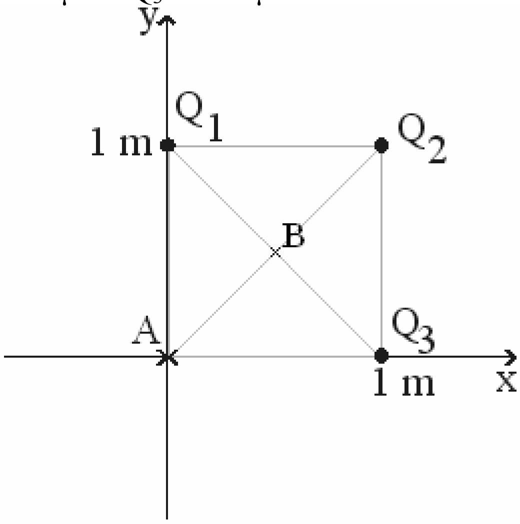
1. $Q_1 = +10\ \mu C$, $Q_2 = -10\ \mu C$ e $Q_3 = +15\ \mu C$



a)

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum \frac{Q_i}{r_i^{\,2}}\frac{\vec{r}_i}{r_i}$$

$$\vec{r}_{Q_1Q_2} = (1i + 1j) - (0i + 1j) = 1i$$

$$r_{Q_1Q_2} = 1\,\text{m}$$

$$\vec{r}_{Q_3Q_2} = (1i + 1j) - (1i + 0j) = 1j$$

$$r_{Q_3Q_2} = 1\,\text{m}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\left(\frac{10\cdot 10^{-6}}{1^2}\frac{1i}{1} + \frac{15\cdot 10^{-6}}{1^2}\frac{1j}{1}\right) = 90\cdot 10^3\,i + 135\cdot 10^3\,j\,(\text{v/m})$$

$$E = 162249.8\ \text{v/m}$$

b)

$$\vec{F} = \vec{F}_{Q_1Q_3} + \vec{F}_{Q_2Q_3} = \frac{1}{4\pi\pi_0}\left(\frac{Q_1Q_3}{r_{Q_1Q_3}^{\;2}}\frac{\vec{r}_{Q_1Q_3}}{r_{Q_1Q_3}} + \frac{Q_2Q_3}{r_{Q_2Q_3}^{\;2}}\frac{\vec{r}_{Q_2Q_3}}{r_{Q_2Q_3}}\right)$$

$$\vec{r}_{Q_1Q_3} = (1i + 0j) - (0i + 1j) = 1i - 1j$$

$$r_{Q_1Q_3} = \sqrt{2}\ \text{m}$$

$$\vec{r}_{Q_2Q_3} = (1i + 0j) - (1i + 1j) = 0i - 1j = 1j$$

$$r_{Q_2Q_3} = 1\,\text{m}$$

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\pi_0}\left(\frac{(-10\cdot 10^{-6})\cdot 15\cdot 10^{-6}}{1^2}\frac{(-1j)}{1} + \frac{(10\cdot 10^{-6})\cdot 15\cdot 10^{-6}}{\sqrt{2}^{\,2}}\frac{(1i - 1j)}{\sqrt{2}}\right) = 0.477i + 0.873j\,(\text{N})$$

$$\vec{F} = 0.9948\ \text{N}$$

c)

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\sum \frac{Q_i}{r_i}\right) + C$$

$$V_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{10\cdot 10^{-6}}{1} + \frac{(-10\cdot 10^{-6})}{\sqrt{2}} + \frac{15\cdot 10^{-6}}{1}\right) + C = 161360 + C \ \ (v)$$

