vec{n} = -\vec{E}_c \cdot \hat{n} dn$$

$$dv \hat{n} = -\vec{E}_c \cdot \hat{n} \hat{n} dn = -\vec{E}_c dn$$

$$\vec{E}_c = -\frac{dv}{dn} \hat{n} \quad \vec{E} = -\nabla V$$

21

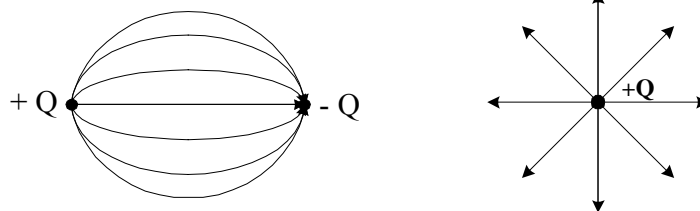
Fluxo eléctrico

Por definição, o fluxo eléctrico tem origem numa carga positiva e termina numa carga negativa. Na ausência da carga negativa, o fluxo eléctrico termina no infinito.

Uma carga de 1 C provoca um fluxo eléctrico de 1 C.

$$\phi = Q \text{ [C]}$$

Assumindo que as duas cargas são iguais em amplitude as linhas de fluxo partem de +Q e terminam em -Q.

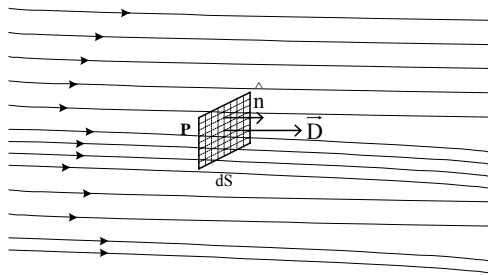


22

Densidade de fluxo eléctrico

Se na vizinhança de um ponto P as linhas de fluxo têm a direcção do vector unitário, \hat{n} , e se a soma das linhas de fluxo que cruzam a superfície elementar dS e são perpendiculares a esta, então a densidade de fluxo eléctrico no ponto P é dada por:

$$\vec{D} = \frac{d\phi}{dS} \cdot \hat{n} \quad [C/m^2]$$



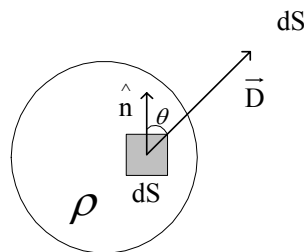
23

Densidade de fluxo eléctrico

Consideremos que estamos perante uma carga uniformemente distribuída por unidade de volume, ρ (C/m^3).

O fluxo elementar que atravessa a superfície dS é dado por:

$$\begin{aligned} d\phi &= \vec{D} \cdot \hat{n} dS = \vec{D} \cdot d\vec{S} = \\ & D \times dS \times \cos\theta \\ \vec{D} &= \epsilon \vec{E} \end{aligned}$$



O campo D, campo Deslocamento Eléctrico, permite “tratar” o campo eléctrico de uma forma independente do meio.

O fluxo elementar $d\phi$ é a quantidade de fluxo que sai do interior da superfície através de dS .

24

Densidade de fluxo - Campo eléctrico

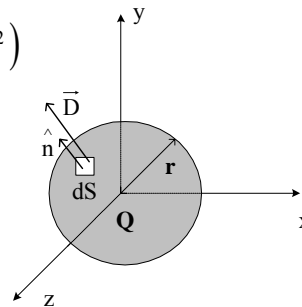
Consideremos uma carga pontual, Q , na origem do sistema de eixos da figura, no interior de uma superfície esférica de raio r .

Por simetria, \vec{D} , devido a Q , é constante em amplitude ao longo da superfície esférica e normal a ela em cada ponto.

$$Q = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = D \times \oint_S dS = D \times (4\pi r^2)$$

$$D = \frac{Q}{4\pi r^2} \Rightarrow \vec{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{n}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{Q}{r^2} \hat{n} \Rightarrow \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$$



25

Lei de Gauss

O fluxo total do campo deslocamento eléctrico que sai através de uma superfície fechada é igual à carga contida no interior dessa superfície.

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_i$$

S é uma superfície fechada conhecida como superfície Gausseana.

A escolha desta superfície deve ser adequada à simetria do problema a resolver.

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_i}{\epsilon_0}$$

26

Escolha da superfície Gausseana

A superfície Gausseana a escolher deve obedecer às seguintes condições:

1. A superfície Gausseana tem que constituir uma superfície fechada.
2. Em cada ponto da superfície o vector Campo Eléctrico deve ser perpendicular ou tangencial à superfície Gausseana.
3. O vector Campo Eléctrico deve ser constante ao longo de toda a superfície Gausseana, nomeadamente onde \vec{E} é perpendicular á superfície.

27

Aplicação da Lei de Gauss: Elemento de Volume

Vamos aplicar o método da Lei de Gauss a um problema que não possui nenhuma simetria.

À primeira vista parece que o caso é impossível de ser resolvido:

1. Sem simetria a superfície Gausseana não pode ser escolhida de modo a que \vec{E} seja constante ao longo de toda a superfície e normal ou tangencial à referida superfície.

2. Sem a superfície Gausseana definida é impossível calcular o integral $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$

Como contornar esta dificuldade?

28

Aplicação da Lei de Gauss: Elemento de Volume

O único meio de contornar esta dificuldade passa por encontrar uma superfície fechada, muito pequena, de modo a que \vec{E} seja quase constante sobre a superfície e a pequena variação de \vec{E} possa ser adequadamente representada usando-se os primeiros dois termos da série de Taylor.

O resultado será mais exacto se o volume envolvido pela superfície Gaussiana decrescer e pretendermos eventualmente fazer esse volume tender a zero.

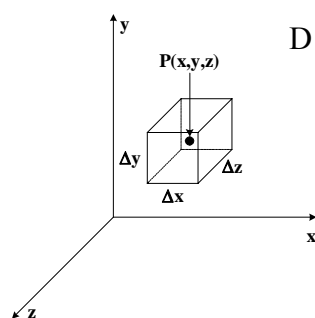
Este exemplo difere dos anteriores na medida em que não pretendemos obter o valor de \vec{E} como resposta, mas sim conseguir alguma informação muito valiosa acerca do modo como \vec{E} varia na região da superfície infinitesimal.

29

Aplicação da Lei de Gauss: Elemento de Volume

Consideremos um ponto P, representado na figura a seguir, localizado por um sistema de coordenadas cartesianas.

O valor de \vec{D} pode também ser expresso em coordenadas cartesianas.



$$\vec{D} = D_0 = D_{x0} \hat{i} + D_{y0} \hat{j} + D_{z0} \hat{k}$$

30

Aplicação da Lei de Gauss: Elemento de Volume

Escolhemos como superfície Gausseana uma pequena caixa rectangular centrada no ponto P, com lados de comprimento Δx , Δy e Δz .

Por aplicação da Lei de Gauss, obtemos:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_i$$

Para calcular o integral sobre a superfície fechada, temos de dividir o integral em seis, um sobre cada superfície.

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_{\text{frente}} \vec{D} \cdot d\vec{S} + \int_{\text{atrás}} \vec{D} \cdot d\vec{S} + \int_{\text{esq}} \vec{D} \cdot d\vec{S} + \int_{\text{dir}} \vec{D} \cdot d\vec{S} + \int_{\text{topo}} \vec{D} \cdot d\vec{S} + \int_{\text{base}} \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

31

Aplicação da Lei de Gauss: Elemento de Volume

Consideremos um destes integrais para analisar em detalhe. Como o elemento de superfície é muito pequeno, \vec{D} é aproximadamente constante ao longo desta porção de superfície.

$$\begin{aligned} \int_{\text{frente}} \vec{D} \cdot d\vec{S} &\approx \vec{D}_{\text{frente}} \cdot \Delta\vec{S}_{\text{frente}} \\ &\approx \vec{D}_{\text{frente}} \cdot \Delta x \Delta y \hat{k} \\ &\approx D_{z,\text{frente}} \Delta x \Delta y \end{aligned}$$

A face frontal está a uma distância $\Delta z/2$ de P e, por isso,

$$D_{z,\text{frente}} \approx D_{z0} + \frac{\Delta z}{2} \times \text{taxa de variação de } D_z \text{ com } z \approx D_{z0} + \frac{\Delta z}{2} \times \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

32

Aplicação da Lei de Gauss: Elemento de Volume

Esta expressão pode ainda ser obtida com o uso de um termo constante e de um termo envolvendo a primeira derivada na expansão da série de Taylor para D_z na vizinhança de P.

$$\int_{\text{frente}} \vec{D} \cdot d\vec{S} \approx \left(D_{z0} + \frac{\Delta z}{2} \times \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y$$

Consideremos o integral sobre a superfície posterior

$$\begin{aligned} \int_{\text{atrás}} \vec{D}_{\text{atrás}} \cdot d\vec{S}_{\text{atrás}} &\approx \vec{D}_{\text{atrás}} \cdot \Delta \vec{S}_{\text{atrás}} \approx \vec{D}_{\text{atrás}} \cdot \left(-\Delta x \Delta y \hat{k} \right) \approx \\ &\approx -D_{z,\text{atrás}} \Delta x \Delta y \end{aligned}$$

33

Aplicação da Lei de Gauss: Elemento de Volume

Por outro lado,

$$D_{z,\text{atrás}} \approx D_{z0} - \frac{\Delta z}{2} \times \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

De onde

$$\int_{\text{atrás}} \vec{D} \cdot d\vec{S} \approx \left(-D_{z0} + \frac{\Delta z}{2} \times \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y$$

Se combinarmos os dois integrais:

$$\int_{\text{frente}} \vec{D} \cdot d\vec{S} + \int_{\text{atrás}} \vec{D} \cdot d\vec{S} \approx \left(\frac{\partial D_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z$$

34

Aplicação da Lei de Gauss: Elemento de Volume

Usando exactamente o mesmo processo, verificamos que:

$$\int_{\text{direita}} \vec{D} \cdot d\vec{S} + \int_{\text{esquerda}} \vec{D} \cdot d\vec{S} \approx \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} \right) \Delta x \Delta y \Delta z$$

e

$$\int_{\text{topo}} \vec{D} \cdot d\vec{S} + \int_{\text{base}} \vec{D} \cdot d\vec{S} \approx \left(\frac{\partial D_y}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y \Delta z$$

Então

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} \approx \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) \times \Delta x \Delta y \Delta z$$

ou

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q \approx \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) \times \Delta v$$

35

Aplicação da Lei de Gauss: Elemento de Volume

A partir da expressão anterior podemos concluir que:

A carga contida no volume $\Delta v \approx$

$$\approx \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) \times \text{volume } \Delta v$$

36

Divergência

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \approx \frac{\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S}}{\Delta v} \approx \frac{Q}{\Delta v}$$

Se fizermos o volume tender para zero, a relação ficará mais exacta.

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S}}{\Delta v} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{Q}{\Delta v}$$

De notar que a aproximação foi substituída por uma igualdade.

