INSTITUTO POLITÉCNICO DE BRAGANÇA
ESCOLA SUPERIOR DE TECNOLOGIA E DE GESTÃO

FÍSICA III

Exercícios teórico-práticos

FILIPE SANTOS MOREIRA

Índice

Derivadas e integrais

1. Calcule as derivadas parciais, $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$, das funções:

a) $z = \frac{x^2}{y}$.

b) $z = \sin(x \cdot y)$.

c) $z = 3e^x - 2e^y + x^2 y^3$.

d) $z = x^2 y + \sin x + x \cdot \cos y$.

e) $z = y \cdot x \cdot e^x$.

f) $z = x^2 \cdot \sin(x \cdot y)$.

2. Calcule as derivadas parciais de segunda ordem, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ e $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, das funções:

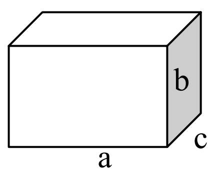
a) $z = 3x \cdot y^3 - 2x \cdot y + \sin x$.

b) $z = 3x^2 + y^2 + e^{x \cdot y}$.

3. Calcule as derivadas parciais, $\frac{\partial \vec{v}}{\partial x}$, $\frac{\partial \vec{v}}{\partial y}$ e $\frac{\partial \vec{v}}{\partial z}$, do vector:

$v = 3x^2 y \vec{i} + 2x \cdot y \cdot z \vec{j} - 3x^4 y^2 \vec{k}$.

4. Considere o seguinte paralelepípedo:

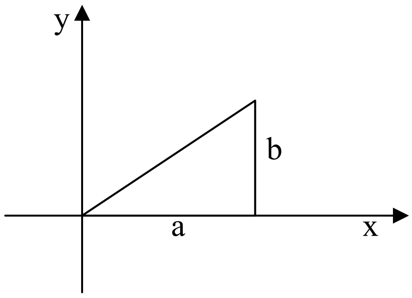


a) Calcule o volume do paralelepípedo usando o integral triplo.
(Sugestão: partir do volume elementar).

b) Calcular a massa sabendo que a massa específica é:

$\rho = x \cdot y^2 \cdot z^3$.

5. Considere o triângulo da figura seguinte:



Calcule a área do triângulo usando um integral duplo.

6. Calcule os seguintes integrais:

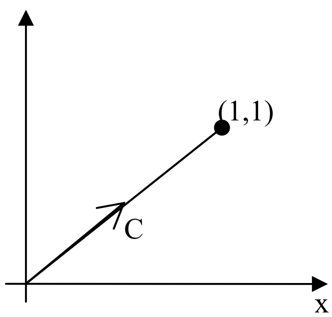
a) $\int_0^2 \int_1^4 (x+2y)\,dx\,dy$.

b) $\int_0^1 \int_0^{2-2y} (4x+5)\,dx\,dy$.

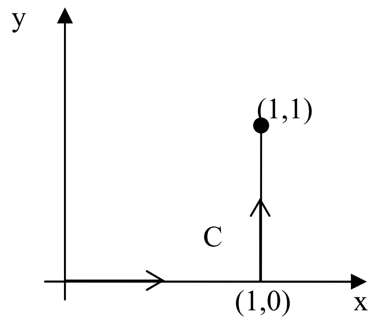
c) $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (x+y+z)\,dx\,dy\,dz$.

7. Calcule os seguintes integrais para as curvas representadas:

a) $\int_C 5y^2\,dx + 2x\cdot y\,dy$



b) $\int_C 5y^2\,dx + 2x\cdot y\,dy$



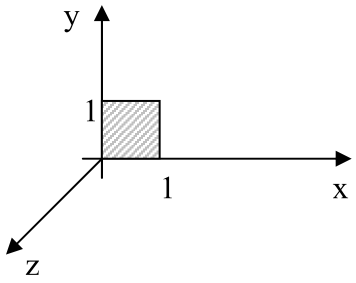
8. Considere o campo $\vec{F} = (3x^2 + y)\vec{i} + (5x - y)\vec{j}$ e a curva definida pela equação $y = 2x^2$. Calcule $\int_C \vec{F} \,|\, d\vec{s}$ para o arco da curva entre os pontos A (2,8) e B (3,18).

