



INSTITUTO POLITÉCNICO DE BRAGANÇA
ESCOLA SUPERIOR DE TECNOLOGIA E DE GESTÃO

FÍSICA III



FILIPE SANTOS MOREIRA

2003



1	ANÁLISE VECTORIAL	1
1.1	Derivadas parciais.....	1
1.1.1	Derivada de uma função.....	1
1.1.2	Derivadas parciais	1
1.1.3	Derivadas de funções compostas.....	2
1.2	Integrais múltiplos	2
1.2.1	Integração de uma função.....	2
1.2.2	Integrais duplos	3
1.2.3	Integrais triplos.....	5
1.2.4	Integral de linha.....	6
2	CAMPOS ESCALARES E VECTORIAIS	9
2.1	Introdução.....	9
2.2	Gradiente de um campo escalar.....	9
2.2.1	Operador Nabla	10
2.3	Fluxo de um campo vectorial	10
2.4	Divergência	11
2.4.1	Teorema de Green-Ostrogradsky	12
2.5	Circulação de um campo vectorial. Rotacional	12
2.6	Determinação de campos vectoriais.....	14
2.7	Operações sobre os campos	15
3	ELECTROMAGNETISMO.....	18
3.1	Campo Eléctrico.....	18
3.1.1	Linhas do campo eléctrico.....	19
3.1.2	Potencial eléctrico	20
3.1.3	Lei de Gauss	22
3.2	Corrente eléctrica e lei de Ohm	22
3.2.1	Corrente eléctrica	22
3.2.2	Resistência e lei de Ohm	23
3.3	Campo Magnético	24
3.3.1	Lei de Biot-Savart	25
3.3.2	Lei de Ampère.....	26
3.4	Campo electromagnético	27
3.4.1	Equações de Maxwell.....	27
3.4.2	Situações Estacionárias	29
3.4.3	Situação Geral	31
3.5	Polarização.....	33
3.5.1	Equações de Maxwell na Matéria.....	33
4	ONDAS	35



4.1	Introdução.....	35
4.1.1	Análise de Fourier do movimento ondulatório	36
4.2	Movimentos harmónicos.....	37
4.2.1	Solução complexa.....	40
4.3	Fasores	42
4.4	Corda em vibração e equação de onda.....	42
4.5	Ondas electromagnéticas	44
5	QUÂNTICA	55
5.1	Ondas electromagnéticas	55
5.1.1	Interferência e difracção	55
5.2	Propagação da luz	56
5.2.1	Princípio de Huygens	56
5.2.2	Reflexão	56
5.2.3	Refracção.....	57
5.3	Difracção do espectro electromagnético.....	58
5.3.1	Experiência da luz de Young.....	58
5.3.2	Difracção por Rede Cristalina	59
5.4	Radiação de um corpo negro.....	61
5.4.1	Lei do Deslocamento de Wien	62
5.4.2	A Catástrofe do Ultra-Violeta	62
5.4.3	Lei de Planck. Fóton.....	63
5.5	Efeito Fotoeléctrico	64
5.6	Efeito de Compton.....	67
5.7	Ondas de matéria	69
5.8	Incerteza.....	70
5.8.1	Princípio da incerteza de Heisenberg	70
5.8.2	Equação de Schrödinger.....	70
5.9	Espectros Experimentais de Absorção e de Emissão	72
5.10	Átomo de Bohr	72
5.11	Espectro do Hidrogénio e Átomo de Hidrogénio.....	74
5.11.1	Espectro do Hidrogénio	74
5.11.2	Átomo de Hidrogénio	74
5.12	Princípio da Exclusão e Tabela Periódica.....	76
5.12.1	Princípio da Exclusão	76
5.12.2	Tabela Periódica	76
6	BIBLIOGRAFIA	78



1 Análise vectorial

1.1 Derivadas parciais

1.1.1 Derivada de uma função

Seja a função $f = y(x)$ uma função qualquer com uma variável independente. A derivada de uma função é

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Geometricamente, a derivada de uma função num ponto é a tangente trigonométrica do ângulo que a recta tangente à curva nesse ponto faz com o eixo das abcissas.

As derivadas calculam-se de acordo com a definição.

Exemplo:

$$y = \sqrt{x}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{X \rightarrow x} \frac{Y - y}{X - x} = \lim_{X \rightarrow x} \frac{\sqrt{X} - \sqrt{x}}{X - x} = \lim_{X \rightarrow x} \frac{\sqrt{X} - \sqrt{x}}{(\sqrt{X})^2 - (\sqrt{x})^2} = \lim_{X \rightarrow x} \frac{\sqrt{X} - \sqrt{x}}{(\sqrt{X} - \sqrt{x})(\sqrt{X} + \sqrt{x})} = \\ &= \lim_{X \rightarrow x} \frac{1}{\sqrt{X} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

É possível, assim, com mais ou menos trabalho, estabelecer regras práticas de derivação e tabelas de derivadas.

1.1.2 Derivadas parciais

Uma função a uma variável representa uma linha; uma função a duas variáveis representa uma superfície; uma função a n variáveis representará uma hipersuperfície no espaço $n+1$ dimensional.

Define-se derivada parcial da função $z(x,y)$ no ponto P do espaço em ordem a x , $\frac{\partial z}{\partial x}$, à derivada da função $z(x)$ que se obtém “congelando” y , isto é, supondo y constante. Da mesma forma se pode definir $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Calculemos as derivadas parciais da função $z = xy^2$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2 \quad (y^2 \text{ funciona como uma constante})$$



$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2xy \quad (x \text{ funciona como uma constante})$$

1.1.3 Derivadas de funções compostas

As seguintes regras da derivação de funções compostas são fundamentais:

i. $z = z(y(x))$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

ii. $z = z(y_1(x), y_2(x))$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy_1} \cdot \frac{dy_1}{dx} + \frac{dz}{dy_2} \cdot \frac{dy_2}{dx}$$

iii. $z = z(y_1(x, t), y_2(x, t))$

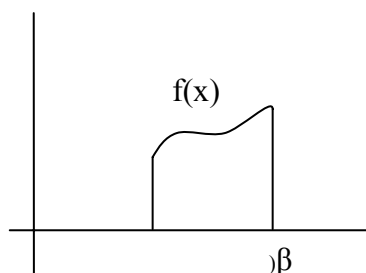
$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy_1} \cdot \frac{dy_1}{dx} + \frac{dz}{dy_2} \cdot \frac{dy_2}{dx}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dy_1} \cdot \frac{dy_1}{dt} + \frac{dz}{dy_2} \cdot \frac{dy_2}{dt}$$

1.2 Integrais múltiplos

1.2.1 Integração de uma função

Considere-se a seguinte função:



Divida-se o intervalo entre α e β em intervalos parcelares arbitrários Δx_i ; de seguida tome-se em cada um desses intervalos um ponto arbitrário p_i e determine-se aí o valor da função $f(p_i)$.

Define-se, então



$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \lim_{\max(\Delta x_i) \rightarrow 0} \sum f(p_i)\Delta x_i$$

que é independente da forma da divisão em intervalos e dos pontos p_i escolhidos. Este integral definido (um valor definido, um número) é a área entre a curva $f(x)$ e o eixo das abcissas.

Conclui-se, de imediato, que se \mathbf{m} for um mínimo de $f(x)$ no intervalo $\{\alpha, \beta\}$ e \mathbf{M} um máximo da função nesse mesmo intervalo, então

$$m(\beta - \alpha) \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \leq M(\beta - \alpha)$$

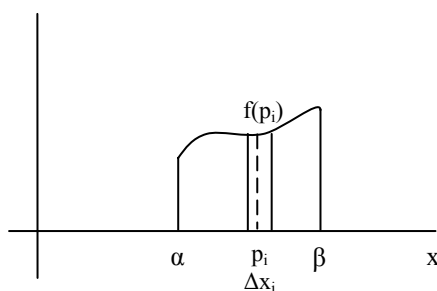
que é conhecido como o teorema do valor médio para integrais definidos.

Partindo deste teorema, é possível chegar à definição de primitiva ou integral indefinido de $f(x)$; de facto, a primitiva de $f(x)$, $F(x)$, é toda a função que satisfaça a seguinte condição:

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

1.2.2 Integrais duplos

Quando se introduziu o integral definido, dividiu-se a área sob a curva $f(x)$ em pequenos rectângulos.



Primeiro calculou-se a área desses pequenos rectângulos

$$\sum_i f(p_i)\Delta x_i$$

e só depois é que se passou ao limite de modo a obter o integral definido

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \lim_{\max(\Delta x_i) \rightarrow 0} \sum f(p_i)\Delta x_i$$

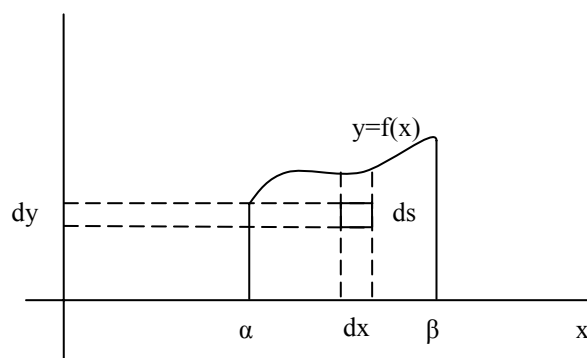


O integral definido pode ser interpretado como o limite dessa soma. O sinal \int_{α}^{β} pode ser entendido como um sinal limite do sinal Σ e o integrando $f(x)dx$ pode ser visto como uma área infinitesimal rectangular.

O processo de cálculo dessa área reduz-se, assim, ao de definir uma área infinitesimal a integrar.

