1. $Q_1 = +10\,\mu C, Q_2 = -15\,\mu C, Q_3 = -10\,\mu C, Q_4 = +15\,\mu C$

a)

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4$$

$$\vec{r}_1 = (0i + 0j) - (0i + 1j) = -1j \Rightarrow \|\vec{r}_1\| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1\,m$$

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{10\cdot 10^{-6}}{1}\frac{-1j}{1}\right) = -90000\,j\ (N/C)$$

$$\vec{r}_3 = (0i + 0j) - (1i + 0j) = -1i \Rightarrow \|\vec{r}_3\| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1\,m$$

$$\vec{E}_3 = 9\cdot 10^9\left(\frac{-10\cdot 10^{-6}}{1}\frac{-1i}{1}\right) = +90000i\ (N/C)$$

$$\vec{r}_4 = (0i + 0j) - (1i + 1j) = -1i - 1j \Rightarrow \|\vec{r}_4\| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}\,m$$

$$\vec{E}_3 = 9\cdot 10^9\left(\frac{15\cdot 10^{-6}}{(\sqrt{2})^2}\frac{-1i - 1j}{\sqrt{2}}\right) = -47730i - 47730\,j\ (N/C)$$

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4 = -90000\,j + 90000i - 47730i - 47730\,j$$

$$\vec{E} = 42270i - 137730j\ (N/C)$$

$$\|\vec{E}\| = \sqrt{42270^2 + (-137730)^2} = 144070\,(N/C)$$

b)

$$\vec{F}_{Q_3} = \vec{F}_{Q_1Q_3} + \vec{F}_{Q_2Q_3} + \vec{F}_{Q_4Q_3}$$

$$\vec{r}_{1,3} = (1i + 0\,j) - (0i + 1\,j) = 1i - 1\,j \Rightarrow \|\vec{r}_{1,3}\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2}$$

$$\vec{F}_{Q_1Q_3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{10\cdot 10^{-6}\cdot(-10\cdot 10^{-6})}{(\sqrt{2})^2}\frac{1i - 1j}{\sqrt{2}}\right) = -0.318i + 0.318\,j\,(N)$$

$$\vec{r}_{2,3} = (1i + 0\,j) - (0i + 0\,j) = 1i \Rightarrow \|\vec{r}_{2,3}\| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1\,m$$

$$\vec{F}_{Q_2Q_3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{(-15\cdot 10^{-6})\cdot(-10\cdot 10^{-6})}{1^2}\frac{1i}{1}\right) = 1.35i\,(N)$$

$$\vec{r}_{4,3} = (1i + 0\,j) - (1i + 1\,j) = -1\,j \Rightarrow \|\vec{r}_{4,3}\| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1\,m$$

$$\vec{F}_{Q_4Q_3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{(15\cdot 10^{-6})\cdot(-10\cdot 10^{-6})}{1^2}\frac{-1\,j}{1}\right) = 1.35\,j\,(N)$$

$$\vec{F}_{Q_3} = \vec{F}_{Q_1Q_3} + \vec{F}_{Q_2Q_3} + \vec{F}_{Q_4Q_3} = -0.318i + 0.318\,j + 1.35i + 1.35\,j$$

$$\vec{F}_{Q_3} = 1.032i + 1.668\,j$$

$$\|\vec{F}_{Q_3}\| = 1.96\,N$$

c)

$$\vec{r}_{1,A} = (0.5i + 0j) - (0i + 1j) = 0.5i - 1j \Rightarrow \|\vec{r}_{1,A}\| = \sqrt{0.5^2 + (-1)^2} = 1.12\ \text{m}$$

$$\vec{r}_{2,A} = (0.5i + 0j) - (0i + 0j) = 0.5i \Rightarrow \|\vec{r}_{1,A}\| = \sqrt{0.5^2 + 0^2} = 0.5\ \text{m}$$

$$\vec{r}_{3,A} = (0.5i + 0j) - (1i + 0j) = -0.5i \Rightarrow \|\vec{r}_{1,A}\| = \sqrt{(-0.5)^2 + 0^2} = 0.5\ \text{m}$$

$$\vec{r}_{4,A} = (0.5i + 0j) - (1i + 1j) = -0.5i - 1j \Rightarrow \|\vec{r}_{1,A}\| = \sqrt{(-0.5)^2 + (-1)^2} = 1.12\ \text{m}$$

$$V_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1}{r_{1,A}} + \frac{Q_2}{r_{2,A}} + \frac{Q_3}{r_{3,A}} + \frac{Q_4}{r_{4,A}}\right)$$