$$\vec{r}_{1,A} = (0i+0j)-(0i+1j) = -1j\,\mathrm{m}$$

$$r_{1,A} = 1\,\mathrm{m}$$

$$\vec{r}_{2,A} = (0i+0j)-(1i+1j) = -1i-1j$$

$$r_{2,A} = \sqrt{2}\,\mathrm{m}$$

$$\vec{r}_{3,A} = (0i+0j)-(1i+0j) = -1i$$

$$r_{3,A} = 1\,\mathrm{m}$$

$$V_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{10\cdot 10^{-6}}{0.7} + \frac{(-10\cdot 10^{-6})}{0.7} + \frac{15\cdot 10^{-6}}{0.7}\right) + C = 192857 + C \ \ (v)$$

$$\vec{r}_{1,B} = (0.5i+0.5j)-(0i+1j) = 0.5i - 0.5j\,\mathrm{m}$$

$$r_{1,B} = 0.7\,\mathrm{m}$$

$$\vec{r}_{2,B} = (0.5i+0.5j)-(1i+1j) = -0.5i-0.5j$$

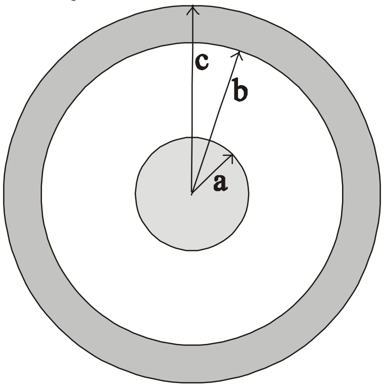
$$r_{2,B} = 0.7\,\mathrm{m}$$

$$\vec{r}_{3,B} = (0.5i+0.5j)-(1i+0j) = -0.5i+0.5j$$

$$r_{3,B} = 0.7\,\mathrm{m}$$

$$V_A - V_B = 161360 + C - (192857 + C) = -31497\ \mathrm{v}$$

2. **a**=5 cm, **b**=7 cm e **c**=9 cm e Q=2×10^{-8} C.



a)

$$Q = \rho V \Rightarrow \rho = \frac{Q}{V}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi\left(a^3 + (c^3 - b^3)\right) = 2.14\cdot 10^{-3}\ m^3$$

$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{2\cdot 10^{-8}}{2.14\cdot 10^{-3}} = 9.35\mu.C/m^3$$

$r < a$

$$\oint_s \vec{E}d\vec{S} = \frac{Q_i}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow E\oint dS = \frac{\int_v \rho dv}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow E4\pi\, r^2 = \frac{\rho\frac{4}{3}\pi r^3}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} \Leftrightarrow E = \frac{9.35\cdot 10^{-6}}{3\varepsilon_0} r\ \ (N/C)$$

$a < r < b$

$$\oint_s \vec{E}d\vec{S} = \frac{Q_i}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow E4\pi\ r^2 = \frac{\rho\frac{4}{3}\pi a^3}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 r^2} \Leftrightarrow E = \frac{1.56}{\varepsilon_0 r^2}\ \ (N/C)$$

b < r < c

$$\oint_s \vec{E}d\vec{S} = \frac{Q_i}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow E4\pi r^2 = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi\left(r^3 + a^3 - b^3\right)}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{3{,}12 \times 10^{-6}}{\varepsilon_0} r - \frac{6{,}79 \times 10^{-10}}{\varepsilon_0 r^2} \text{ (N/C)}$$

r = c

$$\oint_s \vec{E}d\vec{S} = \frac{Q_i}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow E\,4\pi\ \ r^2 = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi\,(a^3 + (c^3 - b^3))}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{9{,}35 \times 10^{-6} \times (5^3 + (9^3 - 7^3)) \times (10^{-2})^3}{3\varepsilon_0 r^2} = \frac{1{,}96 \times 10^{-7}}{\varepsilon_0}$$

r > c

$$\oint_s \vec{E}d\vec{S} = \frac{Q_i}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow E\,4\pi\, r^2 = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi(a^3 + (c^3 - b^3))}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{9{,}35 \times 10^{-6} \times (5^3 + (9^3 - 7^3)) \times (10^{-2})^3}{3\varepsilon_0 r^2} = \frac{1{,}59 \times 10^{-9}}{\varepsilon_0 r^2} \text{ (N/C)}$$

b) O potencial eléctrico em cada uma das seguintes regiões:

P1 (r < a)

$$V(r < a) = \int_r^\infty \vec{E}d\vec{r} = \int_r^a \vec{E}d\vec{r} + \int_a^b \vec{E}d\vec{r} + \int_b^c \vec{E}d\vec{r} + \int_c^\infty \vec{E}d\vec{r} =$$

$$= \int_r^a Edr + \int_a^b Edr + \int_b^c Edr + \int_c^\infty Ed\vec{r} =$$

$$= \int_r^a \frac{9.35 \cdot 10^{-6}}{3\varepsilon_0} rdr + \int_a^b \frac{1.56}{\varepsilon_0 r^2} dr + \int_b^c \left(\frac{3.12 \cdot 10^{-6}}{\varepsilon_0} r + \frac{1.20 \cdot 10^{-9}}{\varepsilon_0 r^2} \right) dr + \int_c^\infty \frac{2.27 \cdot 10^{-9}}{\varepsilon_0 r^2} d\vec{r} =$$

$$= \ldots$$

P2 (a < r < b)

$$V(a<r<b)=\int_{r}^{\infty}\vec{E}d\vec{r}=\int_{r}^{b}\vec{E}d\vec{r}+\int_{b}^{c}\vec{E}d\vec{r}+\int_{c}^{\infty}\vec{E}d\vec{r}=$$

$$=\int_{r}^{b}Edr+\int_{b}^{c}Edr+\int_{c}^{\infty}Ed\vec{r}=$$

$$=\int_{r}^{b}\frac{1.56}{\varepsilon_0 r^2}dr+\int_{b}^{c}\left(\frac{3.12\cdot10^{-6}}{\varepsilon_0}r+\frac{1.20\cdot10^{-9}}{\varepsilon_0 r^2}\right)dr+\int_{c}^{\infty}\frac{2.27\cdot10^{-9}}{\varepsilon_0 r^2}d\vec{r}=$$

$$=\dots$$

P3 (b < r < c)

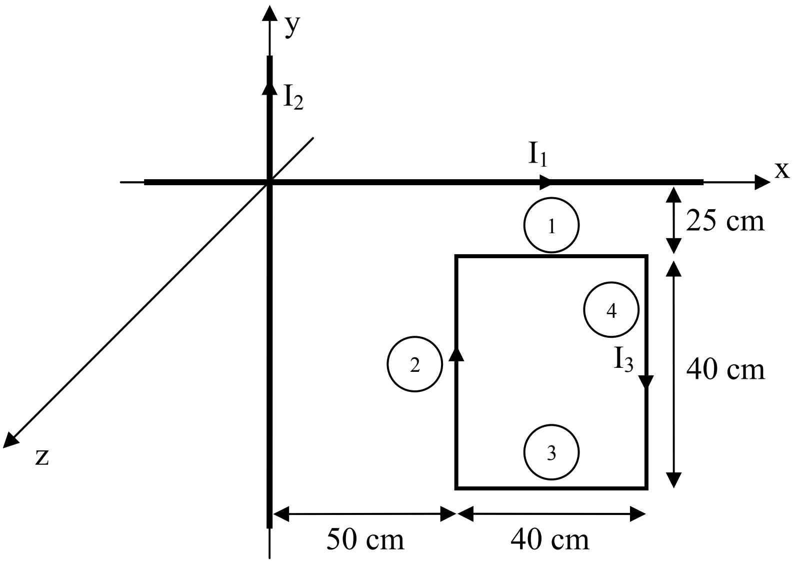
$$V(b<r<c)=\int_{r}^{\infty}\vec{E}d\vec{r}=\int_{r}^{c}\vec{E}d\vec{r}+\int_{c}^{\infty}\vec{E}d\vec{r}=$$