Poder-se-ia ter escolhido um elemento de área ainda mais pequeno. O mais pequeno elemento de área que se pode definir é o chamado elemento de área em coordenadas cartesianas

$$ds = dx dy$$



Agora para calcular a área total sob a curva, calcula-se primeiro a área correspondente ao retângulo do primeiro processo. Nesse cálculo, x é tomado constante.

$$\int_0^{f(x)} dy dx = f(x) dx$$

Depois segue-se o primeiro processo

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$$

Este procedimento pode ser resumido da seguinte forma:

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \int_0^{f(x)} dy dx$$

o que constitui um integral duplo.

O seu cálculo segue o processo inverso do da derivação parcial. Primeiro, integra-se em ordem a dy , considerando x como uma constante; depois, integra-se em ordem a dx , considerando y como uma constante.



Neste exemplo, a utilidade do integral duplo não é muito aparente, uma vez que se pode calcular a área muito mais facilmente utilizando o integral simples. Contudo, imagine-se que se pretende calcular, por exemplo, o volume sob uma superfície - entre o plano xy e a superfície $z(x,y)$.

Pode tomar-se como elemento de área $ds = dx dy$ no plano xy e depois associar a esse elemento de área uma altura $z = z(x,y)$, definido um volume infinitesimal prismático.

O volume total será dado por

$$\iint z(x,y) dx dy$$

Imagine-se, por exemplo, que se quer o volume sob a superfície $z = xy^2$ entre os limites $x=1$ e $x=2$ para a coordenada x e $y=0$ e $y=2$ para a coordenada y . O volume é, então

$$\int_1^2 \int_0^2 xy^2 dy dx$$

Primeiro integra-se em ordem a y , considerando x constante e depois integra-se em ordem a x . Assim sendo, vem

$$V = \int_1^2 x \cdot \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^2 dx = \int_1^2 x \cdot \frac{8}{3} dx = \int_1^2 \frac{8}{3} x dx = \frac{8}{3} \cdot \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 = 4$$

A ordem de integração, neste exemplo, é arbitrária, porque os limites são constantes puras.

1.2.3 Integrais triplos

No exemplo anterior, poder-se-ia ter calculado o mesmo volume usando um elemento de volume ainda menor: o elemento de volume em coordenadas cartesianas

$$dV = dx dy dz$$

O volume seria, então, dado por

$$\int_1^2 \int_0^{xy^2} \int_0^2 dz dy dx = \int_1^2 \int_0^2 xy^2 dy dx$$

Aqui, a ordem já não é arbitrária, pois o limite superior de integração em z depende de x e y .

Mais uma vez, parece desnecessário recorrer ao integral triplo. Mas imagine-se outro problema: pretende-se determinar a massa de um prisma, sabendo que a sua massa específica é uma função do ponto dada por

$$\rho = e^{-xy} \cdot yz$$



O prisma tem por limites

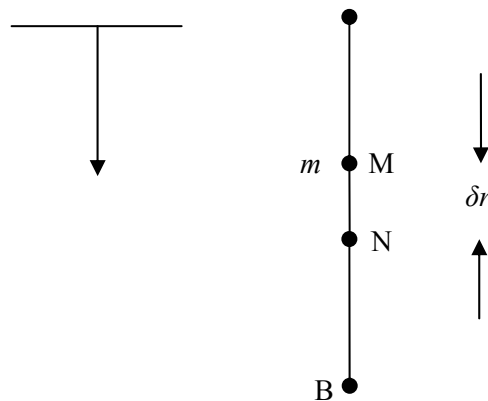
$$\begin{aligned} 1 < x < 2 \\ 0 < y < 2 \\ 0 < z < 4 \end{aligned}$$

O problema pode ser resolvido por

$$\begin{aligned} M &= \int_0^4 \int_0^2 \int_1^2 (e^{xy} \cdot yz) dx dy dz = \int_0^4 \int_0^2 yz \cdot \left[\frac{e^{xy}}{y} \right]_1^2 dy dz = \int_0^4 \int_0^2 z \cdot (e^{2y} - e^y) dy dz = \int_0^4 z \cdot \left[\frac{e^{2y}}{2} - e^y \right]_0^2 dz = \\ &= \int_0^4 z \cdot 18,55 dz = 18,55 \cdot \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^4 = 148,41 \end{aligned}$$

1.2.4 Integral de linha

Considere-se um objecto com massa m colocado num campo gravítico. Como a força gravítica é um vector, o campo gravítico é um exemplo de um campo vectorial. A força gravítica na massa é dada por $m\mathbf{g}$, em que \mathbf{g} é um vector constante chamado aceleração gravítica. Supondo que se larga a massa e ela cai a partir do ponto A . O deslocamento vertical medido na direcção descendente a partir de A é r . O trabalho feito pela força gravítica causa o deslocamento da massa. Pretende-se calcular o trabalho feito para mover a massa de A até B , como na figura.



O trabalho feito para deslocar a massa do ponto M para o ponto N , correspondente a uma distância elementar δr . A física diz que o trabalho feito é igual ao produto da amplitude da força pela distância percorrida. Neste caso, a amplitude da força presente é dado por $m\mathbf{g}$ e a quantidade elementar δW , quando a massa se desloca de M para N é dada por

$$\delta W = m \cdot g \delta r$$



donde se tira $\frac{\delta W}{\delta r} = m \cdot g$. Fazendo $\delta r \rightarrow 0$, obtém-se

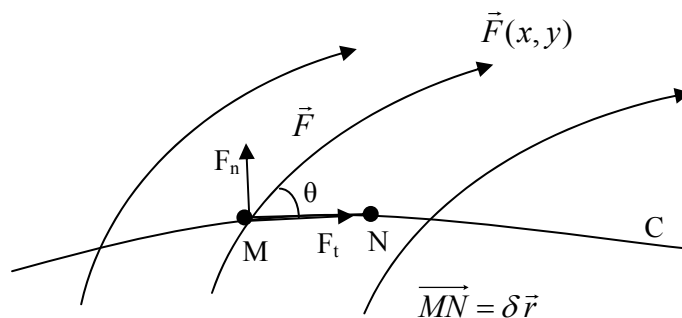
$$\lim_{\delta r \rightarrow 0} \frac{\delta W}{\delta r} = \frac{dW}{dr} = m \cdot g$$

Para se obter o trabalho total feito quando a massa se desloca de A para B , calcula-se o integral para o intervalo de interesse, isto é

$$\text{trabalho total feito} = W = \int_A^B m \cdot g \, dr.$$

Este é exemplo elementar de um integral de linha. Esta denominação vem do facto de se estar a integrar ao longo da linha de A até B .

No caso anterior, o cálculo foi directo e simples, devido à particularidade do exemplo. Considere-se agora o caso em que se tem um campo vectorial, \vec{F} , através do qual passa uma curva C , como na figura seguinte.



A análise seguinte vai se restringir a duas dimensões. No caso geral, o campo vectorial vai variar com o espaço, isto é, $\vec{F} = \vec{F}(x, y)$. Considere-se que o elemento pequeno de C e que junta os pontos M e N e seja θ o ângulo entre a tangente da curva C no ponto M e a direcção do campo nesse ponto. Seja o vector que une M e N $\delta \vec{r}$. Considerando a quantidade

$$\vec{F} \cdot \delta \vec{r}$$

em que \cdot representa o produto escalar. Se \vec{F} representar a força gravítica, então a quantidade $\vec{F} \cdot \delta \vec{r}$ representa a pequena quantidade de trabalho feito pelo campo ao mover uma partícula de massa unitária entre o ponto M e o ponto N . O integral apropriado ao longo de toda a curva representa o trabalho total efectuado. Assim, tem-se

$$\vec{F} \cdot \delta \vec{r} = |\vec{F}| \cdot |\delta \vec{r}| \cdot \cos \theta = (|\vec{F}| \cdot \cos \theta) \cdot |\delta \vec{r}| = F_t \cdot \delta r$$



em que F_t é a componente de \vec{F} tangencial à curva C. Este resultado é do mesmo tipo das expressões para o trabalho obtido anteriormente. Então está-se interessado em integrais do tipo

$$\int_C \vec{F}(x, y) \cdot d\vec{r} .$$

Dado que \vec{F} é uma função vectorial de x e de y, então \vec{F} terá componentes cartesianas $F_x(x, y)$ e $F_y(x, y)$, pelo que pode ser escrito na forma

$$\vec{F}(x, y) = F_x(x, y)\vec{i} + F_y(x, y)\vec{j} .$$

De igual modo, pode definir-se

$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$$

donde se tira

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_C (F_x(x, y)\vec{i} + F_y(x, y)\vec{j}) \cdot (dx\vec{i} + dy\vec{j}) = \int_C F_x(x, y) \cdot dx + F_y(x, y)dy .$$



2 Campos escalares e vectoriais

2.1 Introdução

Um campo é, grosso modo, um ente físico que toma diferentes valores em pontos distintos do espaço. A posição do ponto do espaço determina o valor do campo no ponto a cada instante.

A grandeza física pode ser um escalar. Tem-se, então, uma função das três coordenadas do ponto. A temperatura numa sala é em campo escalar.

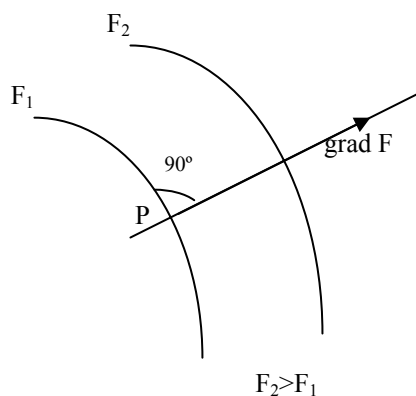
O ser físico também pode ser de natureza vectorial. As velocidades das partículas dum fluido em movimento, por exemplo a água, formam um campo vectorial. A cada ponto do espaço (onde está o fluido) está associado um vector.