Campos vectoriais e escalares

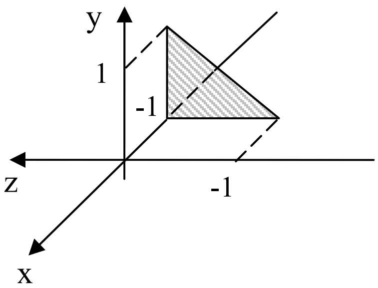
9. Considere o campo vectorial definido do seguinte modo:

$$\vec{V} = (x \cdot y)\vec{i} + z\vec{j} + y\vec{k} .$$

a) Calcule o fluxo que atravessa o quadrado da figura seguinte:



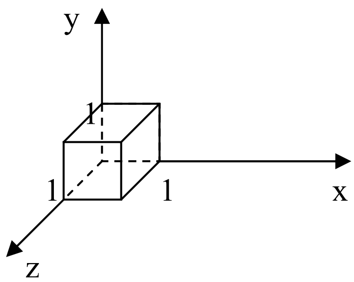
b) Calcule o fluxo que atravessa o triângulo, paralelo ao plano *yz*, da figura seguinte:



10. Considere o campo vectorial $\vec{V}$ definido no problema anterior.

c) Calcule a divergência (div $\vec{V}$) desse campo.

d) Considere agora um cubo como se mostra na figura seguinte. Mostre que o fluxo dentro desse cubo é igual ao integral da divergência em todo o volume (por outras palavras, aplique o teorema de Green-Ostrogradsky).



11. Calcule o rotacional de cada um dos seguintes vectores.

e) $\vec{v} = (\operatorname{sen} z, y/x, z \cdot \cos x)$.

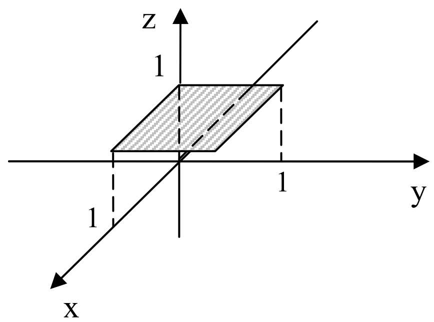
f) $\vec{v} = (\cos y, z \cdot x, y \cdot \operatorname{sen} y)$.

g) $\vec{v} = (y^2, \operatorname{sen} y, z \cdot \cos y)$.

12. Considere o campo vectorial

$$\vec{v} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}\ .$$

a) Determine o fluxo do campo através de um quadrado de lado 1 assente no plano paralelo ao plano *xy* com z=1. O quadrado, como mostra a figura, tem um vértice no eixo dos *zz* e dois dos lados assentes nos planos coordenados, respectivamente *xz* e *yz*.



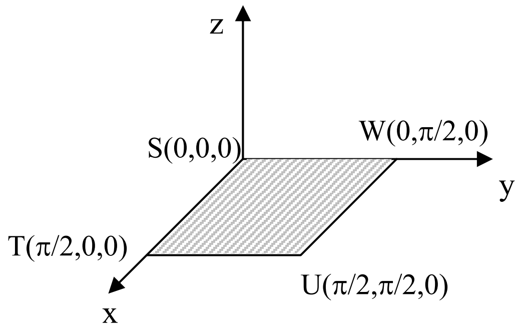
b) Calcule o rotacional e a divergência do campo.