$$=\int_{r}^{c}Edr+\int_{c}^{\infty}Ed\vec{r}=$$

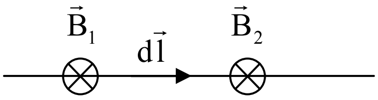
$$=\int_{b}^{c}\left(\frac{3.12\cdot10^{-6}}{\varepsilon_0}r+\frac{1.20\cdot10^{-9}}{\varepsilon_0 r^2}\right)dr+\int_{c}^{\infty}\frac{2.27\cdot10^{-9}}{\varepsilon_0 r^2}d\vec{r}=$$

$$=\dots$$

3. Calcular o valor da força magnética para cada lado da espira:



Para o lado 1:



Devido a B_1:

$$d\vec{F}_1 = I_3\, d\vec{l} \wedge \vec{B}_1 = I_3 \times dl \times B_1\ (\hat{j})$$

$$\vec{F}_1 = \int d\vec{F}_1 = I_3 \times B_1 \int_{0,5}^{0,9} dl\ (\hat{j}) = I_3 \times \frac{\mu_0}{2\pi} \times \frac{I_1}{r} \int_{0,5}^{0,9} dl\ (\hat{j}) = 12 \times \frac{4\pi \times 10^{-7}}{2\pi} \times \frac{5}{0,25} \times (0,9 - 0,5)\ (\hat{j})$$

$$\vec{F}_1 = 19,20 \times 10^{-6}\ \hat{j} \quad (N)$$

Neste caso, a distância do fio 1 é sempre a mesma ao lado do fio 3 que está a ser considerado – é constante – e vale 0,25 m.

Devido a B_2:

$$d\vec{F}_2 = I_3\, d\vec{l} \wedge \vec{B}_2 = I_3 \times dl \times B_2\ (\hat{j})$$

$$\vec{F}_2 = \int d\vec{F}_2 = I_3 \int_{0,5}^{0,9} \frac{\mu_0}{2\pi} \times \frac{I_2}{r} dl\ (\hat{j}) =_{|dl=dr} I_3 \times \frac{\mu_0}{2\pi} \times I_2 \int_{0,5}^{0,9} \frac{1}{r} dr\ (\hat{j}) = 12 \times \frac{4\pi \times 10^{-7}}{2\pi} \times \frac{7}{0,25} \times \ln\left(\frac{0,9}{0,4}\right)\ (\hat{j})$$

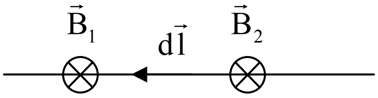
$$\vec{F}_2 = 9,87 \times 10^{-6}\ \hat{j} \quad (N)$$

Aqui a distância do fio 3 ao fio 2 varia de 0,5 a 0,9 m, pelo que não é constante.

Somando as duas forças:

$\vec{F}_{L1} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 29{,}07 \times 10^{-6}\ \hat{j}\quad (N)$

Para o lado 3:



Devido a B_1:

$d\vec{F}_1 = I_3\, d\vec{l} \wedge \vec{B}_1 = I_3 \times dl \times B_1\ (\text{-}\hat{j})$

$$\vec{F}_1 = \int d\vec{F}_1 = I_3 \times B_1 \int_{0,5}^{0,9} dl\ (\text{-}\hat{j}) = I_3 \times \frac{\mu_0}{2\pi} \times \frac{I_1}{r} \int_{0,5}^{0,9} dl\ (\text{-}\hat{j}) = 12 \times \frac{4\pi \times 10^{-7}}{2\pi} \times \frac{5}{0{,}65} \times (0{,}9 - 0{,}5)\ (\text{-}\hat{j})$$

$\vec{F}_1 = -7{,}38 \times 10^{-6}\ \hat{j}\quad (N)$

Neste caso, a distância do fio 1 é sempre a mesma ao lado do fio 3 que está a ser considerado – é constante – e vale 0,65 m.