Os campos vectoriais podem ser representados por vectores, pelas tangentes, em cada ponto, ao vector correspondente a esse ponto – as chamadas linhas de força do campo – ou por superfícies a que estas linhas são perpendiculares – as superfícies de nível do campo. Num campo escalar são as superfícies onde o campo é constante.

2.2 Gradiente de um campo escalar

Dado um campo escalar $F(P, t)$ é possível, com algumas restrições matemáticas que aqui não serão abordadas, definir um novo campo a partir dele, sendo este novo campo um campo vectorial, chamado gradiente do campo escalar.

A cada ponto do espaço, associa-se um vector que tem a direcção e o sentido segundo os quais o campo escalar cresce mais rapidamente e o seu módulo é, justamente, o valor desse crescimento, por unidade de comprimento. Esse vector é perpendicular às superfícies de igual valor do campo escalar – as suas superfícies de nível.



$$\text{grad}F = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta x}$$

O gradiente de F é calculável directamente a partir de F ; se o campo estiver expresso em coordenadas cartesianas $F(x, y, z, t)$ é

$$\text{grad}F = \frac{\partial F}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z} \vec{k}$$



Como ao longo de uma superfície equipotencial F não varia, definindo um vector u tangente à superfície, tem-se

$$\text{grad}F | \vec{u} = 0$$

Logo, $\text{grad} F$ tem de ser perpendicular à superfície de nível que passa por P.

2.2.1 Operador Nabla

O operador nabla, ∇ , é definido por

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

logo

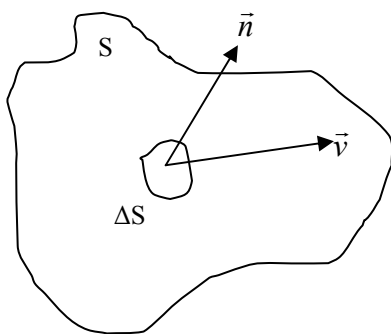
$$\text{grad}F = \nabla F$$

2.3 Fluxo de um campo vectorial

Fluxo: “quantidade” que passa por uma superfície por unidade de tempo.

Exemplo: quantidade de água que passa através de uma dada secção de uma conduta (por exemplo) por unidade de tempo.

Suponha-se uma superfície S e defina-se uma superfície elementar ΔS sobre ela. Seja \vec{n} o versor normal a ΔS . Seja \vec{v} um campo vectorial, por exemplo, o campo de velocidade de água.



A quantidade $\vec{v} | \vec{n} \Delta S$, obtida projectando \vec{v} , a velocidade da água, na direcção da normal e multiplicando pela área ΔS , dá o volume de água que atravessa essa superfície elementar por unidade de tempo.

Se se pretender saber qual o volume de água que passa por unidade de tempo toda a superfície, ter-se-ia de considerar outras superfícies elementares e somar as quantidades correspondentes.



Como a superfície considerada é contínua, considera-se uma superfície infinitesimal, dS , e substitui-se, no limite, a soma por um integral, obtendo-se, desse modo, o fluxo do campo \vec{v} através da superfície S , ϕ_S .

$$\phi_S = \iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS$$

A noção de fluxo permite deduzir um campo escalar a partir de um campo vectorial.

2.4 Divergência

Suponha-se um ponto qualquer do espaço, P , e considere-se uma superfície fechada, S , que o contém. Chama-se divergência do campo vectorial no ponto P a:

$$\text{div } \vec{v} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oiint_S \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS}{\Delta V}$$

Por outras palavras, calcula-se o fluxo que sai através da superfície fechada que contém o ponto (o símbolo \oiint significa integração sobre uma superfície fechada) e divide-se pelo volume limitado por essa superfície, ΔV . Depois, calcula-se o limite deste quociente quando o volume tende para zero. Isso equivale a considerar o fluxo através de superfícies cada vez mais apertadas englobando o ponto. No limite está-se a calcular o fluxo através de uma superfície que engloba à justa o ponto.

Se este limite, a divergência, for nulo, o ponto é um ponto normal, por onde a água simplesmente passa. Isso significa que a água que entra por um lado da superfície sai pelo outro.

Contudo, se o limite não for nulo, o ponto é divergente do normal, ou seja, tem divergência não nula. Se for positivo, isso significa que está a ser criada água nesse ponto, ou então está a ser introduzida do exterior. Se se pensar no espaço que se está a estudar como uma banheira, o ponto é uma torneira pontual. Se, ao contrário, a divergência for negativa, a água está desaparecer nesse ponto, é um ralo.

Então, a partir do campo vectorial inicial, definiu-se um novo campo escalar e a cada ponto do espaço está associado um escalar, a divergência do campo vectorial.

A divergência pode calcular-se directamente a partir do campo vectorial por uma expressão matemática que se deduz directamente da definição. De facto, exprimindo o campo vectorial em coordenadas cartesianas, vem

$$\vec{v}(x, y, z, t) = v_x(x, y, z, t)\vec{i} + v_y(x, y, z, t)\vec{j} + v_z(x, y, z, t)\vec{k}$$

e

$$\text{div } \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \nabla \cdot \vec{v}$$



2.4.1 Teorema de Green-Ostrogradsky

Um teorema muito importante é o teorema de Green-Ostrogradsky:

$$\oiint_S \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_V \text{div } \vec{v} \, dV$$

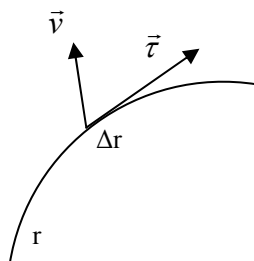
Este teorema é fácil de entender a partir do exemplo da banheira (referido anteriormente, podendo, mesmo, chamá-lo de “teorema das banheiras”); este teorema diz que a água que sai através da superfície S que limita a banheira (superfície fechada) é igual à água que entra pelas torneiras menos a que sai pelos ralos. Há que contar a água que entra ou sai, que é exactamente a divergência nesses pontos ou conjunto de pontos, e somar, ou, no limite, integrar, a todo o volume V .

Dito em termos mais precisos, o teorema diz que o fluxo de um campo vectorial através de uma superfície fechada é igual ao integral da divergência do campo estendido ao volume limitado pela superfície.

2.5 Circulação de um campo vectorial. Rotacional

Uma outra operação sobre campos vectoriais que será aqui abordada é a de circulação do campo ao longo de uma linha. Esta operação é semelhante ao integral de linha, já abordado.

Suponha-se uma linha r e defina-se um comprimento elementar Δr sobre a linha. Seja $\vec{\tau}$ o versor tangente à linha. Seja \vec{v} um campo vectorial.

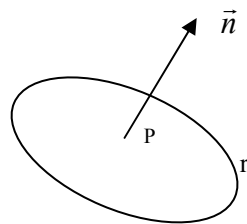


A quantidade $\vec{v} \cdot \vec{\tau} \, \Delta r$ é obtida projectando \vec{v} na direcção da tangente e multiplicando pelo comprimento Δr . Esta quantidade dá a circulação da água, se \vec{v} for o campo de velocidade da água, ao longo do comprimento Δr . Para calcular a circulação ao longo da linha, haveria que somar estas circulações elementares e, no limite, integrar, obtendo-se

$$C_r = \int_r \vec{v} \cdot \vec{\tau} \, dr$$

A noção de circulação permite definir, a partir do campo vectorial \vec{v} , um novo campo escalar.

Suponha-se um ponto no espaço P e considere-se uma direcção definida por um versor \vec{n} . Considere-se uma linha fechada num plano perpendicular a \vec{n} , englobando o ponto P .



Define-se como componente de um vector, chamado rotacional do campo \vec{v} , segundo \vec{n} , como

$$\text{rot } \vec{v} | \vec{n} = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{v} | \vec{\tau} dr}{\Delta r}$$

Calcula-se, assim, a circulação do campo ao longo da linha fechada r , divide-se pela área limitada pela linha Δr e obtendo-se o limite quando Δr tende para zero. Isso equivale a considerar linhas fechadas cada vez mais ajustadas ao ponto P .

Se o limite for nulo, isto é, se o rotacional não tiver componente segundo a direcção definida por \vec{n} , isso significa que não há circulação na linha r . Mas, se for não nulo, no limite, quando a linha se fecha cada vez mais, isso significa que há um vórtice de um redemoinho no ponto que tem componente segundo \vec{n} e provoca rotação da água na linha.

Agora, está-se a associar, a cada ponto, um novo vector e, portanto, a definir um novo campo, o rotacional do campo inicial. Precisamente porque é um vector, vai ter direcção e sentido. Como a divergência pode ser entendida como dando a quantidade de água que entra ou sai, respectivamente numa torneira ou ralo, o rotacional pode ser entendido como uma colher que provoca uma rotação da água em torno de si própria. Naturalmente, tem-lhe associada uma direcção e sentido, a ele e ao vórtice que cria.