13. Considere o campo vectorial

$$\vec{v} = \sin x\vec{i} + \cos x\vec{j} + z\vec{k}\ .$$

a) Calcule a circulação do campo ao longo do segmento de recta que vai do ponto S (0, 0, 0) até ao ponto T ($\pi/2$, 0, 0).

b) Calcule a circulação ao longo do percurso fechado da figura.



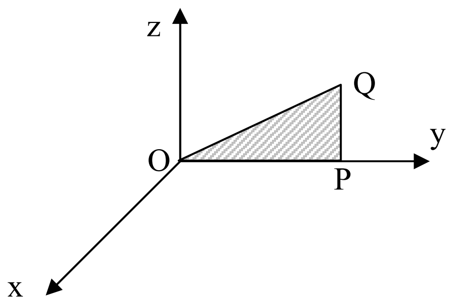
Sugestão: utilize o teorema de Stokes.

14. Considere o campo escalar

$$f = x \cdot y \cdot z\,.$$

a) Calcule o gradiente do campo escalar *f*.

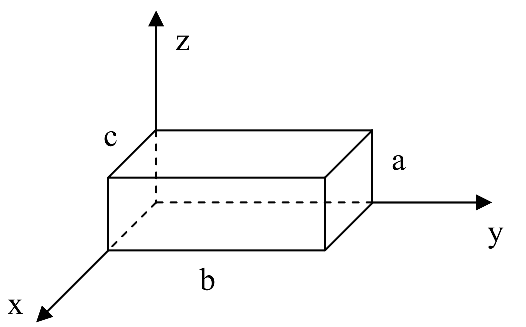
b) Calcule o fluxo do gradiente do campo escalar *f*, no sentido positivo do eixo dos *xx*, que atravessa o triângulo de vértices O (0,0,0), P (0,2,0) e Q (0,2,1) representado na figura.



15. Considere o seguinte campo:

$$\vec{V} = 2y \cdot z\vec{i} + 2x \cdot z\vec{j} + z^2\vec{k}$$

a) Calcule o fluxo deste campo que atravessa o paralelepípedo da figura de lados a=1, b=3 e c=2.
Sugestão: utilize o teorema de Green-Ostrogradsky.



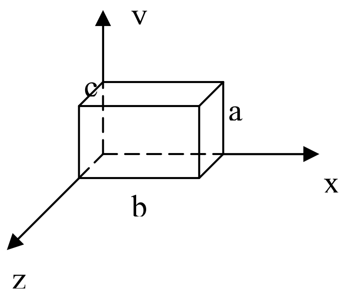
b) Calcule o rotacional e a divergência do campo.

16. Considere o seguinte campo:

$$\vec{V} = \frac{z^2}{6}\vec{i} + \frac{z^2}{2}\vec{j} + \left(\frac{x \cdot z}{3} + y \cdot z + z^2\right)\vec{k} .$$

a) Calcule o rotacional e a divergência do campo.

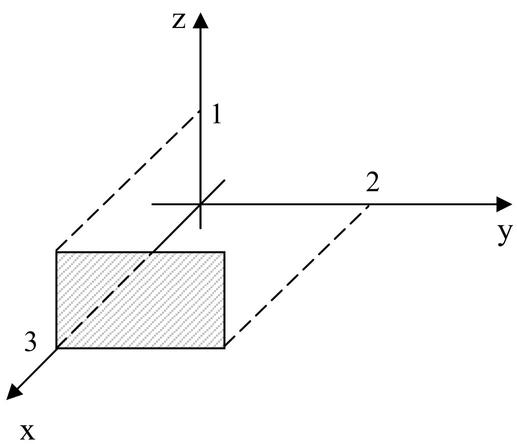
b) Calcule o fluxo deste campo que atravessa o paralelepípedo da figura de lados a=1, b=3 e c=2.
Sugestão: utilize o teorema de Green-Ostrogradsky.