Como o último termo se refere a densidade volumétrica de carga, temos:

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S}}{\Delta v} = \rho$$

37

Divergência

A última expressão pode ser dividida em duas, para serem estudadas separadamente.

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S}}{\Delta v}$$

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho$$

A primeira equação não envolve densidade de carga e pode ser usada para qualquer vector \vec{A} . Este vector pode representar velocidade, gradiente de temperatura, ou qualquer outro campo vectorial.

38

Divergência

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}}{\Delta v}$$

Esta expressão é chamada de Divergência. Assim, a divergência de \vec{A} é definida como:

$$\text{Divergência de } \vec{A} = \text{div } \vec{A} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}}{\Delta v}$$

Se \vec{A} representar o vector densidade de fluxo, podemos dizer que a divergência do vector densidade de fluxo \vec{A} é a variação do fluxo através da superfície fechada de um pequeno volume que tende para zero. A interpretação física da divergência é frequentemente útil na obtenção de informação qualitativa acerca da divergência de um campo vectorial sem a necessidade de efectuar investigação matemática.

39

Divergência

O operador divergência pode ainda ser descrito pela expressão seguinte em coordenadas cartesianas:

$$\text{Div } \vec{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

Note-se que a divergência é uma operação realizada num vector mas que tem como resultado um escalar.

A divergência diz-nos simplesmente a quantidade de fluxo que está a deixar o pequeno volume. Não é associada nenhuma direcção ao conceito de divergência.

40

Divergência

A expressão da lei de Gauss pode ainda ser escrita da seguinte forma:

$$\text{Div } \vec{D} = \rho \Rightarrow \text{Div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Esta é a primeira das quatro equações de Maxwell e aplica-se à electrostática e a campos magnéticos estacionários.

Estabelece que o fluxo eléctrico por unidade de volume, deixando um volume infinitesimal é exactamente igual à densidade volumétrica de carga no ponto. Esta Lei relaciona o fluxo que deixa qualquer superfície fechada à carga envolvida.

41

Energia

A intensidade de campo eléctrico foi definida como a força exercida numa carga de prova no ponto onde queremos encontrar esse campo vectorial.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q}$$

Se pretendermos mover a carga de prova contra o campo eléctrico, temos que lhe exercer uma força igual e de sentido oposto à força exercida pelo Campo Eléctrico. Isto implica dispêndio de energia ou realização de trabalho.

Se pretendermos movimentar a carga na direcção do Campo Eléctrico, não há gasto de energia (dispêndio de energia negativo). Neste caso não é realizado trabalho. O trabalho é realizado pelo Campo Eléctrico.

42

Energia


$$\vec{F}_e = Q\vec{E} = QE \hat{i}$$

Para deslocar a carga temos que vencer esta força exercendo uma outra em sentido contrário.

$$\vec{F} = -\vec{F}_e = -Q\vec{E} = QE \left(-\hat{i} \right)$$

A energia necessária para mover a carga dr , ou o trabalho realizado será:

$$dw = QE \left(-\hat{i} \right) \cdot d\vec{r}$$

43

Energia

Esta quantidade diferencial de trabalho poderá ser zero em várias condições, determinadas a partir da equação anterior, nomeadamente quando o vector Campo Eléctrico e o vector deslocamento elementar são perpendiculares.

$$W = -Q \int_{\text{inicial}}^{\text{final}} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

44

Cargas em movimento

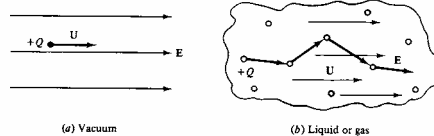
Consideremos a força eléctrica exercida numa carga carregada positivamente numa região onde existe um dado campo Eléctrico no vácuo.

Esta força é dada por $\vec{F} = Q\vec{E}$ e provoca uma aceleração constante da partícula, que se move na direcção do Campo Eléctrico com uma velocidade v , a qual vai aumentando.

Quando a partícula carregada está num meio líquido ou gasoso, esta colide sucessivamente com outras partículas do meio, alterando de forma aleatória o seu movimento.

45

Cargas em movimento



Se \vec{E} for constante e o meio homogéneo, as variações aleatórias anulam-se umas às outras conduzindo a uma velocidade média aproximadamente constante na direcção do Campo Eléctrico.

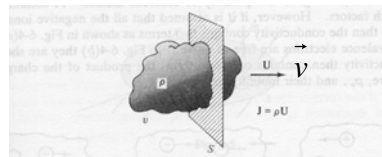
Esta velocidade é directamente proporcional à intensidade de Campo Eléctrico. $\vec{v} = \mu\vec{E}$, onde μ designa a mobilidade em $\frac{m^2}{V.S}$

46

Cargas em movimento

A mobilidade varia de acordo com a temperatura e com a estrutura do material.

Em análise de circuitos, a mobilidade é conhecida como resistividade do material que, obviamente, também varia com a temperatura.



$$\vec{J} = \rho \vec{v} \left(\frac{A}{m^2} \right)$$

$$\text{Se } \vec{v} = \mu \vec{E}, \quad \vec{J} = \sigma \vec{E}$$

$$\sigma = \mu \rho \left(\frac{S}{m} \right), \text{ representa a condutividade}$$

47

Corrente e densidade de corrente

A corrente eléctrica é medida pela quantidade de carga eléctrica que passa através de um ponto específico ou de uma dada superfície.

A unidade de corrente é o Ampére, definido como a razão em que a quantidade de carga que passa através de um determinado ponto ou que atravessa uma dada superfície é igual a 1 Coulomb por segundo.

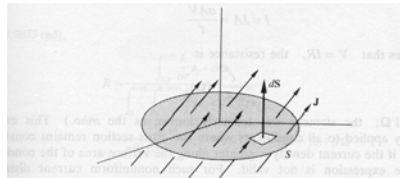
$$I = \frac{dQ}{dt}$$

Em estudos de Campos Magnéticos é mais comum estudar os acontecimentos que ocorrem num ponto, em vez de estudar o que acontece numa grande região, sendo, portanto, mais comum utilizar o conceito de densidade de corrente, \vec{J} , medida em Ampéres por m^2 , (A/m^2)

48

Corrente I

Se \vec{J} é a densidade de corrente que atravessa uma dada área S ou dS , a corrente é obtida por:



$$dI = \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad \text{ou} \quad I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

O vector densidade de corrente pode não ser uniforme ao longo de toda a secção

49

Resistência R

Se um dado condutor de secção uniforme, de área A e comprimento l tem uma diferença de potencial V aos seus terminais, então:

$$E = \frac{V}{l} \quad \text{e} \quad J = \frac{\sigma V}{l}$$

assumindo que a corrente está uniformemente distribuída ao longo da área A .

$$\text{A corrente total é dada por: } I = JA = \frac{\sigma AV}{l}$$

Através da Lei de Ohm, $V=RI$, pelo que a resistência será dada por

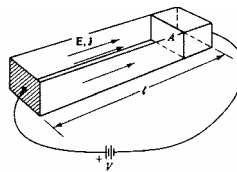
$$R = \frac{l}{\sigma A} (\Omega)$$

50

Resistência R

Esta expressão para a resistência é geralmente aplicada a condutores que apresentam a secção constante ao longo de todo o seu comprimento. No entanto, se a densidade de corrente ao longo da secção do condutor a expressão anterior deixa de ser válida e é substituída por:

$$R = \frac{V}{\int \vec{J} \cdot d\vec{S}} = \frac{V}{\int \sigma \vec{E} \cdot d\vec{S}}$$
$$R = \frac{\int \vec{E} \cdot d\vec{l}}{\int \sigma \vec{E} \cdot d\vec{S}}$$



51

Campo Magnético: conceito de magnetismo

A ciência do magnetismo tem origem na antiguidade. Desenvolveu-se através da observação de que determinadas pedras existentes na natureza podiam atrair outras pedras. Apesar de atraírem também pedaços de ferro, não atraíam ouro e prata.

A palavra magnetismo vem de uma região da Ásia Menor, Magnésia, onde essas pedras foram encontradas.

Actualmente reconhecemos que essa descoberta foi de grande importância, desde o pequeno íman utilizados em enfeites até ao gravador de fita magnética e discos de computador.

A medicina faz uso do magnetismo para conseguir imagens de órgãos dentro do corpo humano.

Sondas espaciais enviam-nos informações acerca da estrutura da terra e de outros planetas, através da medição do magnetismo desses corpos.

52

Campo Magnético: conceito de magnetismo

O comportamento de uma barra magnetizada é bastante familiar a quem quer que tenha estudado um pouco de ciência. Os ímans permanentes, usualmente feitos de ligas que contêm ferro, atraem ou repelem outros ímans. Além disso, atraem pedaços de ferro que, por sua vez, ficam magnetizados.

Os ímans também são utilizados em aparelhos eléctricos de medida, em transformadores, motores, etc.

Experimentalmente verificou-se que todos os ímans, independentemente da sua forma, têm dois pólos, pólo norte e pólo sul, que exercem forças um sobre o outro de forma análoga à das cargas eléctricas: Pólos do mesmo nome repelem-se e pólos de nomes opostos se atraem.

53

Campo Magnético: conceito de magnetismo

Mais tarde, realizou-se uma outra experiência com uma balança de torção, para mostrar que os pólos magnéticos exercem forças atractivas ou repulsivas uns sobre os outros, e que tais forças variam com o quadrado da respectiva separação.

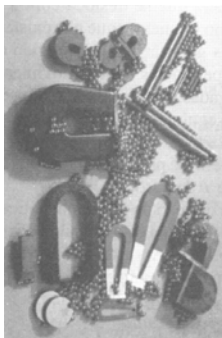
Embora a força entre dois pólos magnéticos seja semelhante à força entre duas cargas eléctricas, existe uma diferença importante: as cargas eléctricas podem ser isoladas (electrão e protão, por exemplo) enquanto que os pólos magnéticos não podem ser isolados.

Os pólos magnéticos encontram-se sempre aos pares. Qualquer que seja o número de vezes que se divida um íman permanente, sempre se encontra em cada pedaço um pólo norte e um pólo sul.

54

Campo Magnético: conceito de magnetismo

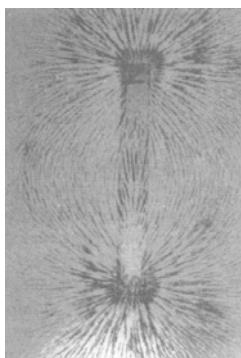
Na figura a seguir estão apresentados um conjunto de ímãs que se encontram no mercado. Alguns são feitos de uma liga que inclui ferro, alumínio e cobalto. Outros são uma liga de aço-níquel e outros são de cerâmica de óxido de ferro.



55

Campo Magnético: conceito de magnetismo

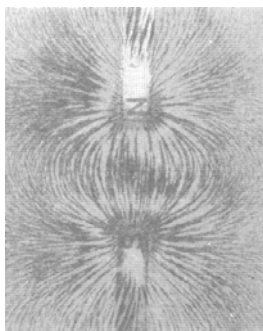
Na figura a seguir está representado o campo magnético de uma barra magnetizada, evidenciada por limalha de ferro sobre uma folha de papel.