O rotacional também se pode calcular directamente a partir do campo vectorial. A partir da definição, deduz-se, para um campo expresso em coordenadas cartesianas

$$\text{rot } \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

em que o determinante deve ser desenvolvido segundo a primeira linha, ficando

$$\text{rot } \vec{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \vec{i} - \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

Atendendo à definição de produto vectorial, é imediato constatar que

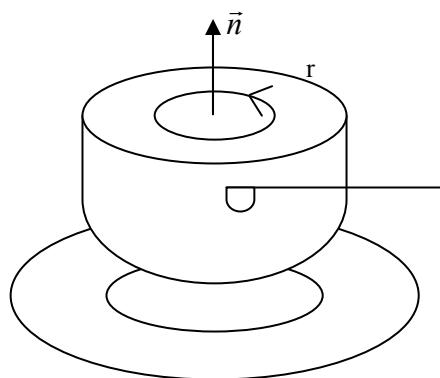
$$\text{rot } \vec{v} = \nabla \times \vec{v}$$



Existe um teorema que relaciona um campo vectorial com o seu rotacional, o teorema de Stokes

$$\oint \vec{v} \cdot \vec{\tau} \, dr = \iint_S \text{rot } \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS$$

O teorema entende-se bem pensando o que acontece numa chávena de café, sendo, por isso, aceitável chamar-lhe teorema das chávenas de café. Suponha-se, então, que se pretende calcular a circulação do café ao longo do bordo da chávena; quer dizer, o percurso r é o bordo da chávena. Então, tem de se contar as colheres que se metem na chávena. Contudo, nem todas as colheres dão rotação como a que se quer. Se se conseguisse meter uma colher como mostra a figura, em paralelo ao plano do bordo, e do pires, não se conseguia a rotação do café como o pretendido, por mais que se rodasse a colher. Quer isto dizer que tem de se contar as “partes úteis” das colheres, a sua projecção na normal ao bordo da chávena, $\text{rot } \vec{v} \cdot \vec{n}$. Contar significa, no limite, integrar a toda a superfície do bordo. E, assim, se obtém o fluxo de colheres, ou fluxo do rotacional, através da superfície, $\iint_S \text{rot } \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS$.



Em termos matemáticos, o teorema diz que a circulação de um campo vectorial ao longo de uma linha fechada é igual ao fluxo do rotacional do campo através da superfície limitada pela linha.

2.6 Determinação de campos vectoriais

Só há duas maneiras de criar um campo vectorial: criando torneiras e/ou ralos, ou introduzindo colheres. Pense-se, por exemplo, numa banheira cheia de água: só há duas maneiras de a pôr em movimento: uma é abrir uma torneira ou um ralo. As partículas de água vão, então, da torneira para o ralo. A outra maneira é introduzindo uma colher e rodando-a; as partículas de água andam, então, à volta da colher em circuito fechado.

Dito de outro modo, só há duas maneiras de criar um campo vectorial. Uma é criar pontos de divergência não nula. Então, as linhas de força do campo (às quais o campo é tangente) vão dos pontos de divergência positiva para os pontos de divergência negativa. Outra forma é criar pontos com rotacional não nulo. Então, as linhas de força do campo são fechadas sobre si. O campo definido apenas por pontos de divergência



não nula, chamam-se irrotacionais; os definidos apenas por pontos de rotacional não nulo, chamam-se solenoidais.

Então, dar a divergência e o rotacional do campo vectorial, é caracterizar, completamente, o campo.

2.7 Operações sobre os campos

Dado agora um campo, escalar ou vectorial, vários outros campos podem ser derivados a partir dos campos gradiente, divergência e rotacional.

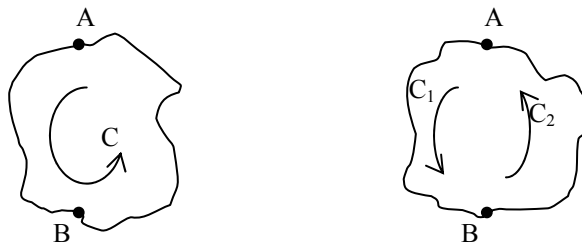
Por exemplo, é fácil mostrar, aplicando as respectivas expressões, que

$$\text{rot grad } F = \vec{0}$$

O teorema das chávenas de café implica, imediatamente, que

$$\oint_C \text{grad } F | \vec{\tau} \, dr = \iint_S \text{rot grad } F | \vec{n} \, dS = 0$$

A circulação do gradiente de um campo escalar ao longo de uma linha fechada é sempre nula. Isso implica que a circulação entre dois pontos quaisquer não depende do trajeto.



$$C = 0 \Rightarrow C_1 + C_2 = 0$$

ou

$$\int_A^B \text{grad } F \, ds + \int_B^A \text{grad } F \, ds = 0$$

ou

$$\int_A^B \text{grad } F \, ds = - \int_B^A \text{grad } F \, ds$$

Mostra-se, até, que

$$\int_A^B \text{grad } F \, ds = F_B - F_A$$



Isto é, a circulação do gradiente do campo F do ponto A ao ponto B não depende do trajecto e é igual ao valor do campo F no ponto de chegada menos o valor do campo F no ponto de partida.

Inversamente, se um campo vectorial tem circulação nula num percurso fechado ou, dito de outra forma, é irrotacional, então existe um campo escalar que é gradiente, isto é

$$\text{rot } \vec{v} = 0 \quad \text{ou} \quad \oint_s \vec{v} \cdot \vec{\tau} \, ds = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \text{grad } F$$

Geralmente não interessa, dado \vec{v} , determinar F , mas sim o seu simétrico, que tem significado físico:

$$V = -F$$

ficando

$$\vec{v} = -\text{grad } V$$

A V chama-se potencial do campo \vec{v} .

Outra operação combinada, com interesse, é

$$\text{div grad } F$$

Atendendo a que

$$\text{grad } F = \frac{\partial F}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z} \vec{k}$$

e

$$\text{div } \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

conclui-se, pondo $\vec{v} = \text{grad } F$, que

$$\text{div grad } F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$$

Chama-se, a este novo campo, laplaciano do campo escalar F e, usando o operador nabla, pode escrever-se como

$$\text{lap } F = \nabla^2 F$$



Uma operação idêntica pode ser definida sobre um campo vectorial; chama-se laplaciano de um campo vectorial \vec{v} , um novo campo vectorial, cujas componentes são os laplacianos das componentes do campo inicial. Isto é, se $\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$, vem

$$\text{lap } \vec{v} = \nabla^2 \vec{v} = \nabla^2 v_x \vec{i} + \nabla^2 v_y \vec{j} + \nabla^2 v_z \vec{k}$$

com

$$\nabla^2 v_x = \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 v_y = \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 v_z = \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}.$$



3 Electromagnetismo

3.1 Campo Eléctrico

Considere-se a situação em que há duas cargas em dois pontos quaisquer do espaço, distando de si uma distância r . Essas duas cargas vão criar entre si uma força, a força eléctrica, que será de atracção caso as cargas sejam de natureza – sinal – contrária e será de repulsão caso sejam de igual natureza. Essa força será exercida nas duas cargas.

A lei de Coulomb diz que

$$\vec{F}_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \vec{r} = k_e \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \vec{r}$$

em que \vec{r} é o versor da linha recta que une as duas cargas q_1 e q_2 , k_e é a constante de Coulomb e vale aproximadamente $9 \times 10^9 \text{ Nm}^2\text{C}^{-2}$. Caso estejam presentes mais de duas cargas, então a força eléctrica que será exercida em cada carga, será a soma de todas as forças eléctricas criadas por todas as cargas eléctricas.

$$\vec{F}_{e_{total}} = \sum_i \vec{F}_{e_i} = k_e \cdot Q \cdot \sum_i \frac{q_i}{r_i^2} \vec{r}_i$$

em que Q é carga considerada. Se se dividir essa força pelo valor da própria carga, obtém-se a expressão de um campo criado pelas cargas no ponto onde está a carga: o campo eléctrico, que é dado pela equação

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_e}{Q} = k_e \cdot \sum_i \frac{q_i}{r_i^2} \vec{r}_i$$

Como se comprova por esta equação, o campo eléctrico, num dado ponto, não depende da(s) carga(s) aí presente(s), mas sim das outras cargas “vizinhas” desse ponto; o campo eléctrico é um campo exterior à carga.

Devido ao sinal de Q , o campo eléctrico, num dado ponto, pode ser contrário ou não à força eléctrica exercida nessa carga; se a carga for positiva, então a força eléctrica e o campo eléctrico terão o mesmo sentido e a mesma direcção; caso a carga Q seja negativa, então a força eléctrica exercida nessa carga terá a mesma direcção do campo eléctrico nesse ponto, contudo o sentido será o oposto.

Até agora, consideraram-se cargas cujas distâncias entre si são relativamente grandes; acontece que, muitas vezes, as cargas estão muito juntas em comparação com as distâncias aos pontos do campo; nessa situação, o sistema de cargas pode ser considerado contínuo, isto é, assume-se que o sistema de cargas muito juntas seja equivalente a uma carga total distribuída continuamente num certo volume ou numa certa superfície.

Para calcular o campo eléctrico de uma distribuição contínua de cargas, divide-se a carga em pequenos elementos, cada um com uma carga Δq , calcula-se o campo eléctrico



criado por essa carga e depois, aplicando o princípio da sobreposição, somam-se todos os campos criados por todas as cargas, resultando

$$\Delta \vec{E} = k_e \cdot \frac{\Delta q}{r^2} \vec{r}$$

$$\vec{E} = k_e \cdot \lim_{\Delta q_i \rightarrow 0} \sum_i \frac{\Delta q_i}{r_i^2} \vec{r}_i = k_e \cdot \int \frac{dq}{r^2} \vec{r}$$

Na realização destes cálculos é conveniente ter a noção de densidade de carga; caso a carga Q esteja uniformemente distribuída por uma linha de comprimento l , então a densidade de carga por unidade de comprimento, ρ_{Ql} , é dada por

$$\rho_{Ql} = \frac{Q}{l}$$

Caso a carga esteja distribuída uniformemente por uma superfície de área S , então a densidade de carga por unidade de área, ρ_{QS} , é dada por

$$\rho_{QS} = \frac{Q}{S}$$

Por fim, se a carga estiver uniformemente distribuída por um volume V , então a densidade de carga por unidade de volume, ρ_{QV} , é dada por

$$\rho_{QV} = \frac{Q}{V}$$

Caso a carga não esteja uniformemente distribuída numa linha, superfície ou volume, então as densidades de carga correspondentes são dadas por

$$\rho_{Ql} = \frac{dQ}{dl} \quad \rho_{QS} = \frac{dQ}{dS} \quad \rho_{QV} = \frac{dQ}{dV}$$

onde dQ é a quantidade de carga num elemento de linha, superfície ou volume.

