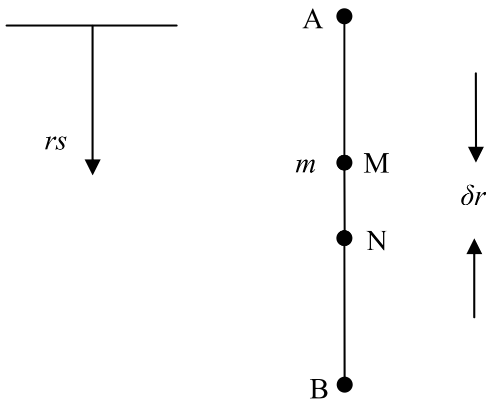
Integral de linha

Considere-se um objecto com massa *m* colocado num campo gravítico. Como a força gravítica é um vector, o campo gravítico é um exemplo de um campo vectorial. A força gravítica na massa é dada por $m\boldsymbol{g}$, em que $\boldsymbol{g}$ é um vector constante chamado aceleração gravítica. Supondo que se larga a massa e ela cai a partir do ponto *A*. O deslocamento vertical medido na direcção descendente a partir de *A* é *r*. O trabalho feito pela força gravítica causa o deslocamento da massa. Pretende-se calcular o trabalho feito para mover a massa de *A* até *B*, como na figura.



O trabalho feito para deslocar a massa do ponto *M* para o ponto *N*, correspondente a uma distância elementar δr. A física diz que o trabalho feito é igual ao produto da amplitude da força pela distância percorrida. Neste caso, a amplitude da força presente é dado por mg e a quantidade elementar δW, quando a massa se desloca de *M* para *N* é dada por

$$\delta W = m \cdot g \delta r$$

donde se tira $\frac{\delta W}{\delta r} = m \cdot g$. Fazendo $\delta r \to 0$, obtém-se

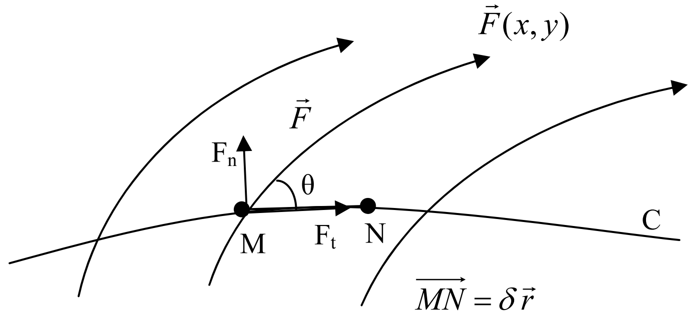
$$\lim_{\delta r \to 0} \frac{\delta W}{\delta r} = \frac{dW}{dr} = m \cdot g$$

Para se obter o trabalho total feito quando a massa se desloca de *A* para *B*, calcula-se o integral para o intervalo de interesse, isto é

$$\text{trabalho total feito} = W = \int_A^B m \cdot g \, dr \, .$$

Este é exemplo elementar de um integral de linha. Esta denominação vem do facto de se estar a integrar ao longo da linha de *A* até *B*.

No caso anterior, o cálculo foi directo e simples, devido à particularidade do exemplo. Considere-se agora o caso em que se tem um campo vectorial, $\vec{F}$, através do qual passa uma curva C, como na figura seguinte.



A análise seguinte vai se restringir a duas dimensões. No caso geral, o campo vectorial vai variar com o espaço, isto é, $\vec{F} = \vec{F}(x,y)$. Considere-se que o elemento pequeno de C e que junta os pontos M e N e seja θ o ângulo entre a tangente da curva C no ponto M e a direcção do campo nesse ponto. Seja o vector que une M e N $\delta\vec{r}$. Considerando a quantidade

$$\vec{F} \mid \delta\,\vec{r}$$

em que | representa o produto escalar. Se $\vec{F}$ representar a força gravítica, então a quantidade $\vec{F} \mid \delta\,\vec{r}$ representa a pequena quantidade de trabalho feito pelo campo ao mover uma partícula de massa unitária entre o ponto M e o ponto N. O integral apropriado ao longo de toda a curva representa o trabalho total efectuado. Assim, tem-se

$$\vec{F} \mid \delta\,\vec{r} = \left|\vec{F}\right| \cdot \left|\delta\,\vec{r}\right| \cdot \cos\,\theta = \left(\left|\vec{F}\right| \cdot \cos\,\theta\right) \cdot \left|\delta\,\vec{s}\right| = F_t \cdot \delta\,r$$

em que F_t é a componente de $\vec{F}$ tangencial à curva C. Este resultado é do mesmo tipo das expressões para o trabalho obtido anteriormente. Então está-se interessado em integrais do tipo

$$\int_C \vec{F}\,(x\,,\,y) \mid d\,\vec{r}\ .$$

Dado que $\vec{F}$ é uma função vectorial de x e de y, então $\vec{F}$ terá componentes cartesianas *P(x,y)* e *Q(x,y)*, pelo que pode ser escrito na forma

$$\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}\ .$$

De igual modo, pode definir-se

$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$$

donde se tira

$$\int_C \vec{F} \mid d\vec{r} = \int_C \left(P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}\right) \mid \left(dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j}\right) = \int_C P(x,y)\cdot dx + Q(x,y)dy$$

Esta expressão é designada a circulação de um campo vectorial $\vec{F}$ ao longo de uma curva C.