56

Campo Magnético: conceito de magnetismo

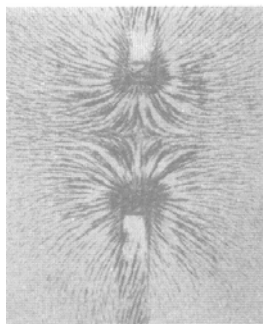
Na figura a seguir está representada a configuração do campo magnético de duas barras magnetizadas, evidenciado por limalha de ferro. Esta configuração corresponde ao campo magnético entre dois pólos contrários.



57

Campo Magnético: conceito de magnetismo

Na figura a seguir está representada a configuração do campo magnético de duas barras magnetizadas, evidenciado por limalha de ferro. Esta configuração corresponde ao campo magnético entre dois pólos iguais.



58

Campo Magnético: relação entre magnetismo e electricidade

A relação entre magnetismo e electricidade foi descoberta durante uma demonstração, onde se observou que uma corrente eléctrica num condutor desviava uma agulha magnetizada.

Mais tarde, André Ampère, obteve as leis quantitativas da força magnética entre os condutores percorridos por correntes eléctricas. Sugeriu que fossem correntes circulares, de dimensões moleculares, as responsáveis por todos os fenómenos magnéticos.

Em 1820, Faraday evidenciou outras ligações entre electricidade e magnetismo: Uma corrente eléctrica poderá ser provocada num circuito, pelo movimento de um íman perto do circuito ou pela alteração de uma corrente num outro circuito vizinho. Estas observações demonstraram que um campo magnético variável provoca um campo eléctrico

Mais tarde, Maxwell mostrou que um campo eléctrico variável provoca um campo magnético.

59

Campo Magnético B

Tal como acontecia antigamente, pequenos pedaços de ferro ainda são utilizados para detectar a presença de campos magnéticos.

No espaço em torno de um íman permanente ou de um fio conduzindo corrente eléctrica, existe um campo magnético da mesma forma que existe um campo eléctrico na região em torno de um corpo carregado.

Em electrostática podemos dizer que a relação entre campo eléctrico e carga eléctrica é representada por:

$$\text{carga eléctrica} \Leftrightarrow \vec{E} \Leftrightarrow \text{carga eléctrica}$$

Um campo eléctrico é estabelecido por cargas eléctricas dando origem a forças eléctricas sobre outras cargas.

60

Campo Magnético B

Para campos magnéticos poderíamos dizer:

carga magnética $\Leftrightarrow \vec{B} \Leftrightarrow$ carga magnética

No entanto, cargas magnéticas não existem individualmente, pelo que a relação mais útil será

cargas eléctricas em movimento $\Leftrightarrow \vec{B} \Leftrightarrow$ cargas eléctricas em movimento

que se pode representar como

corrente eléctrica $\Leftrightarrow \vec{B} \Leftrightarrow$ corrente eléctrica

61

Campo Magnético B

Uma carga eléctrica em movimento, ou seja, uma corrente eléctrica provoca um campo magnético, que exerce uma força magnética em outras cargas em movimento.

Uma outra semelhança entre campos eléctrico e magnético é que ambos podem ser representados por linhas de campo, como qualquer campo vectorial.

Tal como acontece com o campo eléctrico, pode-se constatar que:

1. As linhas de campo magnético são representadas de forma que a direcção do campo em qualquer ponto é dada pela tangente à linha de campo naquele ponto
2. O número de linhas que atravessa perpendicularmente a área de uma dada superfície determina a intensidade de campo magnético: Se \vec{B} é grande, as linhas estão muito próximas, ao passo que se \vec{B} é pequeno as linhas estão bem afastadas.

62

Campo Magnético B

Apesar destas semelhanças, entre os dois campos existe uma diferença muito importante:

A força eléctrica que actua sobre uma partícula carregada é sempre paralela às linhas de campo eléctrico.

A força magnética que actua sobre uma partícula carregada em movimento é sempre perpendicular às linhas de campo magnético.

A força magnética sobre uma carga em movimento é bem mais complexa que a força eléctrica sobre uma carga estática.

Uma outra diferença que iremos ter oportunidade de ver é que as linhas de campo eléctrico sempre começam e terminam numa carga, enquanto que as linhas de campo magnético sempre formam curvas fechadas.

63

Campo Magnético B

O campo eléctrico num ponto do espaço foi definido como sendo a força exercida por unidade de carga, que actua sobre uma carga de prova colocada no ponto onde se pretende calcular o campo eléctrico.

Da mesma forma, o campo gravitacional será a força gravitacional por unidade de massa que actua sobre uma massa de prova colocada nesse ponto.

Vamos agora definir o vector campo magnético, também chamado vector indução magnética ou vector densidade de fluxo magnético, num certo ponto do espaço, em termos de uma força magnética que seria exercida sobre um corpo de prova apropriado.

Neste contexto o corpo de prova seria uma partícula carregada que se desloca com uma determinada velocidade \vec{v} , numa região em que não existem campos eléctricos nem campos gravitacionais.

64

Campo Magnético B

A experiência com o movimento de diversas partículas carregadas, em movimento num campo magnético, levam aos seguintes resultados:

1. A força magnética é proporcional à carga Q e ao módulo da velocidade de deslocamento da partícula.
2. O módulo e a direcção da força magnética dependem da velocidade da partícula e do módulo e da direcção do campo magnético.
3. Quando uma partícula carregada se move numa direcção paralela ao vector campo magnético, a força magnética exercida sobre a partícula é nula.
4. Quando o vector velocidade fizer um ângulo θ com o vector campo magnético, a força magnética actua numa direcção perpendicular a ambos os vectores, ou seja o vector força magnética é perpendicular ao plano definido pelos vectores \vec{v} e \vec{B} .

65

Campo Magnético B

5. A força magnética exercida numa carga positiva terá sentido oposto ao sentido da força que actua sobre uma carga negativa que se mova com o mesmo vector velocidade.

6. Se o vector velocidade fizer um ângulo θ com o vector campo magnético, o módulo da força magnética será proporcional a $\sin\theta$.

Estas observações podem ser descritas matematicamente através da seguinte expressão:

$$\vec{F} = Q \times (\vec{v} \wedge \vec{B})$$

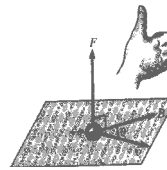
66

Força magnética \vec{F}

$$\vec{F} = q \times (\vec{v} \wedge \vec{B})$$

A direcção da força magnética é a direcção do vector resultante do produto vectorial dos vectores velocidade e campo magnético, $\vec{v} \wedge \vec{B}$ e como tal é perpendicular ao plano definido por estes dois vectores.

O sentido do vector resultado deste produto vectorial pode ser determinado através da regra da mão direita.



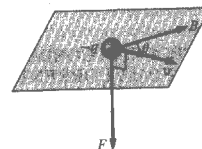
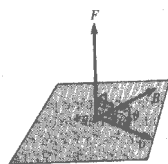
67

Força magnética \vec{F}

A regra da mão direita permite, então, determinar a direcção e sentido da força magnética, \vec{F} , que actua sobre uma carga q em movimento com uma determinada velocidade \vec{v} , num campo magnético \vec{B} .

Se a carga for positiva, a força será dirigida para cima no sentido do polegar.

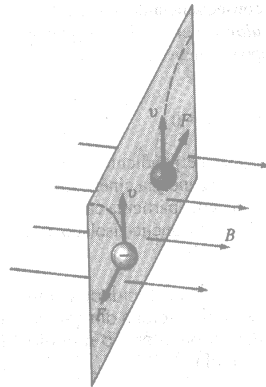
Se a carga for negativa, a força será dirigida para baixo, em sentido contrário ao polegar.



68

Força magnética \vec{F}

Na presença de um campo magnético, as partículas carregadas em movimento desviam-se de acordo com as curvas a tracejado.



69

Força magnética \vec{F}

O módulo da força magnética é dado por

$$F = q \times v \times B \times \text{sen}\theta$$

v é o módulo da velocidade com que a carga se desloca

B é o módulo do campo magnético

θ é o ângulo que \vec{v} faz com \vec{B}

Podemos concluir que o valor da força é zero, quando o vector velocidade for paralelo ao vector campo magnético, $\theta = 0$ ou $\theta = 180^\circ$.

A força magnética terá o valor máximo, $F = q \times v \times B$, quando o vector velocidade for perpendicular ao vector campo magnético.

70

Força magnética \vec{F}

Podemos definir o campo magnético em termos de uma força lateral que actua sobre uma partícula carregada. Convém realçar algumas diferenças importantes entre forças eléctricas e magnéticas:

1. A força eléctrica tem sempre a direcção do campo eléctrico, enquanto que a força magnética é sempre perpendicular ao campo magnético.
2. A força eléctrica actua sobre uma partícula carregada, independentemente da velocidade da partícula, enquanto que a força magnética actua sobre uma partícula carregada, somente quando a partícula está em movimento.
3. A força eléctrica realiza trabalho ao deslocar uma partícula carregada, enquanto a força magnética associada a um campo magnético permanente não efectua trabalho quando a partícula carregada é deslocada.

71

Força magnética \vec{F}

Esta última afirmação aparece como consequência da força magnética ser sempre perpendicular ao deslocamento, quando a carga se move num campo magnético permanente.

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \vec{v} dt = F \times v \times \cos 90^\circ \times dt = 0$$

Atendendo a esta expressão e ao teorema da energia cinética, podemos concluir que a energia cinética de uma partícula carregada não pode ser alterada por um campo magnético isolado.

Por outras palavras, quando uma carga se move com uma determinada velocidade, um campo magnético aplicado pode alterar a direcção do vector velocidade, mas não pode alterar o módulo da velocidade a que a carga se desloca.

72

Força magnética \vec{F}

A unidade SI de campo magnético é weber por metro quadrado (Wb/m^2) ou tesla (T).

Esta unidade pode ser relacionada às unidades fundamentais através da expressão que permite calcular a força magnética, ou seja,

Uma carga de 1 Coulomb que se move a uma velocidade de 1 m/s, perpendicular ao campo magnético sofre uma força de 1 Newton.

$$\text{Assim: } [B] = T = \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2} = \frac{\text{N}}{\text{C} \times \frac{\text{m}}{\text{s}}} = \frac{\text{N}}{\text{A} \times \text{m}}$$

Muitas vezes também se utiliza o Gauss, G, como unidade de campo magnético. $1\text{T} = 10^4\text{G}$

Ímãs de laboratório, podem gerar campos de 2,5 T, ao passo que ímãs supercondutores podem gerar campos de 25 T. O campo magnético nas vizinhanças da superfície terrestre é cerca de $0,5 \times 10^{-4}$ T.

73

Força de Lorentz

Se uma partícula carregada estiver sob a influência tanto de um campo eléctrico como de um campo magnético, então a força total exercida sobre ela será expressa por:

$$\vec{F} = q \times \vec{E} + q \times \vec{v} \wedge \vec{B}$$

A força de Lorentz não é um novo tipo de força, mas sim simplesmente a soma da força eléctrica com a força magnética que actuam simultaneamente sobre uma partícula carregada.