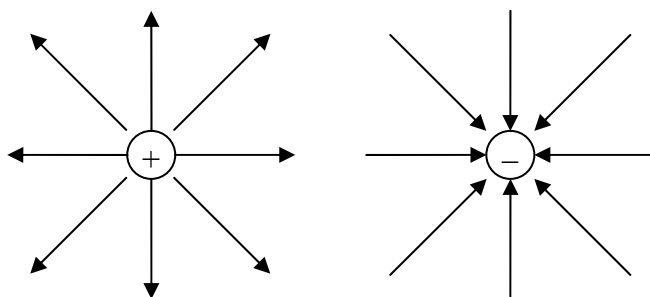
3.1.1 Linhas do campo eléctrico

Uma forma conveniente de visualizar a configuração de um campo eléctrico consiste em traçar curvas que tenham sempre, em, qualquer ponto, a mesma direcção do vector campo eléctrico. Essas linhas, denominadas **linhas do campo eléctrico**, relacionam-se com o vector campo eléctrico, \vec{E} , da seguinte forma:

- o vector campo eléctrico, \vec{E} , é tangente, em cada ponto, à linha do campo eléctrico que passa pelo ponto
- o número de linhas, por unidade de área, que atravessam uma superfície perpendicular às linhas do campo, é proporcional ao valor do campo eléctrico na região (isto quer dizer que, se \vec{E} tiver módulo grande, as linhas do campo estarão muito juntas e se o módulo for pequeno as linhas estarão mais afastadas).



Se se considerar uma carga, q , então as linhas do campo eléctrico terão o seguinte aspecto:



Esta imagem é uma representação bidimensional; na realidade as linhas serão radiais em todas as direcções.

No caso de q ser positiva, colocando uma carga, q_1 , positiva neste campo, esta será repelida pela carga q , pelo que as linhas dirigem-se para fora da carga. No caso de q ser negativa, então essa carga positiva, q_1 , irá ser atraída pela carga q , pelo que as linhas do campo, neste caso, dirigem-se para a carga.

Em qualquer dos casos, as linhas são radiais e estendem-se até ao infinito.

As regras para traçar as linhas do campo eléctrico são as seguintes:

- as linhas dirigem-se das cargas positivas para as cargas negativas
- o número de linhas que sai de uma carga positiva, ou que se aproximam de uma carga negativa, é proporcional ao módulo da carga
- não há cruzamento das linhas do campo eléctrico.

3.1.2 Potencial eléctrico

A força electrostática é conservativa. Assim sendo, é possível associar uma função energia potencial associada a essa força.

Quando se coloca uma carga de prova q_0 , num campo electrostático \vec{E} , a força sobre essa carga é $q_0\vec{E}$; esta força é o somatório de todas as forças individuais exercidas sobre a carga q_0 pelas várias cargas que provocam o campo eléctrico. Como as forças individuais são conservativas, então a força resultante também é conservativa. O trabalho feito pela força $q_0\vec{E}$ é igual ao negativo do trabalho feito por um agente externo que desloca a carga.

Considerando um deslocamento infinitesimal, $d\vec{s}$, o trabalho efectuado pela força $q_0\vec{E}$, dW , é

$$dW = q_0\vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Por definição, o trabalho feito por uma força conservativa é igual ao negativo da variação da energia potencial, dU ; então, pode escrever-se



$$dU = -q_0 \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

No caso de um deslocamento finito da carga de prova, entre dois pontos A e B , a variação da energia potencial é dada por

$$\Delta U = U_B - U_A = -q_0 \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Este integral, que se faz sobre a curva descrita por q_0 ao deslocar-se de A para B , é um integral de linha. Como a força $q_0 \vec{E}$ é conservativa, então este integral não depende do percurso entre A e B .

A diferença de potencial entre os pontos A e B , $V_B - V_A$, é definida como sendo a variação da energia potencial dividida pela carga q_0 :

$$V_B - V_A = \frac{U_B - U_A}{q_0} = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Como a energia potencial é um escalar, então o potencial eléctrico também é um escalar.

A última equação define apenas a diferença de potencial entre dois pontos A e B ; por outras palavras só tem sentido as diferenças de V . Para se determinar o potencial eléctrico, muitas vezes toma-se o valor do potencial eléctrico nulo, num dado ponto conveniente. O mais usual é considerar esse ponto colocado no infinito, dizendo-se, nesse caso, que o potencial eléctrico, num dado ponto, é igual ao trabalho necessário, por unidade de carga, para trazer uma carga de prova positiva do infinito até ao ponto considerado.

Fazendo $V_A = 0$ no infinito, o potencial em qualquer ponto P é dado por

$$V_P = - \int_{\infty}^P \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Na realidade, V_P representa a diferença de potencial entre o ponto P e um ponto no infinito.

A unidade do potencial eléctrico é o **Volt (V)**.

Uma unidade relacionada com o Volt, é o **electrão-volt (eV)** que é definido como a energia que um electrão (ou protão) adquire ao mover-se através de uma diferença de potencial de 1 V; uma vez que a carga do electrão é $1,6 \times 10^{-19}$ C, vem que

$$1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$$

Outra forma de relacionar o potencial eléctrico com o campo eléctrico é



$$\vec{E} = -\text{grad } V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}\right)$$

3.1.3 Lei de Gauss

A lei de Gauss diz que o fluxo do campo eléctrico através de uma superfície fechada é igual à carga eléctrica contida no interior dessa superfície a dividir pela permissividade do meio, ϵ , ou seja:

$$\phi_{\vec{E}} = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon}.$$

Mais adiante encontra-se a dedução desta lei.

3.2 Corrente eléctrica e lei de Ohm

3.2.1 Corrente eléctrica

Sempre que existir um movimento de cargas do mesmo sinal numa dada direcção, diz-se que há uma corrente eléctrica. Em termos mais precisos, suponha-se que as cargas se movem numa direcção perpendicular a uma dada superfície; diz-se que a corrente é igual à taxa de passagem de cargas através dessa superfície; se ΔQ for a quantidade de carga que passa através dessa área no intervalo Δt , a corrente média, I_m , é dada pela razão

$$I_m = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

Se a taxa de passagem de carga variar com o tempo, a corrente também varia com o tempo; define-se corrente instantânea, I , como sendo

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

A unidade da corrente eléctrica é o **Ampère** (A).

Por convenção, escolhe-se como sentido positivo da corrente eléctrica o sentido do movimento das cargas positivas; logo, a corrente eléctrica será uma grandeza vectorial.

Define-se densidade de corrente como a corrente por unidade de área, ou número de cargas por unidade de área por unidade de tempo, e representa-se por j ; a unidade de densidade de corrente é o **Ampère / metro** (Am^{-1}).

$$\vec{j} = \frac{\vec{I}}{S}$$



Se não existir qualquer campo eléctrico aplicado a um condutor, os electrões vão estar em constante movimento, colidindo predominantemente com iões da rede – tal como no caso das moléculas de um gás a uma dada temperatura. Depois de uma dada colisão, o electrão tem igual probabilidade de se deslocar em qualquer direcção, com uma velocidade que se manterá praticamente constante até se dar uma nova colisão. Seja τ o tempo médio entre duas colisões – tempo de colisão.

Ao ser aplicado um campo eléctrico, \vec{E} , a velocidade que o portador de carga – o electrão, cujo valor da carga se representa por e – adquire durante esse intervalo de tempo é

$$v = \tau \cdot a = \tau \cdot \frac{F}{m} = \tau \cdot \frac{E \cdot e}{m}$$

Devido a esta velocidade, denominada de velocidade de arrastamento, que é uma velocidade média, e considerando que o número total de portadores é n , a densidade de corrente torna-se constante, e é dada por

$$\vec{J} = n \cdot e \cdot \vec{v}_d = n \cdot e \cdot \tau \cdot \frac{\vec{E} \cdot e}{m} = \frac{n \cdot e^2 \cdot \tau}{m} \cdot \vec{E}$$

Como τ é dependente do número de obstáculos e da natureza desses obstáculos, torna-se evidente que é constante para cada material e que é característico de cada material. Então, pode escrever-se

$$\vec{J} = \frac{n \cdot e^2 \cdot \tau}{m} \cdot \vec{E} = k \cdot \vec{E}$$

3.2.2 Resistência e lei de Ohm

Como se viu na secção anterior, pode relacionar-se a densidade de corrente com a campo eléctrico, através de

$$\vec{J} = \frac{n \cdot e^2 \cdot \tau}{m} \cdot \vec{E}$$

À constante

$$\sigma = \frac{n \cdot e^2 \cdot \tau}{m}$$

dá-se o nome de condutividade eléctrica de um condutor. Como se pode constatar a condutividade de um condutor vai depender do material com que é feito e é diferente de condutor para condutor.

Pode, assim, escrever-se

$$\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E}$$



Esta é a *lei de Ohm* que afirma que, em muitos materiais (entre os quais, a maior parte dos metais), a razão entre a densidade de corrente e o campo eléctrico é uma constante, que é independente do campo eléctrico que provoca a corrente.

Considere-se que o campo eléctrico é uniforme num condutor de comprimento l ; pode relacionar-se o campo eléctrico com a diferença de potencial entre os pontos extremos do condutor por

$$V = E \cdot l$$

Como

$$J = \frac{I}{S}$$

vem

$$\sigma = \frac{J}{E} = \frac{I/S}{V/l} = \frac{I \cdot l}{V \cdot S} \Leftrightarrow V = \left(\frac{1}{\sigma} \cdot \frac{l}{S} \right) \cdot I$$

O inverso da condutividade é a resistividade e representa-se por ρ ; ou seja $\rho = 1 / \sigma$.