Devido a B_2:

$d\vec{F}_2 = I_3\, d\vec{l} \wedge \vec{B}_2 = I_3 \times dl \times B_2\ (\text{-}\hat{j})$

$$\vec{F}_2 = \int d\vec{F}_2 = I_3 \int_{0,5}^{0,9} \frac{\mu_0}{2\pi} \times \frac{I_2}{r}\, dl\ (\text{-}\hat{j}) =_{|dl=dr} I_3 \times \frac{\mu_0}{2\pi} \times I_2 \int_{0,5}^{0,9} \frac{1}{r}\, dr\ (\text{-}\hat{j}) = 12 \times \frac{4\pi \times 10^{-7}}{2\pi} \times \frac{7}{0{,}25} \times \ln\left(\frac{0{,}9}{0{,}4}\right)\ (\text{-}\hat{j})$$

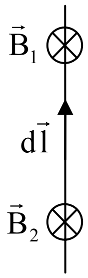
$\vec{F}_2 = -9{,}87 \times 10^{-6}\ \hat{j}\quad (N)$

Aqui a distância do fio 3 ao fio 2 varia de 0,5 a 0,9 m, pelo que não é constante.

Somando as duas forças:

$\vec{F}_{L3} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \text{-}17{,}25 \times 10^{-6}\ \hat{j}\quad (N)$

Para o lado 2:



Devido a B_1:

$$d\vec{F}_1 = I_3\, d\vec{l} \wedge \vec{B}_1 = I_3 \times dl \times B_1\ (\text{-}\hat{i})$$

$$\vec{F}_1 = \int d\vec{F}_1 = I_3 \int_{0,25}^{0,65} \frac{\mu_0}{2\pi} \times \frac{I_1}{r} dl\ (\text{-}\hat{i}) =_{|dl=dr} I_3 \times \frac{\mu_0}{2\pi} \times I_1 \int_{0,25}^{0,65} \frac{1}{r} dr\ (\text{-}\hat{i}) = 12 \times \frac{4\pi \times 10^{-7}}{2\pi} \times 5 \times \ln\left(\frac{0,65}{0,25}\right)\ (\text{-}\hat{i})$$

$$\vec{F}_1 = -11,47 \times 10^{-6}\ \hat{i} \quad (\text{N})$$

Neste caso, a distância do fio 3 ao fio 1 varia de 0,25 a 0,65 m.

Devido a B_2:

$$d\vec{F}_2 = I_3\, d\vec{l} \wedge \vec{B}_2 = I_3 \times dl \times B_2\ (\text{-}\hat{i})$$

$$\vec{F}_2 = \int d\vec{F}_2 = I_3 \int_{0,5}^{0,9} \frac{\mu_0}{2\pi} \times \frac{I_2}{r} dl\ (\text{-}\hat{i}) = I_3 \times \frac{\mu_0}{2\pi} \times \frac{I_2}{r} \int_{0,25}^{0,65} dl\ (\text{-}\hat{i}) = 12 \times \frac{4\pi \times 10^{-7}}{2\pi} \times \frac{7}{0,5} \times (0,65 - 0,25)\ (\text{-}\hat{i})$$

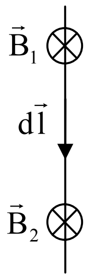
$$\vec{F}_2 = -13,44 \times 10^{-6}\ \hat{i} \quad (\text{N})$$

Neste caso, a distância do fio 2 é sempre a mesma ao lado do fio 3 que está a ser considerado – é constante – e vale 0,5 m.