A componente eléctrica dessa força actua sobre qualquer partícula carregada, independentemente de ela estar em repouso ou em movimento.

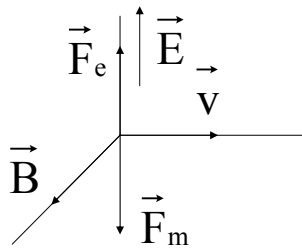
A componente magnética actua somente sobre partículas carregadas em movimento

74

Força de Lorentz

Uma aplicação comum da força de Lorentz é o estudo do comportamento de partículas carregadas que passa por uma região em que os campos eléctrico e magnético são perpendiculares entre si e à velocidade das partículas.

Se os campos eléctrico e magnético e a velocidade estiverem orientados de acordo com a figura seguinte, então a força eléctrica terá sentido contrário ao da força magnética.



75

Força de Lorentz

Podemos ajustar os campos eléctrico e magnético de modo a que a força eléctrica tenha a mesma intensidade que a força magnética: Força de Lorentz igual a zero. Na forma escalar temos:

$$q \times E = q \times v \times B$$

Ou seja:

$$v = \frac{E}{B}$$

76

Força de Lorentz

Os campos eléctrico e magnético actuam como um selector de velocidade: somente as partículas de se deslocam à velocidade E/B passam pela região sem sofrer a acção dos dois campos, enquanto que as que se deslocam a velocidades diferentes serão desviadas.

77

Força magnética num condutor percorrido por uma corrente

Um conjunto de cargas eléctricas em movimento forma uma corrente eléctrica.

Um campo magnético produz uma força perpendicular a ele sobre uma carga em movimento, logo irá produzir uma força sobre um condutor percorrido por corrente eléctrica.

Os electrões de condução do condutor estão sujeitos a essa força magnética perpendicular ao campo magnético, mas como não podem escapar do material, a força é transmitida para o condutor como um todo.

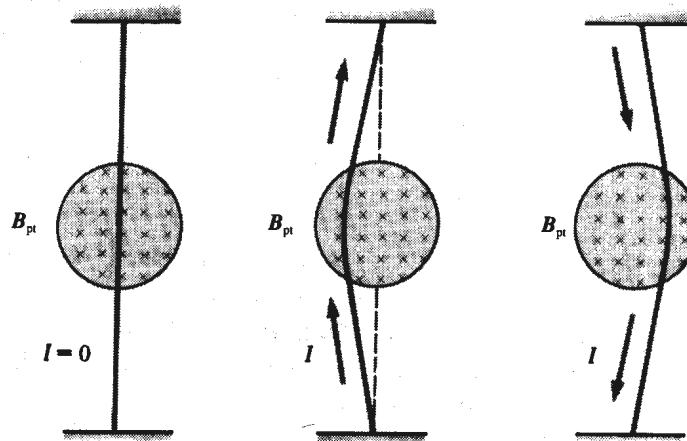
Na figura seguinte podemos ver o comportamento de um condutor percorrido por uma corrente eléctrica numa região onde existe um campo magnético.

Quando existe corrente no condutor ele é desviado para um lado. Se o sentido da corrente for invertido ele será desviado para o lado oposto.

O contrário também se verifica quando o campo magnético muda de sentido.

78

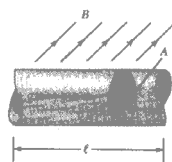
Força magnética num condutor percorrido por uma corrente



79

Força magnética num condutor percorrido por uma corrente

Consideremos um segmento de condutor rectilíneo de comprimento l e área de secção A , percorrido por uma corrente I numa região onde existe uma campo magnético externo \vec{B}



A força magnética sobre uma carga q que se movimenta com uma velocidade \vec{v} é dada por

$$\vec{F} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$$

80

Força magnética num condutor percorrido por uma corrente

A força sobre os portadores de carga é transmitida ao fio condutor pelas colisões dos portadores com os átomos que constituem o condutor.

A força total exercida sobre o condutor será o produto da força exercida sobre uma carga pelo número de cargas no condutor.

Sendo n o número de cargas por unidade de volume, a força magnética resultante num condutor de comprimento l é

$$\vec{F} = (q \times \vec{v} \wedge \vec{B}) \times n \times A \times l$$

Atendendo a que a corrente num fio é dada por $I = nqvA$, a expressão anterior pode tomar a forma seguinte

$$\vec{F} = I \times \vec{l} \wedge \vec{B}$$

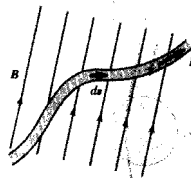
81

Força magnética num condutor percorrido por uma corrente

O vector \vec{l} é um vector que tem direcção e sentido da corrente I . O seu módulo é igual ao comprimento do segmento.

Esta expressão só se aplica a um fio condutor rectilíneo, num campo magnético externo uniforme. Além disso, desprezamos o campo criado pela própria corrente, pois o fio não pode provocar uma força sobre si mesmo.

Consideremos agora um fio condutor, de forma arbitrária e secção recta uniforme situado num campo magnético externo de acordo com a figura seguinte.



82

Força magnética num condutor percorrido por uma corrente

A força magnética exercida sobre um segmento muito pequeno, $d\vec{S}$ é dada por:

$$d\vec{F} = I \times d\vec{S} \wedge \vec{B}$$

Analisando esta expressão podemos definir o campo magnético como sendo uma força mensurável sobre um elemento de corrente. A força será máxima quando o campo magnético é perpendicular ao elemento de corrente e será mínima quando o campo magnético é paralelo ao elemento de corrente.

Para obter a força total exercida sobre o condutor, basta integrar a expressão anterior sobre todo o comprimento do fio.

$$\vec{F} = \int_a^b d\vec{F} = I \times \int_a^b d\vec{S} \wedge \vec{B}$$

83

Força magnética num condutor percorrido por uma corrente

Consideremos dois exemplos de aplicação da expressão anterior:

Exemplo I

Consideremos um fio condutor curvo, que conduz uma corrente I e está num campo magnético externo uniforme, \vec{B}

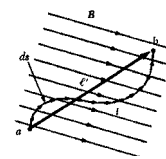
Uma vez que o campo é considerado constante, podemos escrever:

$$\vec{F} = I \times \vec{B} \times \int_a^b d\vec{S}$$

A soma de todos os vectores $d\vec{S}$ será igual ao vector \vec{l}' que está dirigido de a para b . Então

$$\vec{F} = I \times \vec{l}' \wedge \vec{B}$$

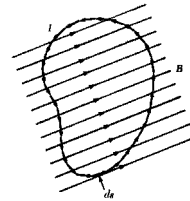
84



Força magnética num condutor percorrido por uma corrente

Exemplo II

Consideremos uma espira de forma arbitrária que conduz uma corrente I e está num campo magnético externo uniforme, \vec{B}



Uma vez que o campo é considerado constante, podemos escrever:

$$\vec{F} = I \times \vec{B} \times \oint d\vec{S}$$

A soma de todos os vectores $d\vec{S}$ será igual ao vector nulo. Sendo assim, $\vec{F} = 0$

A força magnética total exercida sobre qualquer espira de corrente fechada, num campo magnético uniforme é igual a zero.

85

Forças sobre partículas carregadas: o efeito de Hall

Edwin Hall descobriu que quando um condutor percorrido por uma corrente eléctrica é colocado numa região onde exista um campo magnético é gerada uma tensão na direcção perpendicular ao campo magnético.

Este fenómeno é conhecido como efeito de Hall e é uma consequência dos desvios das partículas carregadas para os lados do condutor, desvio esse, provocado pela força magnética que actua sobre cada partícula carregada.

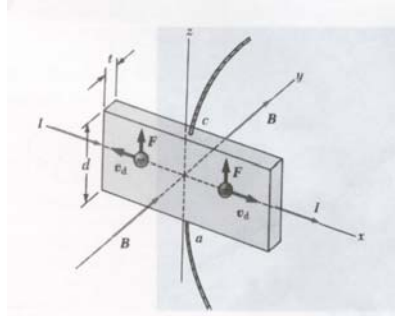
A análise dos dados experimentais permite obter informação acerca do sinal das partículas carregadas e sobre a respectiva densidade no condutor.

O efeito de Hall também proporciona uma técnica conveniente para a medição de campos magnéticos.

Para observarmos o efeito de Hall consideremos um condutor sob a forma de fita delgada, percorrido por uma corrente I , na direcção do eixo dos xx . Aplica-se também um campo magnético constante na direcção do eixo dos yy .

86

Forças sobre partículas carregadas: o efeito de Hall



Se as partículas carregadas forem electrões, que se movem na direcção negativa do eixo dos xx , com uma velocidade \vec{v}_d , cada qual irá sofrer uma força magnética \vec{F} para cima. Então os electrões serão desviados para cima e acumulam-se na parte superior do condutor, ficando um excesso de carga positiva na parte inferior.

87

Forças sobre partículas carregadas: o efeito de Hall

Esta acumulação de cargas nas partes inferior e superior do condutor irá acontecer até que o campo electrostático proveniente da separação das cargas equilibre a força magnética exercida sobre as partículas carregadas.

Quando esta situação se verificar os electrões deixarão de ser desviados. Aí podemos medir uma diferença de potencial provocada no condutor, conhecida como tensão de Hall, V_H .

No caso das partículas carregadas terem carga positiva e se deslocarem na direcção positiva do eixo dos xx , também sofrerão uma força magnética que apontará segundo o eixo dos zz .

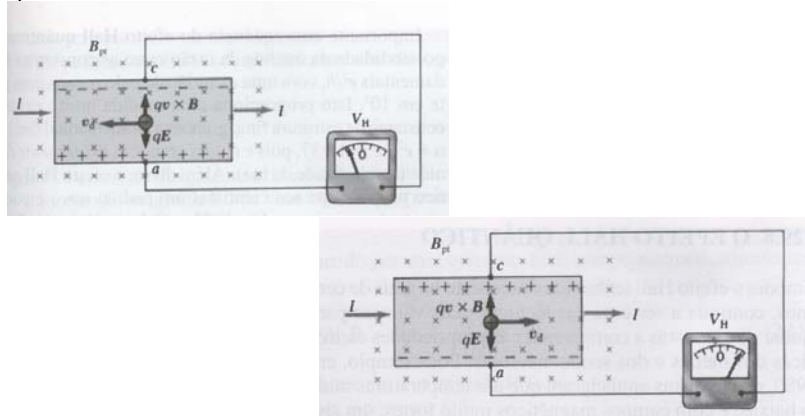
Esta força provoca um acumular de carga positiva na extremidade superior do condutor deixando um excesso de carga negativa superfície inferior. Então a tensão de Hall terá sinal oposto.

É possível determinar o sinal das partículas carregadas através da polaridade da tensão de Hall

88

Forças sobre partículas carregadas: o efeito de Hall

É possível determinar o sinal das partículas carregadas através da polaridade da tensão de Hall



89

Forças sobre partículas carregadas: o efeito de Hall

Agora interessa-nos determinar a expressão da tensão de Hall. Para tal temos em conta que, inicialmente, que a força magnética sobre as partículas carregadas tem o módulo $qv_d B$.