$$V_A = 9 \cdot 10^9 \left(\frac{10.10^{-6}}{1.12} + \frac{(-15.10^{-6})}{0.5} + \frac{(-10.10^{-6})}{0.5} + \frac{15.10^{-6}}{1.12}\right) = -249030\ \text{v}$$

$$\vec{r}_{1,B} = (0.5i + 0.5j) - (0i + 1j) = 0.5i - 0.5j \Rightarrow \|\vec{r}_{1,B}\| = \sqrt{0.5^2 + (-0.5)^2} = 0.7\ \text{m}$$

$$\vec{r}_{2,B} = (0.5i + 0.5j) - (0i + 0j) = 0.5i + 0.5j \Rightarrow \|\vec{r}_{1,B}\| = \sqrt{0.5^2 + 0.5^2} = 0.7\ \text{m}$$

$$\vec{r}_{3,B} = (0.5i + 0.5j) - (1i + 0j) = -0.5i + 0.5j \Rightarrow \|\vec{r}_{1,B}\| = \sqrt{(-0.5)^2 + 0.5^2} = 0.7\ \text{m}$$

$$\vec{r}_{4,B} = (0.5i + 0.5j) - (1i + 1j) = -0.5i - 0.5j \Rightarrow \|\vec{r}_{1,B}\| = \sqrt{(-0.5)^2 + (-0.5)^2} = 0.7\ \text{m}$$

$$V_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1}{r_{1,B}} + \frac{Q_2}{r_{2,B}} + \frac{Q_3}{r_{3,B}} + \frac{Q_4}{r_{4,B}}\right)$$

$$V_B = 9 \cdot 10^9 \left(\frac{10.10^{-6}}{0.7} + \frac{(-15.10^{-6})}{0.7} + \frac{(-10.10^{-6})}{0.7} + \frac{15.10^{-6}}{0.7}\right) = 0\ \text{v}$$

$$V_A - V_B = -249030 - 0 = -249030\ \text{v}$$

2.

a)

$$Q = \rho \cdot v \Leftrightarrow \rho = \frac{Q}{v}$$

$$v = \frac{4\pi r^3}{3}$$

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4\pi r^3}{3}} = \frac{2 \cdot 10^{-8}}{\frac{4\pi(0.05)^3}{3}} = 38.2\ \mu\text{C/m}^3$$

b)

r < a

$$\oint \vec{E} d\vec{s} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow \oint E ds = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow E 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow E 4\pi r^2 = \frac{\rho \frac{4\pi r^3}{3}}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} \Leftrightarrow E = \frac{12.73 \cdot 10^{-6}}{\varepsilon_0} r \text{ (N/C)}$$

r = a

$$E = \frac{12.73 \cdot 10^{-6}}{\varepsilon_0} \cdot 0.05 = \frac{636.5 \cdot 10^{-9}}{\varepsilon_0} \text{ (N/C)}$$

r > a

$$\oint \vec{E} d\vec{s} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow \oint E ds = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow E 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow E 4\pi r^2 = \frac{\rho \frac{4\pi r^3}{3}}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow E = \frac{\rho a^3}{3r^2\varepsilon_0} \Leftrightarrow E = \frac{1.59 \cdot 10^{-9}}{r^2 \varepsilon_0} \text{ (N/C)}$$

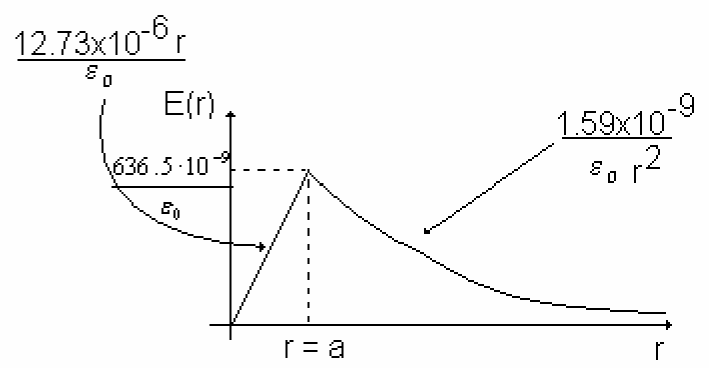
c)

$$P(r < a) = \int_r^\infty \vec{E} d\vec{r} = \int_r^\infty E dr = \int_r^a \frac{12.73 \cdot 10^{-6}}{\varepsilon_0} r\, dr + \int_a^\infty \frac{1.59 \cdot 10^{-9}}{\varepsilon_0 r^2} dr = \ldots\ , r < a$$