Somando as duas forças:

$$\vec{F}_{L2} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \text{-}24,91 \times 10^{-6}\ \hat{i} \quad (\text{N})$$

Para o lado 4:



Devido a B_1:

$$d\vec{F}_1 = I_3\, d\vec{l} \wedge \vec{B}_1 = I_3 \times dl \times B_1\ (\hat{i})$$

$$\vec{F}_1 = \int d\vec{F}_1 = I_3 \int_{0,25}^{0,65} \frac{\mu_0}{2\pi} \times \frac{I_1}{r} dl\ (\hat{i}) =_{|dl=dr} I_3 \times \frac{\mu_0}{2\pi} \times I_1 \int_{0,25}^{0,65} \frac{1}{r} dr\ (\hat{i}) = 12 \times \frac{4\pi \times 10^{-7}}{2\pi} \times 5 \times \ln\left(\frac{0,65}{0,25}\right)\ (\hat{i})$$

$$\vec{F}_1 = 11,47 \times 10^{-6}\ \hat{i} \quad (\text{N})$$

Neste caso, a distância do fio 3 ao fio 1 varia de 0,25 a 0,65 m.

Devido a B_2:

$d\vec{F}_2 = I_3\, d\vec{l} \wedge \vec{B}_2 = I_3 \times dl \times B_2\ (\hat{i})$

$$\vec{F}_2 = \int d\vec{F}_2 = I_3 \int_{0,5}^{0,9} \frac{\mu_0}{2\pi} \times \frac{I_2}{r}\, dl\ (\hat{i}) = I_3 \times \frac{\mu_0}{2\pi} \times \frac{I_2}{r} \int_{0,25}^{0,65} dl\ (\hat{i}) = 12 \times \frac{4\pi \times 10^{-7}}{2\pi} \times \frac{7}{0,9} \times (0,65 - 0,25)\ (\hat{i})$$

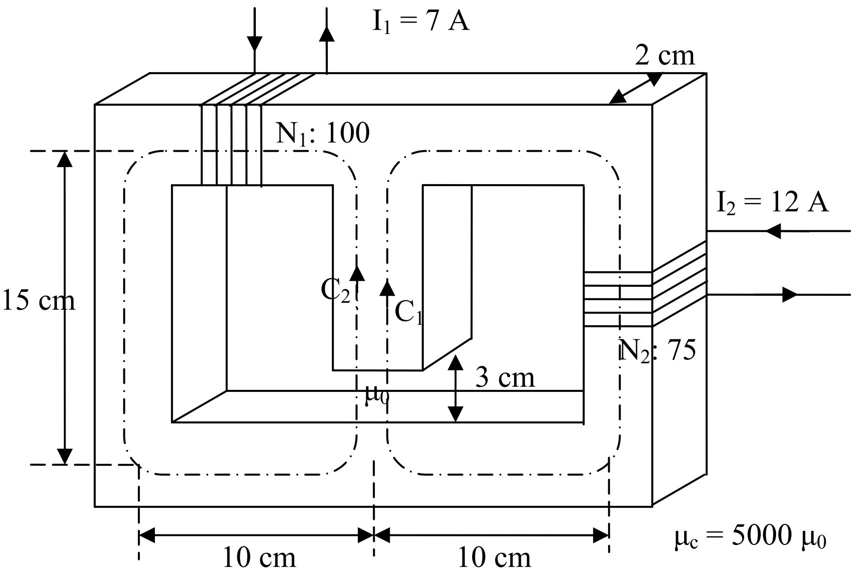
$\vec{F}_2 = 7,47 \times 10^{-6}\ \hat{i}\quad (N)$

Neste caso, a distância do fio 2 é sempre a mesma ao lado do fio 3 que está a ser considerado – é constante – e vale 0,9 m.