17. Considere o seguinte campo:

$$v = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k} .$$

a) Determine o fluxo do campo através de um rectângulo de lados 1 e 2 assente no plano paralelo ao plano *yz* com x=3, como mostra a figura. O quadrado, como mostra a figura, tem um vértice no eixo dos *zz* e dois dos lados assentes nos planos coordenados, respectivamente *xz* e *yz*.



b) Calcule o rotacional e a divergência do campo.

Electromagnetismo

18. Determine o campo $\vec{E}$ que actua na origem devido a uma carga pontual Q_1 de 64,4 nC situada no ponto (-4, 3, 2).

19. Calcule $\vec{E}$ no ponto (0, 0, 5) devido a uma carga Q_1 = 0,35 μC situada no ponto (0, 4, 0) e uma carga Q_2 = -0,55 μC situada no ponto (3, 0, 0).

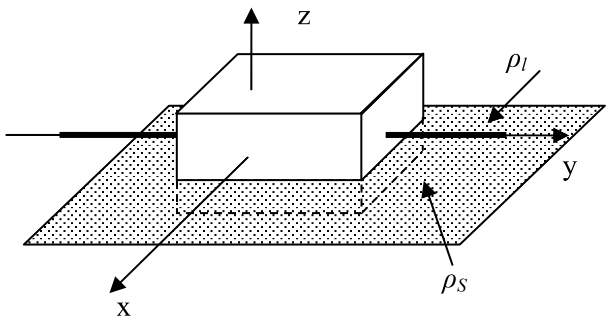
20. Considerando $\rho_V = 30\ x^2 \cdot y$ μC m^{-3}, calcular a carga no volume definido por:

a) $0 \le x \le 1$ (m) ; $0 \le y \le 1$ (m); $0 \le z \le 1$ (m)

b) $0 \le x \le 1$ (m) ; $-1 \le y \le 0$ (m); $0 \le z \le 1$ (m)

c) $-1 \le x \le 0$ (m) ; $0 \le y \le 1$ (m); $0 \le z \le 1$ (m).

21. Uma película carregada, com densidade ρ_S = 40 μC m^{-2}, está localizada na plano z = -0,5 m. O eixo dos *yy* contém uma distribuição linear uniforme, ρ_l = -6 μC m^{-1}. Calcular o fluxo total que atravessa a superfície de um cubo de aresta de 2 m, centrado na origem.

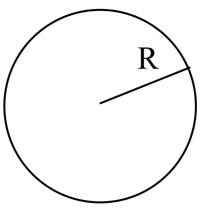


22. Discuta o campo eléctrico criado por:

a) Uma carga uniformemente distribuída sobre um plano

b) Dois planos paralelos com cargas iguais, mas opostas.

23. Considere uma esfera de raio *R* com uma carga constante, uniformemente distribuída por todo o volume da esfera, como se pode ver na figura seguinte:



$$\rho_V = k$$

Aplicando a lei de Gauss, calcule o valor de $\vec{E}$ para:

a) Um ponto dentro da esfera

b) Um ponto fora da esfera.

24. Um protão move-se com velocidade $v = 8\text{x}10^6$ ms^{-1} sobre o eixo dos *xx*. Então, entra numa região onde há um campo magnético de 2,5 T, com a direcção a fazer um ângulo de 60º com o eixo dos *xx* no plano *xy*. Calcule a força magnética inicial sobre o protão e a aceleração inicial do protão.

25. Um protão está em movimento sobre uma órbita circular de 14 cm de raio, num campo magnético uniforme de 0,35 T, dirigido perpendicularmente à velocidade do protão. Determine a velocidade orbital do protão.

26. Um fio rectilíneo, comprido, de raio R, tem uma corrente constante I_0 uniformemente distribuída pela secção recta do fio. Calcule o campo magnético a uma distância r do eixo do fio nas regiões $r < R$ e $r \geq R$.

27. Uma bobina toroidal é constituída por N espiras de fio enrolado em torno de um toro. Admitindo que as espiras sejam muito cerradas, calcule o campo magnético no interior da bobina a uma distância r do seu centro.