A última equação pode, então, ser escrita da seguinte forma

$$V = R \cdot I$$

em que

$$R = \left(\frac{1}{\sigma} \cdot \frac{l}{S} \right)$$

é a resistência do condutor e a sua unidade é o **Ohm** (Ω).

3.3 Campo Magnético

O fenómeno do magnetismo era conhecido dos gregos, quando estes observaram que certas pedras, actualmente denominadas de *magnetite*, atraíam pedaços de ferro.

O vector campo magnético \vec{B} , analogamente ao campo eléctrico e ao campo gravítico, pode ser definido em função da força (de natureza magnética) exercida num corpo de prova. A questão ficará, assim, reduzida a definir qual esse corpo. A unidade do campo magnético é o **Tesla** (T).

Considere-se uma região do espaço em que não existe qualquer campo eléctrico ou gravítico; só existe um campo magnético. As experiências com o movimento de partículas carregadas electricamente, nessas regiões, levaram às seguintes observações:



- a) há uma força presente, a força magnética, que é proporcional à carga q e ao módulo da velocidade v da partícula
- b) o módulo e a direcção da força magnética dependem da velocidade da partícula e da direcção e módulo do campo magnético
- c) quando uma partícula se move numa paralela ao vector campo magnético, a força magnética exercida sobre a partícula é nula
- d) se o vector velocidade fizer um ângulo θ com o vector campo magnético, a força magnética actua numa direcção perpendicular a \vec{v} e a \vec{B} ; por outras palavras, a força magnética é perpendicular ao plano definido por \vec{v} e \vec{B}
- e) a força magnética exercida sobre uma carga positiva tem sentido oposto à força magnética exercida sobre uma carga negativa que se mova com o mesmo vector velocidade
- f) se o vector velocidade fizer um ângulo θ com o vector campo magnético, o módulo da força magnética é proporcional a $\sin \theta$.

Estas observações podem resumir-se na seguinte equação:

$$\vec{F}_m = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

Esta força tem a direcção dada pela direcção de $\vec{v} \times \vec{B}$, que, pela definição de produto vectorial, é perpendicular a \vec{v} e a \vec{B} ; o sentido da força é, assim, dado pela regra da mão direita (ou do saca-rolhas).

Na secção anterior considerou-se que as cargas presentes no campo eléctrico estavam paradas. Contudo, como elas vão estar sujeitas a uma força – a força eléctrica, o mais natural é moverem-se; mesmo que, num dado ponto, a força eléctrica seja nula, se a carga já estiver em movimento, então ela continuará a mover-se. Qual a consequência, se alguma, desse movimento?

É óbvio que, quando num campo eléctrico, a carga se move e que a sua velocidade seja “influenciada” pelo campo eléctrico. Por outro lado, já se viu que uma carga em movimento, quando em presença de campo magnético, vai “sofrer” os efeitos da existência desse campo. É, assim, natural que a presença simultânea de um campo eléctrico e de um campo magnético, também influencie o seu movimento. Quando tal acontece, existe uma força, a força de Lorenz, que é dada por

$$\vec{F}_L = q \cdot (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

3.3.1 Lei de Biot-Savart

Uma agulha, quando magnetizada, é desviada pela corrente eléctrica de um condutor. Um condutor, com uma corrente permanente, exerce uma força sobre um íman; tal foi descoberto por dois físicos, Biot e Savart. Com as experiências que estes dois físicos fizeram, foi possível chegar a uma expressão que relaciona o campo magnético, num dado ponto do espaço, com a corrente que o cria. A *lei de Biot-Savart* diz que, se um fio condutor é atravessado uma corrente I , o campo magnético $d\vec{B}$ num ponto P , associado a um elemento do condutor $d\vec{s}$, tem as seguintes propriedades:



- o vector $d\vec{B}$ é perpendicular a $d\vec{s}$ (que tem a mesma direcção da corrente) e ao vector unitário \vec{r} , dirigido do elemento do condutor até ao ponto P
- o módulo de $d\vec{B}$ é inversamente proporcional a r^2 , onde r é a distância entre o elemento do condutor e o ponto P
- o módulo de $d\vec{B}$ é proporcional à corrente e ao comprimento ds do elemento do condutor
- o módulo de $d\vec{B}$ é proporcional a $\sin \theta$, onde θ é o ângulo entre os vectores $d\vec{s}$ e \vec{r} .

Estas observações levaram à lei de Biot-Savart que é descrita pela equação

$$d\vec{B} = k_m \cdot \frac{Id\vec{s} \times \vec{r}}{r^2}$$

em que k_m é uma constante está relacionada com a permeabilidade magnética, μ_0 , por

$$k_m = \frac{\mu_0}{4\pi}$$

Assim, a lei de Biot-Savart pode ser escrita como

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Id\vec{s} \times \vec{r}}{r^2}$$

De notar que esta lei apenas dá o valor do vector campo magnético devido a um pequeno elemento do condutor. Para se determinar o campo magnético total, \vec{B} , é necessário calcular o integral em todos os elementos do condutor em que há corrente

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{r^2}$$

3.3.2 Lei de Ampère

Uma experiência muito simples, demonstra, com muita evidência, que um condutor com uma corrente gera um campo magnético. Nesta experiência, colocam-se várias bússolas num plano horizontal, na vizinhança de um fio condutor comprido na vertical. Quando não há corrente no fio, todas as bússolas apontam na mesma direcção (na direcção do campo magnético da Terra), tal como esperado. Contudo, se o fio for percorrido por uma corrente constante e forte, todas as bússolas vão desviar-se numa direcção tangente a um círculo em torno do fio. As observações mostram que a direcção de \vec{B} é a que é dada pela regra da mão direita. Quando se inverte a corrente, os desvios das bússolas também são invertidos.

Uma vez que as agulhas das bússolas apontam na direcção de \vec{B} , conclui-se que as linhas de \vec{B} são círculos em torno do fio. Por simetria, o módulo de \vec{B} é o mesmo em qualquer ponto de um círculo que tenha o centro no fio e que esteja num plano perpendicular ao fio. Alterando a corrente e a distância r ao fio, verifica-se que \vec{B} é proporcional à corrente e inversamente proporcional à distância ao fio.



Numa curva circular centrada no fio, os vectores \vec{B} e $d\vec{l}$ são paralelos entre si, pelo que o produto $\vec{B} \cdot d\vec{l}$ fica $B \cdot dl$. Sobre este círculo, \vec{B} tem módulo constante. Assim sendo, o produto $\vec{B} \cdot d\vec{l}$ ao longo de toda a linha é dado por

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \oint_C dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} (2\pi r) = \mu_0 I$$

Este resultado é conhecido com lei de Ampère e foi obtido para um caso particular de um círculo envolvendo um fio. Contudo, esta lei pode ser aplicada ao caso geral, no qual uma curva fechada arbitrária é percorrida por uma corrente constante. Por outras palavras, a lei de Ampère diz que a circulação do campo magnético ao longo de uma linha fechada é igual ao produto da corrente constante total que passa por qualquer superfície limitada por essa curva fechada, pela permeabilidade magnética do meio. Esta lei só é válida para correntes constantes.

3.4 Campo electromagnético

3.4.1 Equações de Maxwell

O campo electromagnético é formado por dois campos vectoriais: o campo eléctrico e o campo magnético. São caracterizados definindo as suas torções (e raios) e as suas colheres, isto é, a sua divergência e o seu rotacional. As equações que fazem essas definições são as equações de Maxwell:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon} & \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu \cdot \vec{J} + \varepsilon \cdot \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

Nestas equações, ρ é a densidade de carga e \vec{J} é a densidade de corrente. Se ρ_m for a densidade de carga móvel e \vec{v} for a velocidade dessa carga,

$$\vec{J} = \rho_m \cdot \vec{v}$$

Por outro lado, a corrente que atravessa uma superfície é o fluxo de densidade de corrente através da superfície:

$$I_S = \iint_S \vec{J} \cdot \vec{n} \, dS$$

ε , a permissividade eléctrica e μ , a permeabilidade magnética, são constantes características do meio onde se estudam os campos.

As equações de Maxwell podem, agora, ler-se de forma clara.



De $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$, conclui-se, que os pontos de densidade de carga positiva são torneiras do campo eléctrico e os pontos de densidade de carga negativa, os ralos. As cargas são, englobando uma característica do meio, a permissividade eléctrica, ε , as torneiras e os ralos do campo eléctrico.

Mas o campo eléctrico também é criado por colheres. De $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, conclui-se que a derivada em ordem ao tempo do campo magnético é colher do campo eléctrico.

O campo magnético não é criado por torneiras e ralos, pois $\text{div } \vec{B} = 0$. Não há carga magnética equivalente à carga eléctrica. Mas é criado por colheres. De $\text{rot } \vec{B} = \mu \cdot \vec{J} + \varepsilon \cdot \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, conclui-se que há dois tipos de colheres: a densidade de corrente e a derivada em ordem ao tempo do campo eléctrico. O campo magnético só é criado por colheres, é solenoidal.