Somando as duas forças:

$\vec{F}_{L4} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 18,94 \times 10^{-6}\ \hat{i}\quad (N)$

4. Calcular o fluxo magnético na região com μ_0:



Para C_1:

$$\frac{B_{11}(10+15+10+12)\times10^{-2}}{\mu_{ferro}}+\frac{B_{11}3\times10^{-2}}{\mu_0}+\frac{B_{22}12\times10^{-2}}{\mu_{ferro}}+\frac{B_{22}3\times10^{-2}}{\mu_0}=N_2I_2$$

$$\frac{0{,}47\times B_{11}}{5000}+\frac{0{,}03\times B_{11}}{1}+\frac{0{,}12\times B_{22}}{5000}+\frac{0{,}03\times B_{22}}{1}=75\times12\times\mu_0$$

$$150{,}47B_{11}+150{,}12B_{22}=1{,}8\pi$$

Para C_2:

$$\frac{B_{22}(10+15+10+12)\times10^{-2}}{\mu_{ferro}}+\frac{B_{22}3\times10^{-2}}{\mu_0}+\frac{B_{11}12\times10^{-2}}{\mu_{ferro}}+\frac{B_{11}3\times10^{-2}}{\mu_0}=N_1I_1$$

$$\frac{0{,}47\times B_{22}}{5000}+\frac{0{,}03\times B_{22}}{1}+\frac{0{,}12\times B_{11}}{5000}+\frac{0{,}03\times B_{11}}{1}=100\times7\times\mu_0$$

$$150{,}47B_{22}+150{,}12B_{11}=1{,}4\,\pi$$

Resolvendo o sistema de duas equações acima descrito, vem:

$B_{11}=-6{,}48\times10^{-3}$ T

$B_{22}=44{,}16\times10^{-3}$ T

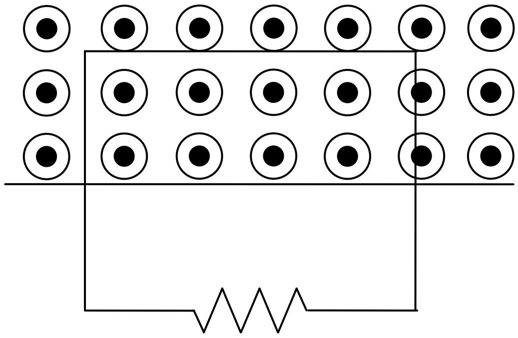
Somando os dois, vem:

$B_{total}=37{,}68\times10^{-3}$ T

O fluxo, admitindo uma secção quadrada, com 2 cm de lado, vem:

$\phi=B_{total}\times S=37{,}68\times10^{-3}\times(0{,}02)^2=15{,}07\times10^{-6}$ Wb

5. Calcular a corrente eléctrica que atravessa a resistência R:



Aqui, utiliza-se a lei de Faraday:

$$B = 0{,}5 - 0{,}9\,t - 0{,}5\,t^2$$

$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} =_{|\text{S é constante}} -S\times\frac{dB}{dt} =_{|\text{Só é metade da espira}} -\frac{(2{,}5)^2}{2}\times\frac{d}{dt}\left(0{,}5 - 0{,}9\,t - 0{,}5\,t^2\right)$$

$$\varepsilon = -3{,}125\times(-0{,}9 - t) = 3{,}125\,(t + 0{,}9)$$

$$\varepsilon_{|t=5\,s} = 3{,}125\times(5 + 0{,}9) = 18{,}44\ V$$

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{18{,}44}{8} = 2{,}30\ A$$

6. Verificar a equação de onda de $f(x,t) = 10\,e^{j(x+v\,t)}$:

A equação de onda é:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \times \frac{1}{v^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

Assim, derivando em ordem ao tempo, vem:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 10\,jv\,e^{j(x+v\,t)}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -10 v^2 e^{j(x+v\,t)}$$

Derivando em ordem ao espaço, vem;

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 10\,j\,e^{j(x+v\,t)}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -10\,e^{j(x+v\,t)}$$

Substituindo na equação de onda, vem:

$$-10\,v^2 e^{j(x+v\,t)} \times \frac{1}{v^2} = -10\,e^{j(x+v\,t)}$$

Como a equação acima é verdadeira, então a função $f(x,t) = 10\,e^{j(x+v\,t)}$ satisfaz a equação de onda.