28. Uma folha condutora plana infinita, no plano *yz*, tem uma densidade superficial de corrente $\vec{J}_L$. A corrente está na direcção *y* e J_L representa a corrente por unidade de comprimento, medido ao longo do eixo dos *zz*. Ache o campo magnético nas vizinhanças desta corrente plana.

29. Um fio condutor rectilíneo, comprido, está orientado sobre o eixo dos *yy*, e tem uma corrente constante I_1. Um circuito rectangular, localizado à direita do fio, tem uma corrente I_2. Ache a força magnética sobre o segmento horizontal superior do circuito.

Ondas

30. Considere a função $f = F \cdot \cos(\omega t - \beta x)$.
Demonstre que esta função satisfaz a equação de onda e determine a sua velocidade de propagação v.

31. Considere as seguintes funções:

a) $f = (x + vt)^3$.

b) $f = A \cdot e^{jk(x - vt)}$.

c) $f = \ln(x - vt)$.

d) $f = A \cdot sen(kx) \cdot \cos(\omega t)$.

32. Verifique que todas estas funções satisfazem a equação de onda.

a) Mostre que a função

$$f(x,t) = Ae^{\beta x - t}$$

satisfaz a equação de onda.

b) Qual é a velocidade de propagação desta onda?

33. As equações de onda dos campos eléctrico e magnético, na direcção segundo o eixo dos *xx*, são, como se sabe:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \mu\varepsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = \mu\varepsilon \frac{\partial^2 B}{\partial t^2}$$

Uma solução destas equações é a onda plana monocromática

$$E = E_0 \cos(kx - \omega t)$$
$$B = B_0 \cos(kx - \omega t)$$.

a) Determine a velocidade de propagação das ondas em função de μ e de ε.

b) Mostre que a velocidade é

$v = \dfrac{\omega}{k}$.

34. Verifique se as seguintes equações satisfazem a equação de onda e, em caso afirmativo, determine as respectivas velocidades de propagação:

a) $f = (k^2 \cdot x - \gamma \cdot t^2)^4$.

b) $f = \cos(\omega t + \omega^4 \cdot \varphi) \cdot \sin(k\,x - k\,\theta^2)$.

35. Verifique se as seguintes equações satisfazem a equação de onda e, em caso afirmativo, determine as respectivas velocidades de propagação:

a) $f = (k\,x - \gamma\,t)^3$.

b) $f = \cos(\omega t + \phi) \cdot \sin(k\,x - \theta)$.

36. Sabe-se que uma onda electromagnética se propaga no vazio e está definida pela seguinte equação:

$$E = E_0 \sin(\omega t - k\,x + \phi).$$

a) Sabendo que a frequência da onda é 50 Hz, determine o comprimento de onda da mesma.

b) Sabendo que a onda é inicializada para t=0, x=0 com o valor E nulo e com a primeira derivada $\frac{\partial E}{\partial t} = 100$ Vm^{-1}s^{-1}, determine qual o valor de E_0 e qual o valor da fase inicial ϕ.

37. Considere a função

$$f(x,t) = Ae^{\beta x - t}$$

a) Mostre que esta função satisfaz a equação de onda.

b) Qual é a velocidade de propagação?

38. Calcule o comprimento de onda para uma onda AM com 1000 kHz e para uma onda FM com 100MHz.

39. A parte visível do espectro electromagnético está compreendida entre os comprimentos de onda 4×10^{-7} m (violeta) e 7×10^{-7} m (vermelho). Determine as frequências limite dessa parte do espectro.

40. Calcule a frequência para:

a) Uma onda com comprimento de onda de 3 cm.

b) Uma onda tipo raio X com comprimento de onda de 0,1 nm.

41. A frequência da luz emitida por uma lâmpada incandescente é de $0{,}25 \times 10^{15}$ Hz. Sabendo que a potência, isto é, a energia emitida por segundo, da lâmpada é de 200 W, qual é o número de fotões emitidos por unidade de tempo?