Em equilíbrio essa força é contrabalançada pela força electrostática qE_H , onde E_H é o campo eléctrico provocado pela separação das cargas de sinal contrário, chamado campo de Hall.

$$qv_d B = qE_H$$

$$E_H = v_d B$$

Sendo a largura do condutor, então a tensão de Hall será dada por

$$V_H = E_H d = v_d B d$$

90

Forças sobre partículas carregadas: o efeito de Hall

Podemos então concluir que a medida da tensão de Hall nos dá o valor da velocidade de migração das partículas carregadas se d e B forem conhecidos.

Sendo n o número de partículas carregadas por unidade de volume, o seu valor pode ser obtido pela medição da corrente. A velocidade de migração pode então ser expressa pela seguinte expressão, onde A é a área da secção recta do condutor.

$$v_d = \frac{I}{nqA}$$

Conjugando as duas últimas equações e atendendo a que $A=td$, podemos escrever:

$$V_H = \frac{IBd}{nqA}$$

ou

$$V_H = \frac{IB}{nqt}$$

91

Forças sobre partículas carregadas: o efeito de Hall

Esta última expressão mostra que podemos usar uma amostra calibrada de forma apropriada para medir um campo magnético desconhecido.

A grandeza $1/nq$ é chamada de coeficiente de Hall, R_H .

Uma vez que todas as grandezas que aparecem nesta última equação, excepto nq , podem ser medidas é fácil conseguir o valor do coeficiente de Hall.

O sinal e o módulo de R_H dão-nos o sinal das partículas carregadas e a respectiva densidade.

Na maior parte dos metais os portadores de carga são os electrões e as densidades de carga determinadas pelo efeito de Hall têm boa concordância com os valores calculados para os metais onde n é aproximadamente igual ao número de electrões de valência por unidade de volume.

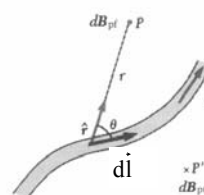
92

A lei de Biot-Savart

Pouco depois de se ter descoberto que uma agulha magnetizada era desviada por uma corrente eléctrica, Jean Baptiste Biot e Felix Savart descobriram que um condutor percorrido por uma corrente permanente exerce uma força sobre um íman.

As experiências realizadas permitiram chegar a uma expressão que dá o campo magnético num certo ponto do espaço, em termos da corrente que dá origem a esse mesmo campo.

A lei de Biot-Savart diz que se um fio condutor é percorrido por uma corrente constante de valor I , o campo magnético $d\vec{B}$ num ponto P associado a um elemento de condutor $d\vec{l}$, tem as seguintes propriedades:



93

A lei de Biot-Savart

1. O vector $d\vec{B}$ é perpendicular a $d\vec{l}$ (vector que aponta na direcção da corrente) e ao vector unitário \hat{r} , dirigido do elemento do condutor até ao ponto P , onde se pretende calcular o campo magnético.

2. O módulo de $d\vec{B}$ é inversamente proporcional a r^2 , onde r é a distância entre o elemento de condutor e o ponto P .

3. O módulo de $d\vec{B}$ é proporcional à corrente e ao comprimento dl do elemento do condutor.

4. O módulo de $d\vec{B}$ é proporcional ao $\sin\theta$, onde θ é o ângulo entre os vectores $d\vec{l}$ e \hat{r}

A lei de Biot-Savart pode ser descrita da seguinte forma:

$$d\vec{B} = k_m \frac{I d\vec{l} \wedge \hat{r}}{r^2}$$

94

A lei de Biot-Savart

Onde k_m é uma constante cujo valor é 10^{-7} Wb/A.m.

Esta constante também costuma escrever-se como $\frac{\mu_0}{4\pi}$, onde μ_0 é a permeabilidade do vácuo.

$$\mu_0 = 4\pi k_m = 4\pi \times 10^{-7} \text{ Wb/A} \cdot \text{m}$$

A lei de Biot-Savart pode ser escrita como:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \wedge \hat{r}}{r^2}$$

É de salientar que a lei de Biot-Savart nos dá o campo magnético num ponto para apenas um pequeno elemento de condutor.

95

A lei de Biot-Savart

Para encontrar o campo magnético total num determinado ponto, devido a um condutor de dimensões finitas, percorrido por corrente constante I , devemos fazer a soma de todos os campos magnéticos elementares criados pela corrente que passa em todos os elementos $d\vec{l}$ de condutor. O campo magnético total será dado pela integração da expressão anterior.

$$\vec{B} = \int d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\vec{l} \wedge \hat{r}}{r^2}$$

A integração é feita sobre todo o condutor.

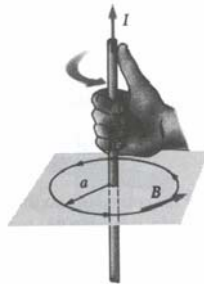
A expressão deve ser tratada com cuidado porque trata-se da integração de grandezas vectoriais.

96

A lei de Biot-Savart

Na figura seguinte está apresentada a regra da mão direita utilizada para determinar a direcção do campo magnético associado a um fio condutor rectilíneo, percorrido por uma corrente I .

As linhas de campo magnético são circunferências que envolvem o condutor.



97

A lei de Biot-Savart

Podemos verificar que existem semelhanças interessante entre a lei de Biot-Savart para o magnetismo e a lei de Coulomb para a electrostática.

1. Um elemento de corrente $I d\vec{l}$ produz um campo magnético, enquanto que uma carga q produz um campo eléctrico.

2. O módulo do campo magnético varia com o inverso do quadrado da distância ao elemento de corrente tal como varia o campo eléctrico de uma carga pontual.

Apesar disto, também se verifica que as direcções dos dois campos são muito diferentes:

O campo eléctrico provocado por uma carga pontual é radial e, no caso desta ser positiva, as linhas de campo saem da carga.

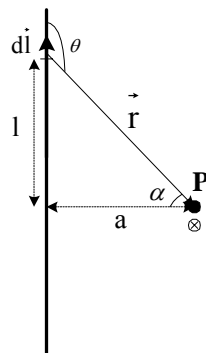
O campo magnético provocado por um elemento de corrente é perpendicular ao elemento de corrente e ao raio vector.

98

Exemplos de aplicação da lei de Biot-Savart

Fio longo rectilíneo

Vamos aplicar a lei de Biot-Savart ao cálculo do campo magnético devido a uma corrente I que percorre um fio longo rectilíneo.



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \wedge \hat{r}}{r^2}$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin\theta}{r^2} (-\hat{k})$$

$$(180 - \theta) + 90 + \alpha = 180 \Leftrightarrow \theta = 90 + \alpha$$

$$\sin\theta = \sin(90 + \alpha) = \cos\alpha$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \cos\alpha}{r^2} (-\hat{k})$$

99

Exemplos de aplicação da lei de Biot-Savart

Variável de integração: $\alpha \quad a = r \cos\alpha \Rightarrow r = \frac{a}{\cos\alpha}$

$$\frac{l}{a} = \operatorname{tg}\alpha \Rightarrow l = a \operatorname{tg}\alpha \quad \frac{dl}{d\alpha} = a \sec^2\alpha \Rightarrow dl = a \sec^2\alpha d\alpha$$

Limites de integração: $l = +\infty, \alpha = \frac{\pi}{2} \quad l = -\infty, \alpha = -\frac{\pi}{2}$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \sec^2\alpha d\alpha}{\frac{a^2}{\cos^2\alpha}} \cos\alpha (-\hat{k}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{a} \cos\alpha d\alpha (-\hat{k})$$

$$\vec{B} = \int d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{a} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\alpha d\alpha (-\hat{k}) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{a} (-\hat{k})$$

100

Exemplos de aplicação da lei de Biot-Savart

Através da equação anterior podemos concluir que o módulo do campo magnético é constante em todos os pontos situados à mesma distância do fio, ou melhor sobre qualquer círculo de raio a .

As linhas de campo são circunferências concêntricas com o fio condutor que estão num plano perpendicular a ele.

Na figura seguinte está representada uma vista tridimensional da direcção e sentido do campo magnético devido a um condutor rectilíneo e infinito percorrido por uma corrente I .

Uma regra conveniente para determinar a direcção e sentido do campo magnético consiste em agarrar o condutor com a mão direita, com o polegar a apontar na direcção da corrente eléctrica. Os quatro dedos irão curvar-se na direcção e sentido do campo magnético.

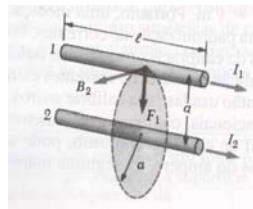


101

Força entre condutores paralelos

Vimos anteriormente que um condutor percorrido por uma corrente eléctrica gera um campo magnético, daí ser fácil perceber que dois condutores que estão a ser percorridos por correntes exerçam forças magnéticas um sobre o outro.

Consideremos então dois fios condutores rectilíneos, compridos, paralelos, separados por uma distância a a serem percorridos pelas correntes I_1 e I_2 , ambas com o mesmo sentido.



102

Força entre condutores paralelos

Facilmente se pode determinar a força que actua sobre um dos condutores, originada pelo outro condutor.

O fio 2, percorrido pela corrente I_2 , gera um campo magnético \vec{B}_2 na posição onde está o fio 1.

\vec{B}_2 é perpendicular ao fio e a força magnética exercida sobre o comprimento $d\vec{l}$ do fio 1 é

$$d\vec{F}_1 = I_1 d\vec{l} \wedge \vec{B}_2$$

A força total exercida sobre o fio 1 é então:

$$\vec{F}_1 = \int d\vec{F}_1 = \int I_1 d\vec{l} \wedge \vec{B}_2 = I_1 \int d\vec{l} \wedge \vec{B}_2 = I_1 l B_2 \left(-\hat{j} \right)$$

Atendendo a que o campo no fio 2 é dado pela expressão $B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi a}$

103

Força entre condutores paralelos

A força total exercida sobre o fio 1 será dada pela expressão:

$$F_1 = I_1 l B_2 = I_1 l \left(\frac{\mu_0 I_2}{2\pi a} \right) = \frac{l \mu_0 I_1 I_2}{2\pi a}$$

O sentido desta força está indicado na figura anterior.

Podemos rescrever esta expressão em termos de uma força por unidade de comprimento, na forma seguinte:

$$\frac{F_1}{l} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a}$$

104

Força entre condutores paralelos

Se analisarmos o campo magnético provocado pelo fio 1 na região onde se encontra o fio 2, iremos verificar que a força \vec{F}_2 , que actua sobre o fio 2 será igual mas de sentido oposto à força \vec{F}_1 . Assim verifica-se o princípio da acção e reacção.

Quando as correntes têm sentidos opostos, as forças invertem os sentidos e os condutores repelem-se mutuamente.

Podemos então concluir que condutores paralelos, percorridos por correntes com o mesmo sentido atraem-se mutuamente, enquanto que condutores paralelos com correntes em sentidos contrários se repelem mutuamente.