É usual definir dois novos campos a partir dos campos \vec{E} e \vec{B} , através das equações

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \varepsilon \vec{E} \\ \vec{B} &= \mu \vec{H}\end{aligned}$$

\vec{D} chama-se deslocamento eléctrico e \vec{H} excitação magnética. Estas duas equações dizem-se equações constitutivas. Uma terceira equação relaciona, nos meios condutores, a densidade de corrente com o campo eléctrico:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

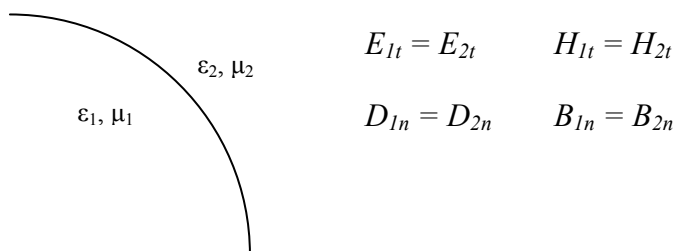
em que σ é a condutibilidade do condutor. Esta equação é outra forma de exprimir a lei de Ohm.

Com estes dois novos campos, as equações de Maxwell podem ser escrever-se:

$$\begin{aligned}\text{div } \vec{D} &= \rho & \text{div } \vec{B} &= 0 \\ \text{rot } \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \text{rot } \vec{H} &= \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\end{aligned}$$

Repare-se que as constantes características da matéria, ε e μ , desapareceram das equações.

Entretanto, temos estado a falar do que se passa num meio caracterizado por uns certos ε e μ . As equações, no entanto, são válidas nas fronteiras entre os meios e delas tiram-se as seguintes equações de fronteira



Ou seja, na fronteira de dois materiais, as componentes tangenciais de \vec{E} e \vec{H} são iguais bem como as componentes normais de \vec{D} e \vec{B} .

3.4.2 Situações Estacionárias

Uma parte importante do estudo do electromagnetismo é o das situações estacionárias. São as situações em que o comportamento macroscópico não é alterado no tempo. Assim sendo, as derivadas em ordem ao tempo nas equações de Maxwell são nulas, ficando

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{D} &= \rho & \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= 0 & \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{J} \end{aligned}$$

O campo magnético, agora chamado magnetostático, continua a ser solenoidal e o campo eléctrico é agora irrotacional, só de torneiras e ralos, chamado agora electrostático.

O campo eléctrico, agora tendo rotacional nulo, é gradiente de um campo escalar. Tomando o simétrico, como visto atrás, vem

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} V$$

A V chama-se potencial eléctrico ou tensão eléctrica e, tal como visto anteriormente,

$$V_B - V_A = \int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Os teoremas das chávenas de café e das banheiras podem aplicar-se aos campos. Aplicando o teorema das banheiras ao campo eléctrico

$$\oiint_S \vec{D} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_V \operatorname{div} \vec{D} \, dV = \iiint_V \rho \, dV = Q$$

onde Q é a carga total no volume. Esta é a lei de Gauss, que diz que o fluxo do deslocamento eléctrico através de uma superfície fechada é igual à carga total no volume definido pela superfície.

Aplicando ao campo magnético, conclui-se que



$$\oiint_S \vec{B} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_V \operatorname{div} \vec{B} \, dV = 0$$

Aplicando o teorema das chávenas de café ao campo eléctrico, obtém-se

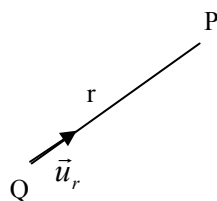
$$\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{\tau} \, ds = \iint_S \operatorname{rot} \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS = 0$$

O mesmo teorema aplicado ao campo magnético resulta em

$$\oiint_S \vec{H} \cdot \vec{\tau} \, ds = \iint_S \operatorname{rot} \vec{H} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_S \vec{J} \cdot \vec{n} \, dS = I_s$$

em que I é a corrente total que atravessa a superfície limitada pela linha. Esta é a lei de Ampère que diz que a circulação do campo excitação magnética ao longo de uma superfície fechada é igual à corrente que atravessa a superfície limitada pela curva.

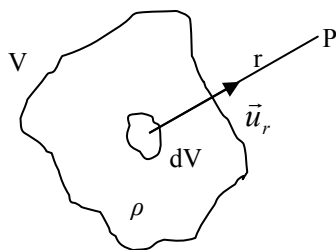
Das equações de Maxwell é possível retirar as expressões dos campos criados por uma carga pontual:



Para o campo eléctrico resulta

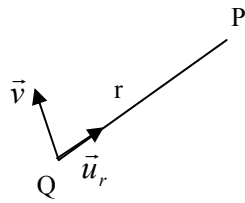
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{Q}{r^2} \vec{u}_r$$

Se se tiver um volume carregado com densidade ρ , então o campo criado pelo volume é o integral dos campos criados por cargas elementares $\rho \, dV$.



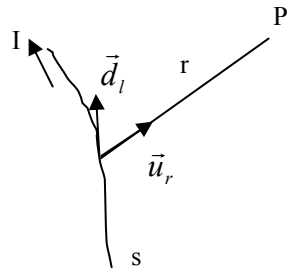
$$\vec{E} = \iiint_V \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{\rho}{r^2} \, dV \vec{u}_r$$

O campo magnético só é criado por cargas em movimento.



$$\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi} \cdot Q \cdot \frac{\vec{v} \times \vec{u}_r}{r^2}$$

Daqui pode passar-se para o campo criado por uma corrente num circuito



$$\vec{B} = \int_s \frac{\mu}{4\pi} \cdot I \cdot \frac{d\vec{l} \times \vec{u}_r}{r^2}$$

Esta expressão para o campo \vec{B} é a lei de Biot-Savart.

É possível determinar as forças que estes campos vectoriais criam.

A força provocada pelo campo eléctrico sobre uma carga q é

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E}$$

O campo magnético só actua sobre outra carga q se ela tiver uma velocidade \vec{v}

$$\vec{F} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

Este capítulo já tinha sido abordado anteriormente, mas aqui fez-se uma análise mais analítica do que tinha sido então descrito.

3.4.3 Situação Geral

A situação geral é mais complexa, embora muitos dos resultados anteriores sejam válidos. As equações de Maxwell nos campos \vec{E} e \vec{B} são, então,

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{rot } \vec{B} = \mu \cdot \vec{J} + \epsilon \cdot \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Uma forma de abordar o problema é a seguinte: pegue-se na equação

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$



Aplique-se o rotacional aos dois membros da equação

$$\text{rot rot } \vec{E} = \text{rot} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)$$

Isto não foi tratado aquando do tratamento de operações múltiplas, mas é fácil mostrar, a partir das respectivas expressões, que

$$\text{rot rot } \vec{E} = \text{grad div } \vec{E} - \nabla^2 \vec{E}$$

Por outro lado, o segundo membro pode escrever-se como

$$\text{rot} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{B}$$

A equação fica, então

$$\text{grad div } \vec{E} - \nabla^2 \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{B}$$

Substituindo das equações de $\text{div } \vec{E}$ e $\text{rot } \vec{B}$, vem

$$\text{grad } \frac{\rho}{\varepsilon} - \nabla^2 \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu \cdot \vec{J} + \varepsilon \cdot \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

que pode ser escrito na forma

$$\nabla^2 \vec{E} - \varepsilon \cdot \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon} \text{grad } \rho + \mu \frac{\partial \vec{J}}{\partial t}$$

Aplicando o operador rotacional à equação que define $\text{rot } \vec{B}$, encontra-se

$$\nabla^2 \vec{B} - \varepsilon \cdot \mu \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = -\mu \cdot \text{rot } \vec{J}$$

Estas duas equações governam o comportamento dos campos \vec{E} e \vec{B} .

Agora não se irão tratá-las com esta generalidade, embora isso seja feito mais tarde. Estas são equações que regem desde o comportamento de circuitos com correntes variáveis no tempo até aos campos electromagnéticos que a partir de aí se projectam no espaço e que constituem, como se verá, ondas electromagnéticas. Para já, vai ser abordado o problema da propagação destes campos no espaço longe dos circuitos que os criaram, não sendo abordado, portanto, o problema da radiação e das antenas.



As equações ficam, então, uma vez que no espaço não há cargas ou densidades de correntes ($\rho = 0$ e $\vec{J} = 0$),

$$\nabla^2 \vec{E} - \varepsilon \cdot \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 \vec{B} - \varepsilon \cdot \mu \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

É fácil ver como é que os campos se propagam. De facto, as equações de Maxwell ficam, na ausência de cargas ou correntes na forma

$$\text{div } \vec{E} = 0$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{rot } \vec{B} = \varepsilon \cdot \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Os dois campos são, agora, ambos solenoidais. A propagação dos campos dá-se porque a derivada em ordem ao tempo de cada um vai sendo a colher do outro.

3.5 Polarização

Quando um material é colocado num meio que tenha um campo eléctrico presente, acontece um fenómeno em que esse material fica carregado electricamente com carga positiva de um lado e negativa do outro. Isso ocorre devido a um “deslocamento” dos electrões maioritariamente para um dos lados da molécula por efeito desse campo eléctrico. Por outro lado, há moléculas em que existe um dipolo eléctrico permanente, originando, assim, um dipolo permanente.

A polarização, \vec{P} , de um material é definida como o momento do dipolo por unidade de volume. Pode, também, ser escrita da seguinte forma

$$\vec{P} = \chi_e \cdot \varepsilon \cdot \vec{E}$$

em que χ_e é a susceptibilidade eléctrica do material.

A carga por unidade de área sobre a superfície de um campo polarizado é igual à componente de polarização \vec{P} na direcção da normal à superfície do corpo.

O deslocamento eléctrico relaciona-se com \vec{E} e \vec{P} do seguinte modo:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \cdot \vec{E} + \varepsilon \cdot \chi_e \cdot \vec{E} = (\varepsilon_0 + \varepsilon \cdot \chi_e) \cdot \vec{E}$$

3.5.1 Equações de Maxwell na Matéria

A densidade de cargas total, agora, é:



$$\rho_{total} = \rho_l + \rho_P$$

em que ρ_l é a densidade de carga livre (em materiais condutores) e ρ_P é a densidade de carga em materiais polarizados.