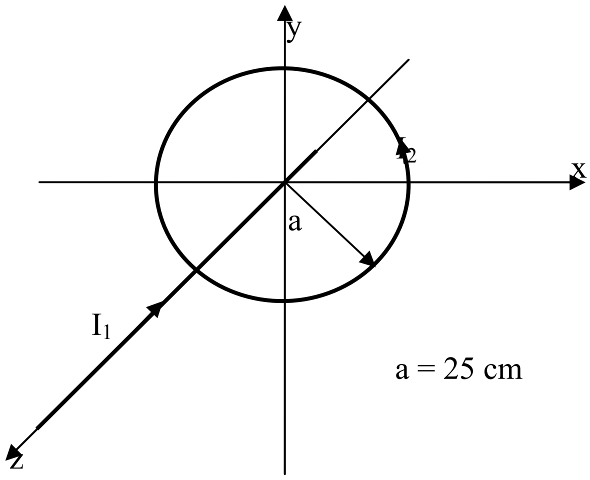
$$P(a = r) = \int_a^\infty \vec{E} d\vec{r} = \int_a^\infty E dr = \int_a^\infty \frac{1.59 \cdot 10^{-9}}{\varepsilon_0 r^2} dr = \ldots$$

$$P(a > r) = \int_r^\infty \vec{E} d\vec{r} = \int_r^\infty E dr = \int_r^\infty \frac{1.59 \cdot 10^{-9}}{\varepsilon_0 r^2} dr = \ldots\ , r > a$$

d)



3. Calcular o valor da força magnética na espira:



Da lei de Biot-Savart sabe-se que o campo magnético criado por um fio rectilíneo atravessado por uma corrente I_0, a uma distância a do fio tem módulo

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \times \frac{I_0}{a}$$

A direcção é tangente à circunferência de raio a a partir do fio.
Assim sendo, tem-se que o campo magnético e o elemento de percurso da corrente na espira têm a mesma direcção, pelo que o produto externo entre estes dois vectores é nulo, ou seja,

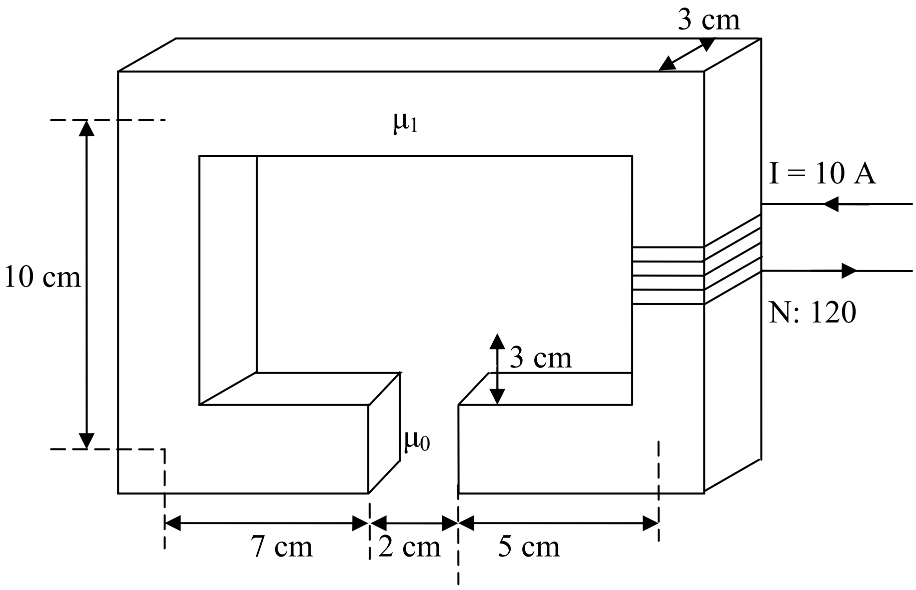
$$d\vec{l} \wedge \vec{B}_2 = \vec{0}$$

Assim, tem-se que o elemento da força magnética criada pelo fio a aplicada na espira é

$$d\vec{F} = I_2 \, d\vec{l} \wedge \vec{B}_1 = \vec{0}$$

$$\vec{F}_1 = \int d\vec{F} = \vec{0} \quad \text{(N)}$$

4. Calcular o fluxo magnético na região com μ_0:



$$\frac{B\times(7+10+14+10+5)\times10^{-2}}{\mu_1}+\frac{B\times2\times10^{-2}}{\mu_0}=N\times I$$