105

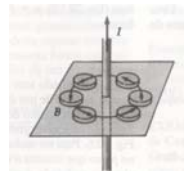
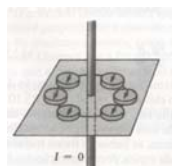
A lei de Ampère

Como já foi dito anteriormente, um condutor percorrido por uma corrente eléctrica gera um campo magnético. Se colocarmos várias bússolas num plano horizontal, nas vizinhanças de um condutor vertical infinito, verifica-se o seguinte:

1. Quando não há corrente no fio todas as bússolas apontam na direcção do campo magnético terrestre.

2. Se o fio for percorrido por uma corrente constante, forte, todas as bússolas se desviam numa direcção tangente a um círculo em torno do fio (direcção dada pela regra da mão direita).

Quando a corrente for invertida, os desvios das bússolas também serão invertidos.



106

A lei de Ampère

Uma vez que as agulhas das bússolas apontam na direcção do campo magnético, concluímos que estas são círculos à volta do fio, como também já foi dito anteriormente. Por simetria o módulo do campo magnético é constante em qualquer ponto de um círculo centrado no fio que esteja num plano perpendicular a este. Verificou-se ainda que o campo magnético é proporcional à corrente que percorre o fio e inversamente proporcional à distância ao fio.

Vamos agora calcular o produto $\vec{B} \cdot d\vec{l}$ e somar esses produtos internos sobre uma curva circular centrada no fio. Sobre essa curva ambos os vectores são paralelos entre si em cada ponto, de modo a que

$$\vec{B} \cdot d\vec{l} = B \times dl \times \cos 0 = B \times dl$$

Além disso é de salientar que o campo magnético tem módulo constante ao longo de todo o percurso .

107

A lei de Ampère

Assim a soma destes produtos internos ao longo da curva fechada é dada pelo integral pelo seguinte integral de linha:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint B \times dl = B \oint dl = B \times 2\pi r = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \times 2\pi r = \mu_0 I$$

Este resultado, conhecido como a Lei de Ampère, foi obtido para o caso particular de um círculo envolvendo um fio. No entanto, pode ser aplicado ao caso geral em que uma curva fechada arbitrária é atravessada por uma corrente constante.

A lei de Ampère afirma que o integral de linha do campo magnético ao longo de qualquer curva fechada é igual a $\mu_0 I$, onde I é a corrente constante total que passa por qualquer superfície limitada pela curva fechada.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

108

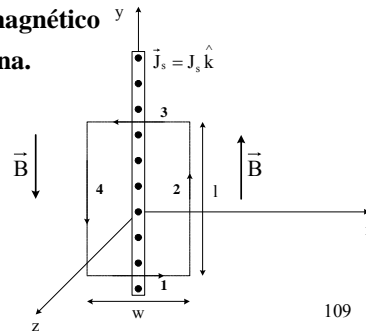
A lei de Ampère

Exemplo de aplicação

Consideremos uma folha condutora infinita, situada no plano xy, com uma densidade superficial de corrente $\vec{J}_s = J_s \hat{k}$. J_s representa a corrente por unidade de comprimento medida ao longo do eixo dos yy.

Pretende-se determinar o campo magnético nas vizinhanças dessa corrente plana.

Para calcular o integral de linha consideramos o percurso como sendo um rectângulo que envolve a folha condutora.



109

A lei de Ampère

A corrente que atravessa a superfície definida pelo rectângulo é $I = J_s \times l$ ou seja, corrente por unidade de comprimento multiplicada pelo comprimento do rectângulo.

Assim pode-se escrever: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I = \mu_0 J_s l$

$$\int_1 \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_2 \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_3 \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_4 \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 J_s l$$

$$\int_1 B dl \cos 90^\circ + \int_2 B dl \cos 0^\circ + \int_3 B dl \cos 90^\circ + \int_4 B dl \cos 0^\circ = \mu_0 J_s l$$

$$\int_2 B dl \cos 0^\circ + \int_4 B dl \cos 0^\circ = \mu_0 J_s l \Leftrightarrow 2 \int_2 B dl = \mu_0 J_s l$$

$$2B \int_2 dl = \mu_0 J_s l \Leftrightarrow 2Bl = \mu_0 J_s l \Leftrightarrow B = \mu_0 \frac{J_s}{2}$$

110

A lei de Ampère

O resultado mostra que o campo magnético é independente da distância à corrente plana.

Na realidade o campo magnético é uniforme e em qualquer ponto paralelo ao plano da corrente.

Este facto é aceitável por estarmos a considerar uma folha infinita percorrida por corrente.

Pode-se estabelecer, mais uma vez, uma analogia ao campo eléctrico uniforme associado a uma folha infinita carregada.

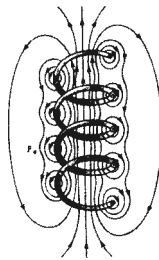
111

Campo magnético de um solenóide

Um solenóide é constituído por um fio condutor comprido, enrolado sob a forma de hélice.

Com esta configuração é possível obter um campo magnético razoavelmente uniforme num pequeno volume no interior do solenóide, caso as espiras estejam suficientemente juntas.

Se as espiras forem muito espaçadas, cada qual pode ser encarada como uma espira circular e o campo magnético resultante é igual à soma vectorial dos campos devidos a cada uma delas.



112

Campo magnético de um solenóide

Podemos observar que as linhas de campo no interior da bobine não quase paralelas, estão distribuídas de forma quase uniforme e são muito aproximadas umas das outras.

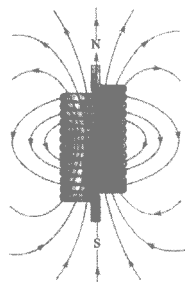
Isto indica que o campo magnético no interior de um solenóide pode ser considerado uniforme, uma vez que as linhas de campo entre as espiras tendem a anular-se mutuamente.

No exterior do solenóide, pois o campo devido aos elementos de corrente da parte de cima do solenóide tende a ser cancelado pelos elementos de corrente da parte de baixo.

No caso de considerarmos um solenóide de comprimento finito, cujas espiras estejam muito juntas, o comportamento das linhas de campo já é diferente e está apresentado na figura seguinte.

113

Campo magnético de um solenóide



Neste caso as linhas de campo divergem de uma extremidade e convergem na outra extremidade, evidenciando a semelhança entre este campo e o campo provocado por uma barra magnetizada. Uma extremidade do solenóide comporta-se como pólo norte de um ímã e a outra como o pólo sul.

114

Campo magnético de um solenóide

À medida que o comprimento do solenóide aumenta, o campo magnético no seu interior fica cada vez mais uniforme, aproximando-se de um solenóide ideal, que possui as espiras muito juntas e o comprimento grande quando comparado com o raio das espiras. Neste caso, o campo magnético no exterior é muito fraco quando comparado com o campo no interior, onde é uniforme numa região de grande volume.

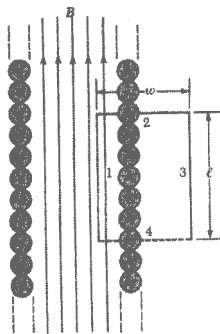
Para obter a expressão do campo magnético no interior de um solenóide ideal, podemos utilizar a lei de Ampère.

No caso do solenóide ideal, o campo no interior é uniforme e paralelo ao respectivo eixo e no exterior é nulo.

Consideremos então um percurso rectangular de comprimento l e largura w , para aplicarmos a Lei de Ampère, de acordo com a figura seguinte.

115

Campo magnético de um solenóide



A contribuição do lado 3 é nula, pois no exterior o campo é nulo.

As contribuições dos lados 2 e 4 também são ambas nulas, pois o vector campo magnético é perpendicular ao vector deslocamento sobre esses lados.

116

Campo magnético de um solenóide

$$\text{Assim, } \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_1 B dl = B \int_1 dl = Bl$$

O segundo membro da lei de Ampère envolve a corrente total que atravessa a área limitada pela curva utilizada para calcular o integral de linha. Neste caso, a corrente total que atravessa a área limitada pelo rectângulo é igual à corrente em cada espira vezes o número de espiras.

Se N for o número de espiras contidas no comprimento l, a corrente total através do rectângulo é igual a NI.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = Bl = \mu_0 NI$$

$$B = \mu_0 \frac{N}{l} I = \mu_0 nI$$

Onde n é o número de espiras por unidade de comprimento.

117

Fluxo magnético

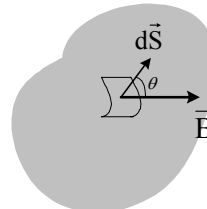
O fluxo associado ao campo magnético define-se de maneira semelhante à adoptada para definir fluxo eléctrico.

Consideremos um elemento de superfície dS. Se o campo magnético nesse elemento for \vec{B} então o fluxo magnético através do elemento é $\vec{B} \cdot d\vec{S}$

$d\vec{S}$ é um vector perpendicular à superfície cujo módulo é igual à área dS.

O fluxo magnético através da superfície é dado por:

$$\Phi_m = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int B \times dS \times \cos \theta$$



118

A Lei de Gauss do Magnetismo

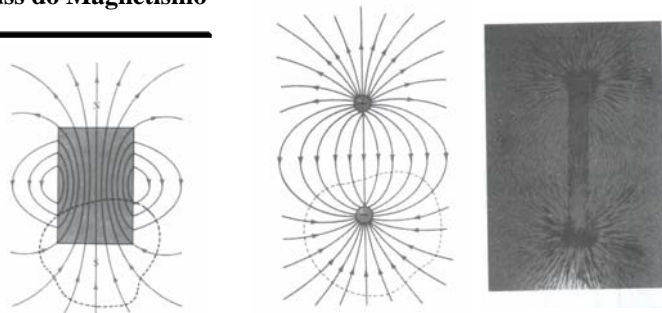
Vimos anteriormente que o fluxo de campo eléctrico através de uma superfície fechada era proporcional à carga envolvida por essa superfície, ou seja, o número de linhas de campo eléctrico que atravessam a superfície fechada dependem somente da carga que se encontra no interior da superfície. Isto pelo facto das linhas de campo terem origem em cargas eléctricas.

A situação é bastante diferente nos campos magnéticos, onde as linhas são contínuas e são curvas fechadas. As linhas de campo magnético provocado por uma corrente não tem início nem fim em nenhum ponto, mas fecham-se sobre si próprias.

Assim podemos ver facilmente que para qualquer superfície fechada o número de linhas que entram na superfície é igual ao número de linhas que sai dessa mesma superfície, sendo, portanto, o fluxo magnético nulo.

119

A Lei de Gauss do Magnetismo



Mais uma vez se verifica uma situação que contrasta com o que se passa em campo eléctrico. Neste caso, o fluxo eléctrico associado à superfície que envolve uma das cargas do dipolo eléctrico não é nulo.