Corpos negros e Efeito Fotoeléctrico

42. Sabendo que os comprimentos de onda para os quais as radiações máximas do Sol e da Estrela Polar são, respectivamente, 5100 Å e 3500 Å, calcule as respectivas temperaturas.

43. O trabalho de extracção para um bloco de sódio é 1,82 eV. Sobre esse bloco incide uma luz amarela de comprimento de onda λ = 5890 Å. Calcule o potencial de corte correspondente a esse comprimento de onda.

44. Uma superfície de um material é iluminada por uma onda electromagnética de comprimento de onda λ = 1500 Å. Sabendo que electrões são extraídos do material com uma energia de 5,79 eV, calcule o trabalho de extracção desses electrões.

45. Uma superfície de um material é iluminada por uma onda electromagnética. Sabendo que são extraídos electrões do material com uma energia de 5,79 eV e que o trabalho de extracção desses electrões é 4,57 eV, determine qual o comprimento de onda da onda electromagnética.

Efeito Compton

46. Um feixe de raios X de comprimento de onda λ_0 = 0,2 nm é espalhado por um alvo. Os raios X espalhados são observados sob um ângulo de 45º em relação ao feixe incidente. Calcule o comprimento de onda dos raios X espalhados sob este ângulo.

47. Sabe-se que um feixe de raios X de comprimento de onda λ_0=0,3 nm é espalhado por um alvo e que os raios espalhados são observados sob um determinado ângulo tendo um comprimento de onda λ'=0,30121 nm. Qual é o referido ângulo?

48. Sabe-se que um feixe de raios X de comprimento de onda λ_0=0,3 nm é espalhado por um alvo e que os raios espalhados são observados sob um determinado ângulo de 30º. Qual é o comprimento de onda dos raios reflectidos?

Comprimento de onda de de Broglie

49. Calcule o comprimento de onda de de Broglie para um electrão que se move com a velocidade de 10^7 ms^{-1}.

50. Uma pedra com massa de 50 g, é arremessada com velocidade de 40 ms^{-1}. Qual é o comprimento de onda de de Broglie para esta pedra?

51. Uma partícula de carga **q** e massa **m** é acelerada do repouso por uma diferença de potencial **V**.

a) Ache o comprimento de onda de de Broglie da partícula.

b) Calcule λ se a partícula for um electrão e V = 50 V.

52. Que velocidade deve ter um electrão (massa: $9{,}11 \times 10^{-11}$ Kg) para que o seu comprimento de onda de de Broglie seja igual ao da luz violeta?

53. Qual o comprimento de onda de de Broglie de um electrão (massa: $9{,}1 \times 10^{-31}$ Kg) deslocando-se a um décimo da velocidade da luz?

54. Qual a velocidade de um corpo, sabendo que a sua massa é 100 g e que o seu comprimento de onda de de Broglie é de $1{,}1 \times 10^{-34}$ m?

55. Qual é o comprimento de onda de de Broglie de um corpo, sabendo que se desloca a uma velocidade de 144 $km \cdot h^{-1}$ e que a sua massa é 100 Kg?

Princípio da incerteza

56. Mede-se a velocidade de um electrão, 5×10^3 ms^{-1}, com a exactidão de 0,003%. Ache a incerteza da posição deste electrão.

57. Mede-se a velocidade de um electrão (massa: $9,11 \times 10^{-31}$ Kg) e obtendo-se o valor de 7×10^3 ms^{-1}. Sabendo que a incerteza da posição deste electrão é 661,5 μm, determine a exactidão da medição da velocidade.

58. Sabe-se que a imprecisão na medida da velocidade de um electrão é de 0.001%. Sabendo que a incerteza da posição deste electrão é 2,31 mm, determine a velocidade medida (massa do electrão: $9,11 \times 10^{-31}$ Kg).