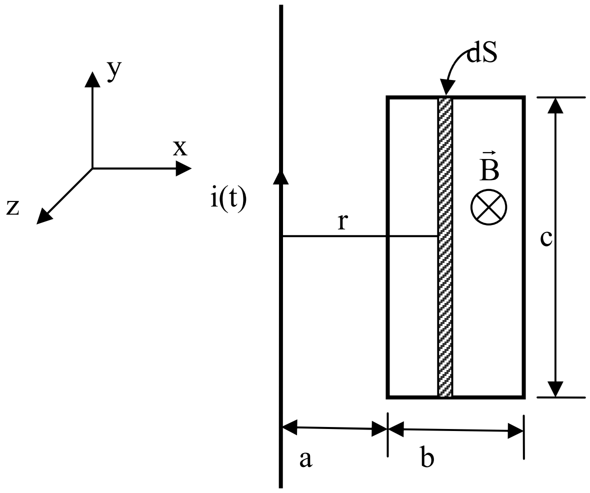
$$\frac{0{,}46\times B}{7000}+\frac{0{,}02\times B}{1}=120\times10\times\mu_0$$

$$B=75{,}15\times10^{-3}\ \text{T}$$

O fluxo, admitindo uma secção quadrada, com 3 cm de lado, vem:

$$\phi=B_{total}\times S=75{,}15\times10^{-3}\times(0{,}03)^2=67{,}64\times10^{-6}\ \text{Wb}$$

5. Calcular a força electromotriz no circuito:



Aqui, considere-se o sistema de eixos representado e usa-se a lei de Faraday e o que aconteceria com uma só espira.

$$dS = c \times dr$$

$$\vec{B}(t) = \frac{\mu_0}{2\pi} \times \frac{i(t)}{r}(-\hat{k}) = \frac{4\pi \times 10^{-7}}{2\pi} \times \frac{25\,\text{sen}(100\pi t + \pi)}{r}(-\hat{k})$$

$$d\vec{S} = dS\,\hat{k} \Rightarrow \vec{B} \cdot d\vec{S} = -B\,dS = -\frac{50 \times 10^{-7} \times \text{sen}(100\pi t + \pi)}{r} dS$$

$$\phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = -50 \times 10^{-7} \times \text{sen}(100\pi t + \pi) \times \int \frac{1}{r} dS$$

$$\phi = -50 \times 10^{-7} \times \text{sen}(100\pi t + \pi) \times \left[c \times \int_a^{a+b} \frac{1}{r} dr \right]$$

$$\phi = -50 \times 10^{-7} \times \text{sen}(100\pi t + \pi) \times \ln\left(\frac{0{,}05 + 0{,}07}{0{,}05}\right)$$

$$\phi = -1{,}09 \times 10^{-6} \times \text{sen}(100\pi t + \pi) \ \ (\text{Wb})$$

$$\varepsilon = -\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(-1{,}09 \times 10^{-6} \times \text{sen}(100\pi t + \pi)\right)$$

$$\varepsilon = 1{,}09 \times 10^{-6} \times 100\pi \times \cos(100\pi t + \pi)$$

$$\varepsilon = 3{,}44 \times 10^{-6} \times \cos(100\pi t + \pi) \ \ (\text{V})$$

Para N espiras multiplica-se o resultado anterior por N, vindo

$$\varepsilon_{total} = N \times \varepsilon = 250 \times 3{,}44 \times 10^{-6} \times \cos(100\pi t + \pi)$$

$$\varepsilon_{total} = 8{,}59 \times 10^{-6} \times \cos(100\pi t + \pi)\ (\text{V})$$

6. Verificar a equação de onda de $f(x,t) = 10\ln(x + vt)$:

A equação de onda é:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \times \frac{1}{v^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

Assim, derivando em ordem ao tempo, vem:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{10\,v}{x + vt}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{-10\,v^2}{(x + vt)^2}$$

Derivando em ordem ao espaço, vem;

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{10}{x + vt}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{-10}{(x + vt)^2}$$

Substituindo na equação de onda, vem:

$$\frac{-10\,v^2}{(x + vt)^2} \times \frac{1}{v^2} = \frac{-10}{(x + vt)^2}$$

Como a equação acima é verdadeira, então a função $f(x,t) = 10\ln(x + vt)$ satisfaz a equação de onda.