No caso do campo magnético, como nunca foram observados pólos magnéticos isolados, pode-se dizer que o fluxo magnético através de qualquer superfície fechada é sempre nulo, pois as únicas fontes de campo magnético são os dipolos magnéticos.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

120

Magnetismo na matéria

Como sabemos, a matéria é constituída por átomos. Estes compõem-se de um núcleo central, carregado positivamente, em torno do qual rodam os electrões. Além deste movimento orbital em torno do núcleo, os electrões rodam em torno de um eixo que passa pelo seu centro. Este movimento é conhecido como spin.

A carga eléctrica em movimento origina uma corrente, pelo que o movimento orbital dos electrões origina uma corrente circular, que, por sua vez, origina um momento magnético. De forma análoga, o movimento de spin do electrão também origina um momento magnético.

Verifica-se assim a presença de dois momentos magnéticos, um orbital e outro de spin.

121

Magnetização e intensidade de campo magnético

O estado magnético de um corpo descreve-se através de uma grandeza chamada vector magnetização, \vec{M} . O módulo deste vector é igual ao momento magnético por unidade de volume do corpo. É de notar que o campo magnético no interior do corpo depende do campo magnético externo e da magnetização do corpo.

Vamos imaginar uma região do espaço, onde existe um campo magnético \vec{B}_0 provocado por um condutor percorrido por uma corrente, tal como no interior de uma bobine. Se enchermos essa região com uma substância magnética, o campo total nessa região será dado por:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_m$$

\vec{B}_m é o campo provocado pela magnetização da substância.

122

Magnetização e intensidade de campo magnético

Esta contribuição pode ser expressa em termos do vector magnetização através da expressão seguinte:

$$\vec{B}_m = \mu_0 \vec{M}$$

O campo total na substância fica

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \mu_0 \vec{M}$$

Atendendo que a intensidade de campo magnético, \vec{H} , é uma grandeza vectorial, definida pela relação

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

123

Magnetização e intensidade de campo magnético

Consideremos um exemplo prático:

Imaginemos o interior de uma bobine toroidal percorrida por uma corrente I. se nessa região existir apenas vácuo, $\vec{M} = 0$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}$$

Uma vez que no interior da bobine $B_0 = \mu_0 n I$, em que n é o número de espiras por unidade de comprimento, então $H = n I$. A intensidade de campo magnético no interior da bobine deve-se à corrente no enrolamento.

Se o núcleo da bobine for cheio com alguma substância, mantendo-se a corrente I constante, \vec{H} também permanece constante. Porém o campo total \vec{B} altera-se devido à magnetização da substância.

124

Magnetização e intensidade de campo magnético

Numa grande parte de substâncias, paramagnéticas e diamagnéticas, o vector magnetização é proporcional ao vector intensidade de campo magnético, sendo a constante de proporcionalidade denominada de susceptibilidade magnética.

$$\vec{M} = \chi \vec{H}$$

Se a substância for paramagnética, χ será positivo e o vector magnetização terá o mesmo sentido que o vector intensidade de campo magnético.

Se a substância for diamagnética, χ será negativo e o vector magnetização terá sentido contrário ao vector intensidade de campo magnético.

É importante observar que nas substâncias ferromagnéticas, não existe esta relação linear.

125

Magnetização e intensidade de campo magnético

Podemos ainda escrever:

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 (\vec{H} + \chi \vec{H}) = \mu_0 (1 + \chi) \vec{H}$$

$$\vec{B} = k_m \vec{H}$$

A constante k_m representa a permeabilidade da substância.

É possível classificar as substâncias em termos do valor da permeabilidade k_m relativamente à permeabilidade do vácuo μ_0 , de acordo com os seguintes critérios:

substância paramagnética $k_m > \mu_0$

substância diamagnética $k_m < \mu_0$

substância ferromagnética $k_m \gg \mu_0$

126

Ferromagnetismo

Existem diversos materiais, como o ferro, o cobalto, o níquel, etc, que são fortemente magnetizáveis.

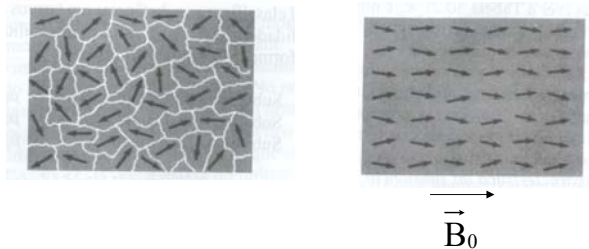
Estes materiais têm momentos magnéticos atômicos que têm tendência para se alinharem paralelamente uns aos outros, mesmo na presença de um campo exterior fraco. Uma vez alinhados os momentos, o material permanece magnetizado, mesmo depois do campo magnético ser retirado. Este alinhamento permanente deve-se a uma forte ligação dos momentos vizinhos, explicável através da mecânica quântica.

Numa amostra desmagnetizada os domínios estão orientados ao acaso, pelo que o momento magnético resultante é igual a zero.

Quando a amostra é colocada numa região onde existe um campo magnético, os domínios tendem a alinhar-se com o campo, rodando ligeiramente e dando origem a uma amostra magnetizada.

127

Ferromagnetismo

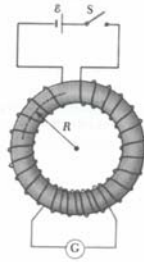


Quando o campo magnético for retirado, a amostra poderá reter uma magnetização efectiva na direcção do campo original.

128

Ferromagnetismo

Uma montagem experimental típica para medir as propriedades magnéticas de um material ferromagnético está apresentada a seguir.



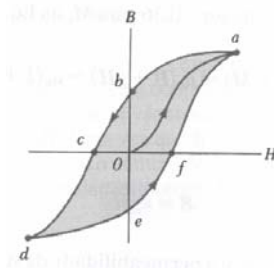
Esta montagem é constituída por uma amostra toroidal em torno da qual se enrolam N espiras de fio condutor. Uma bobine secundária é ligada a um galvanômetro para medir o fluxo magnético.

129

Ferromagnetismo

Consideremos que o núcleo da bobine é constituído por ferro desmagnetizado.

Se a corrente no enrolamento aumentar até I , a intensidade do campo, H , aumenta linearmente com I , através da expressão $H=nI$. Além disso, o módulo do campo total, B , também aumenta com o aumento da corrente segundo a figura apresentada a seguir.



130

Ferromagnetismo

No ponto O, os domínios estão orientados ao acaso, o que corresponde a $B_m=0$. À medida que o campo exterior aumenta, os domínios vão-se alinhando até que no ponto a estão quase todos alinhados. Aqui o núcleo de ferro está próximo da saturação, situação que ocorre quando todos os domínios estão alinhados na mesma direcção.

Se a corrente for reduzida a zero, eliminando-se assim o campo exterior, a curva de magnetização segue o percurso ab. É de notar que em b o campo magnético não é nulo, embora o campo externo o seja, porque no núcleo de ferro existe magnetização devido a um grande número de domínios ainda estarem alinhados. No ponto b dizemos que o ferro tem uma magnetização remanescente.

Se invertermos a direcção do campo exterior, os domínios reorientam-se até que a amostra fique desmagnetizado. É o que acontece no ponto c.

131

Ferromagnetismo

A continuação do aumento da corrente invertida, faz com que o ferro fique magnetizado na direcção oposta, aproximando-se da saturação no ponto d.

Quando a corrente volta a zero e depois começa a aumentar com sentido positivo, repete-se a sequência dos acontecimentos. A curva de magnetização segue o percurso def.

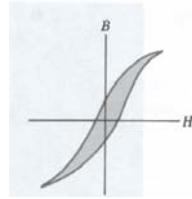
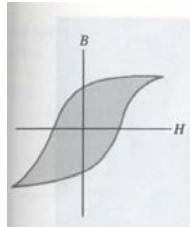
Se a corrente crescer suficientemente a curva de magnetização volta ao ponto a, onde o material passa a ter novamente magnetização máxima.

A este ciclo assim descrito chama-se histerese magnética.

A forma e o tamanho deste ciclo histerético depende das propriedades do material ferromagnético e da intensidade máxima de campo aplicado.

132

Ferromagnetismo



O primeiro ciclo diz respeito a um material ferromagnético duro, que possui uma magnetização remanescente elevada. É difícil desmagnetizar estes materiais através de um campo externo.

O segundo caso diz respeito a um material “doce”, como por exemplo o ferro, que possui um ciclo muito estreito e uma magnetização remanescente relativamente baixa. Estes materiais são magnetizados e desmagnetizados com facilidade

133

Ferromagnetismo

A curva do ciclo de histerese tem uma outra utilidade.

A área limitada pelo ciclo de histerese representa o trabalho realizado para o material descrever o ciclo. A energia adquirida pelo material durante o processo de magnetização é fornecida pela fonte que alimenta o circuito da bobine toroidal.

Quando se repete o ciclo de magnetização os processos dissipativos no interior do material, devido à reorganização, fazem com que a energia magnética se transforme em energia térmica interna, elevando assim a temperatura do material.

Por esta razão os equipamentos que estão sujeitos a campos magnéticos alternados, como por exemplo os transformadores, utilizam materiais ferromagnéticos com ciclos de histerese estreitos de modo a reduzir as perdas de energia por ciclo.

134

A Lei de Faraday

Até aqui temos vindo a estudar campos eléctricos provocados por cargas estacionárias e campos magnéticos produzidos por cargas em movimento. A partir de aqui vamos tratar de campos eléctricos que dão origem a campos magnéticos variáveis.

As experiências conduzidas por Michael Faraday mostraram que era possível induzir uma corrente eléctrica num circuito através da variação de um campo magnético.

Os resultados destas experiências levaram à formulação de uma lei básica, mas importante do electromagnetismo, conhecida como a lei da indução de Faraday.

Essa lei diz que o módulo da força electromotriz induzida num circuito é igual à variação do fluxo magnético em ordem ao tempo.

Com o tratamento da Lei de Faraday ficam completas as leis fundamentais do electromagnetismo.

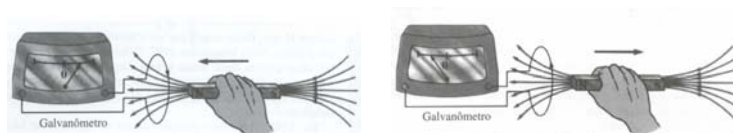
135

A Lei de Faraday da indução

Comecemos por escrever duas experiências simples que demonstram que uma corrente pode ser gerada por um campo magnético variável.

Imaginemos uma espira de fio condutor, ligada a um amperímetro (aparelho que mede intensidade de corrente eléctrica num circuito)

Quando aproximamos o íman da espira, verificamos que o ponteiro se desloca num dado sentido. Se afastarmos o íman a agulha desloca-se em sentido oposto. Se não se verificar movimento do íman também não há deslocamento da agulha do aparelho. Por último, se o íman não se deslocar, mas a espira se afastar ou aproximar, a agulha também irá sofrer um deslocamento.



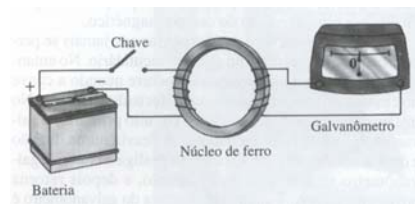
136

A Lei de Faraday da indução

Podemos então concluir que existe uma corrente no circuito desde que exista movimento relativo entre íman e bobine, embora não existam baterias ligadas ao circuito. Dizemos então que a corrente é uma corrente induzida, gerada por uma força electromotriz induzida.

Vamos agora descrever uma outra experiência realizada por Faraday, cuja montagem está apresentada a seguir.

As bobines possuem um núcleo de ferro de modo a intensificar o campo magnético no seu interior, gerado pela corrente que nelas circula. A bobine do lado esquerdo chamamos bobine primária e à outra chamamos bobine secundária.



137

A Lei de Faraday da indução

No instante em que se fecha o circuito primário, verifica-se que o ponteiro do aparelho ligado ao circuito secundário se desvia num determinado sentido e depois retorna a zero. Quando se abre o circuito primário, verifica-se o ponteiro se desvia em sentido contrário e depois volta a zero. Quando existe uma corrente constante no circuito, a corrente a leitura do aparelho é nula.

Como consequência destas observações, Faraday conclui que uma corrente eléctrica pode ser produzida por um campo magnético variável.

O aparecimento de corrente no circuito secundário acontece durante o instante em que o campo magnético através da bobine secundária varia, comportando-se como se existisse uma fonte ligada a ele durante um curto intervalo de tempo.

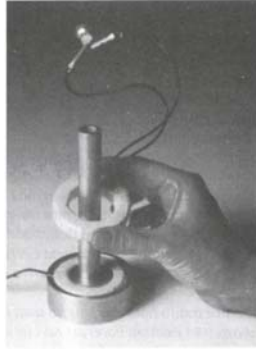
Estas experiências têm em comum o aparecimento de uma força electromotriz induzida no circuito quando há alteração do fluxo magnético em função do tempo.

138

A Lei de Faraday da indução

Podemos também demonstrar a indução electromagnética através da montagem apresentada a seguir.

Se aplicarmos uma tensão alternada à bobine de baixo é induzida uma tensão à bobine de cima e a lâmpada que está ligada ao circuito desta bobine acende.



139

A Lei de Faraday da indução

A força electromotriz induzida num circuito é directamente proporcional à variação do fluxo magnético com o tempo através do circuito, ou seja, a lei de Faraday da indução pode ser descrita de acordo com a expressão:

$$\varepsilon = - \frac{d\Phi_m}{dt}$$

Onde Φ_m é o fluxo magnético que atravessa o circuito e pode ser expresso da forma seguinte.

$$\Phi_m = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

140

A Lei de Faraday da indução

Se o circuito for uma bobine constituída por N espiras todas com a mesma área e se o fluxo atravessa igualmente todas as espiras, a força electromotriz induzida é dada por

$$\varepsilon = -N \frac{d\Phi_m}{dt}$$

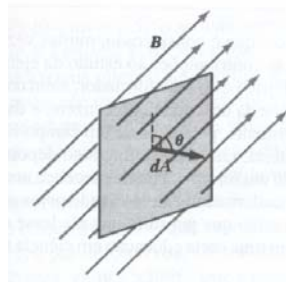
O sinal negativo é consequência da lei de Lenz que será discutido posteriormente.

Suponhamos um campo magnético uniforme sobre uma espira de área A, como mostra a figura. A força electromotriz induzida será dada de acordo com a expressão

$$\varepsilon = -\frac{d}{dt} BA \cos \theta$$

141

A Lei de Faraday da indução



Através desta expressão vemos que é possível induzir uma força electromotriz num circuito de diversas maneiras:

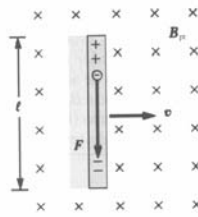
1. Variar o módulo do campo magnético com o tempo
2. Variar a área do circuito com o tempo
3. Variar o ângulo entre o campo magnético e a normal ao plano da espira.
4. Qualquer combinação destas condições.

142

A força electromotriz de movimento

Vamos descrever a força electromotriz de um condutor que se move num campo magnético, fem de movimento.

Consideremos um condutor rectilíneo, de comprimento l , que se move com velocidade constante através de um campo magnético uniforme, de forma perpendicular a este, como mostra a figura.



Os electrões do condutor sofrem uma força $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$

143

A força electromotriz de movimento

Sob a influência desta força, os electrões movem-se para a extremidade de baixo do condutor, acumulando-se lá ficando a parte de cima com excesso de carga positiva, provocando o aparecimento de um campo eléctrico no interior do condutor.

A acumulação de cargas nas duas extremidades continua até que a força magnética seja equilibrada pela força magnética.

$$qE = qvB \quad \text{ou} \quad E = vB$$

$$V = El = Bvl$$

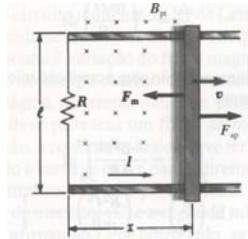
Podemos concluir que há uma diferença de potencial constante no condutor enquanto este estiver em movimento através da região onde existe o campo magnético.

Se o movimento for invertido, a polaridade de V também será invertida.

144

A força electromotriz de movimento

Para mostrar como a variação do fluxo magnético pode provocar uma corrente induzida num circuito fechado, consideramos que o condutor móvel é parte desse circuito, como mostra a figura.



À medida que a barra for puxada para a direita pela acção da força aplicada, as cargas livres da barra irão sofrer uma força magnética ao longo do comprimento da barra. Esta força, por sua vez, provoca uma corrente induzida no circuito fechado.

145

A força electromotriz de movimento

O fluxo magnético externo é dado por $\Phi_m = Blx$

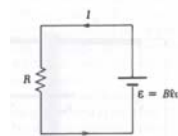
Através da lei de Faraday, podemos dizer

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d(Blx)}{dt} = -Bl \frac{dx}{dt} \quad \varepsilon = -Blv$$

Sendo R a resistência do circuito, a corrente induzida será dada por

$$I = \frac{|\varepsilon|}{R} = \frac{Blv}{R}$$

O circuito eléctrico equivalente a este exemplo é o seguinte:



146

A lei de Lenz

A lei de Lenz diz que a polaridade da força electromotriz induzida, é tal que ela tende a provocar o aparecimento de uma corrente que irá gerar um fluxo magnético que se opõe à variação do fluxo magnético através do circuito fechado (fluxo magnético que induziu a força electromotriz).

A corrente induzida tende a manter o fluxo original através do circuito e a anular a sua variação.

A interpretação desta lei depende das circunstâncias, uma vez que ela é uma consequência da lei da conservação da energia.

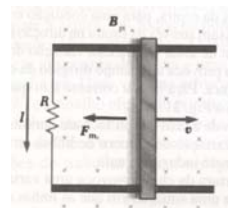
De modo a compreendermos melhor a lei de Lenz, retomamos o exemplo anterior da barra que se desloca para a direita sobre dois trilhos paralelos, na presença de um campo magnético uniforme.

147

A lei de Lenz

Quando a barra se move para a direita, o fluxo magnético através do circuito aumenta com o tempo, pois a área deste também aumenta com o tempo.

A lei de Lenz afirma que a corrente induzida deve ter o sentido, de modo que o fluxo que ela gera se oponha à variação do fluxo magnético externo.

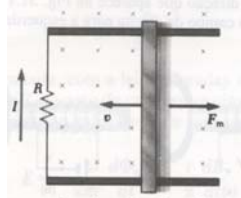


Como o fluxo do campo externo cresce no sentido do campo magnético, a corrente induzida, para se opor a esse crescimento, deve provocar um fluxo em sentido contrário dentro do circuito. Para tal a corrente induzida deve ter o sentido contrário aos ponteiros do relógio, quando a barra se desloca para a direita.

148

A lei de Lenz

No caso da barra deslizar para a esquerda, o fluxo magnético através do circuito diminui com o tempo, uma vez que a área deste também diminui com o tempo.



Como o fluxo do campo externo decresce no sentido do campo magnético, a corrente induzida, deve provocar um fluxo no mesmo sentido, dentro do circuito, de modo a compensar essa variação negativa do fluxo magnético. Para tal a corrente induzida deve ter o sentido dos ponteiros do relógio, quando a barra se desloca para a esquerda.

Em qualquer caso a corrente induzida tende a manter o fluxo magnético original através do circuito.

149

A lei de Lenz

Se analisarmos esta situação do ponto de vista da energia, verificamos o seguinte:

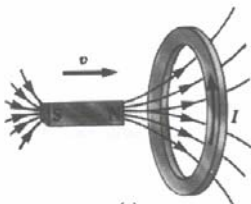
Imaginemos que a barra sofre um pequeno empurrão para a direita. Este movimento da barra provoca o aparecimento de uma corrente no circuito com sentido contrário aos ponteiros do relógio. Se a corrente tivesse o sentido dos ponteiros do relógio, a direcção da força magnética sobre a barra seria para a direita, o que provocaria uma aceleração da barra e um aumento da sua velocidade. Assim, a área do circuito aumentaria ainda mais rapidamente, o que provocaria um aumento da corrente induzida, que por sua vez o aumento da força magnética e assim sucessivamente.

Em termos físicos estamos a dizer que o sistema esta a adquirir energia sem que esta lhe estivesse a ser fornecida. Este efeito não é coerente com a lei da conservação da energia nem com os resultados experimentais que temos vindo a estudar, pelo que podemos concluir que a corrente deve ter sentido contrário ao dos ponteiros do relógio.

150

A lei de Lenz

Podemos fazer o mesmo tipo de análise, mas considerando uma outra situação, em que aproximamos um íman de uma espira condutora fixa pela direita, de acordo com a figura apresentada a seguir.

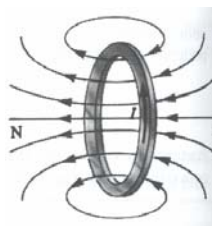


À medida que o íman se aproxima da espira condutora, o fluxo magnético através dela aumenta com o tempo. A corrente induzida irá gerar um outro fluxo magnético que se opõe a esse aumento, ou seja irá provocar um fluxo para a esquerda.

151

A lei de Lenz

A direcção da corrente será a apresentada na figura ao lado.



Podemos verificar que as linhas de campo gerado pela corrente induzida se opõem ao movimento do íman. Assim a face esquerda da espira comporta-se como sendo o pólo norte e a face direita como se fosse o pólo sul.

Por outro lado, se o íman se deslocar para a esquerda, o fluxo através da espira irá diminuir com o tempo, embora o seu sentido se mantenha. Nessas circunstâncias, a corrente induzida na espira terá um sentido tal que provocará um campo através da espira dirigido da esquerda para a direita, num esforço de manter constante o número de linhas de fluxo, tendo portanto sentido oposto ao da figura anterior. A face esquerda seria o pólo sul e a direita o pólo norte.

152

As equações de Maxwell

Podemos encarar as equações de Maxwell como sendo a base de todos os fenómenos eléctricos e magnéticos.

Para começar apresentamos estas equações aplicadas ao vácuo, ou seja, na ausência de qualquer material dieléctrico ou magnético.