Assim sendo, a primeira equação de Maxwell vem

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\rho_l}{\epsilon_0} - \frac{\nabla \cdot \vec{P}}{\epsilon_0} \Leftrightarrow \nabla \cdot \vec{D} = \rho_{livre}$$

A segunda e a terceira equação de Maxwell não sofrem alterações.

A quarta equação de Maxwell terá que ter em conta

$$\vec{J} = \vec{J}_{cond} + \vec{J}_{mag} + \vec{J}_{pol}$$

Logo,

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \cdot \left(\vec{J}_{cond} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \nabla \times \vec{M} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \mu_0 \cdot \left(\vec{J}_{cond} + \nabla \times \vec{M} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right)$$

A $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ chama-se densidade de corrente de deslocamento.

Por outro lado

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot (\vec{H} + \vec{M})$$

e

$$\mu_0 \cdot (\nabla \times \vec{M}) = \nabla \times \vec{B} - \mu_0 \cdot (\nabla \times \vec{H})$$

Logo

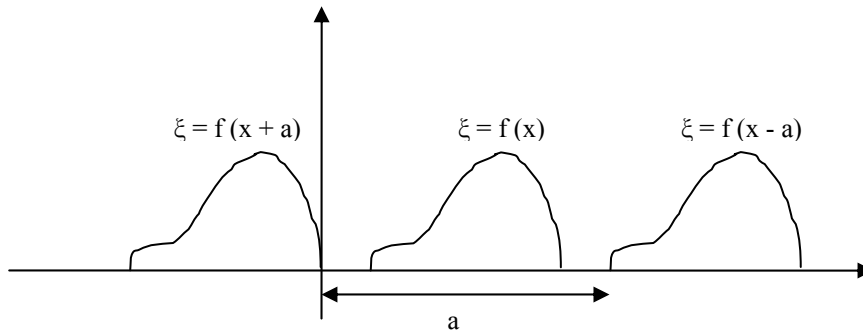
$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_{cond} + \vec{J}_{des}.$$



4 Ondas

4.1 Introdução

Imagine-se a seguinte situação:



Se $a = vt$, em que t é o tempo, obtém-se uma curva “caminhante”, em que $\zeta = f(x - vt)$ representa uma curva que se move para a direita e $\zeta = f(x + vt)$ representa uma curva que se move para a esquerda; em ambos os casos, v representa uma velocidade, chamada velocidade de fase. Resumidamente, pode escrever-se

$$\zeta(x, t) = f(x \pm vt)$$

Esta é uma representação de um movimento ondulatório.

ζ pode representar um grande número de quantidades físicas, tais como a deformação num sólido, a pressão num gás, um campo eléctrico ou magnético, etc.

Um caso particularmente interessante é o caso de ζ ser uma função sinusoidal:

$$\zeta(x, t) = \zeta_0 \sin k(x - vt)$$

Substituindo x por $x + 2\pi/k$, vem

$$\zeta(x, t) = \zeta_0 \sin k(x + 2\pi/k - vt) = \zeta_0 \sin [k(x - vt) + 2\pi] = \zeta_0 \sin k(x - vt) = \zeta(x, t)$$

A $2\pi/k$ é chamado o período espacial, ou comprimento de onda, λ

$$\lambda = 2\pi / k$$

k é designado por número de onda.

Reescrevendo a equação, vem

$$\zeta(x, t) = \zeta_0 \sin k(x - vt) = \zeta_0 \sin (kx - \omega t)$$

em que $\omega = kv = 2\pi v / \lambda$

como $\omega = 2\pi f$, vem $v = \lambda \cdot f$.



4.1.1 Análise de Fourier do movimento ondulatório

De acordo com o teorema de Fourier, qualquer movimento periódico pode ser expresso como uma sobreposição de movimentos harmônicos simples de frequências $\omega, 2\omega, \dots, n\omega, \dots$ (ou períodos $P, P/2, \dots, P/n, \dots$). O mesmo resultado também se aplica a um movimento ondulatório periódico.

Seja

$$\xi(x, t) = f(x - vt)$$

um movimento ondulatório periódico. Tal pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\xi(x, t) = f(x - vt) = f[x - v(t \pm P)] = f(x - vt \pm vP)$$

Isto significa que, para um dado tempo, ξ repete-se quando x aumenta ou diminui $vP, 2vP, \dots, nvP, \dots$. Deste modo, se em vez de se variar t , se variar x pelo valor $\lambda = vP$, a onda repete-se no espaço. Logo, um movimento ondulatório no tempo, também o é no espaço.

Seja $\xi = f(x) = f(x + \lambda)$ uma função periódica no espaço. Usando o teorema de Fourier, temos

$$\xi = f(x) = a_0 + a_1 \cos kx + a_2 \cos 2kx + \dots + a_n \cos nkx + \dots + b_1 \sin kx + b_2 \sin 2kx + \dots + b_n \sin nkx + \dots$$

ou seja

$$\xi = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(nkx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin(nkx)$$

onde $k = 2\pi / \lambda$.

Os coeficientes desta expressão são dados por:

$$a_0 = \frac{1}{P} \int_0^P f(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{P} \int_0^P f(t) \cos(n\omega t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{P} \int_0^P f(t) \sin(n\omega t) dt$$

Se



$$\xi = f(x - vt) = a_0 + a_1 \cos k(x - vt) + a_2 \cos 2k(x - vt) + \dots + a_n \cos nk(x - vt) + \dots + b_1 \sin k(x - vt) + b_2 \sin 2k(x - vt) + \dots + b_n \sin nk(x - vt) + \dots$$

como $\omega = kv$

$$\xi = f(x - vt) = a_0 + a_1 \cos(kx - \omega t) + a_2 \cos 2(kx - \omega t) + \dots + a_n \cos n(kx - \omega t) + \dots + b_1 \sin(kx - \omega t) + b_2 \sin 2(kx - \omega t) + \dots + b_n \sin n(kx - \omega t) + \dots$$

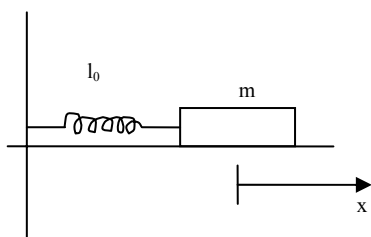
ou seja

$$\xi = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos n(kx - \omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin n(kx - \omega t).$$

Isto indica que qualquer movimento ondulatório pode ser escrito como uma sobreposição de movimentos ondulatórios com frequências $\omega, 2\omega, \dots, n\omega, \dots$ e comprimentos de onda $\lambda, 2\lambda, \dots, n\lambda, \dots$

4.2 Movimentos harmónicos

Considere-se uma mola que liga horizontalmente uma massa m a uma parede, tudo assente numa mesa sem atrito como mostra a figura.



A mola tem comprimento livre l_0 e uma constante de rigidez k . Marque-se um eixo dos xx com origem na posição da massa quando a mola está com o seu comprimento igual ao comprimento livre, isto é, em repouso.

Quando a mola é esticada ou comprimida para um comprimento l , reage com uma força dada por

$$F = -k \cdot (l - l_0) = -k \cdot x$$

O sentido da marcação da força é o sentido positivo do eixo dos xx . Isso significa que, quando o x é positivo, a força é negativa, isto é, quando a mola é estendida, a força com que a mola reage é negativa, tentando repor o comprimento livre. Da mesma forma, se x é negativo, a força é positiva, isto é, quando a mola é comprimida reage com uma força que tenta repor o comprimento livre, contrariando a compressão.

O movimento da massa é regido pela equação de Newton



$$F = m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2}$$

Substituindo a força, vem

$$-k \cdot x = m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2}$$

$$m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} + k \cdot x = 0$$

ou ainda

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} \cdot x = 0$$

Trata-se de uma equação diferencial, cuja integração introduz duas constantes, uma vez que a equação é do 2º grau (envolve a segunda derivada em ordem a t).

Se a equação for escrita na forma

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{k}{m} \cdot x$$

vê-se que a solução $x(t)$ é qualquer função tal que a segunda derivada em ordem ao tempo seja proporcional ao negativo da própria função.

Uma solução é formada pela sinusóide

$$x = A \cos(\omega t + \delta)$$

De facto

$$\frac{dx}{dt} = -A\omega \cdot \sin(\omega t + \delta)$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 [A \cos(\omega t + \delta)]$$

Comparando com a equação do movimento da mola

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{k}{m} x$$



vê-se que são soluções da equação, as sinusóides tais que

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

A solução é, assim

$$x = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t + \delta\right)$$

Repare-se que não foi colocada qualquer restrição à amplitude da sinusóide A nem à fase inicial ($t=0$ s), δ ; estas são, aqui, as duas constantes que a equação do 2º grau implica.

A solução é uma família de funções parametrizadas pelas duas constantes.

O movimento particular depende das condições iniciais do movimento, a partir das quais se determinam as constantes. Suponha-se que o movimento é inicializado esticando a mola para uma posição x_0 e que é imprimida uma velocidade inicial v_0 . Esses vão ser os valores de x e para $t=0$ s, isto é, sabendo que

$$x = A \cos(\omega t + \delta)$$

$$\frac{dx}{dt} = -A\omega \cdot \sin(\omega t + \delta)$$

com $t=0$ s, vem

$$x_0 = A \cos \delta$$

$$v_0 = -A\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \sin \delta$$

Dividindo estas duas equações, uma pela outra, vem

$$\frac{v_0}{x_0} = -\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \operatorname{tg} \delta$$

ou



$$\delta = \text{arctg}\left(-\sqrt{\frac{m}{k}} \cdot \frac{v_0}{x_0}\right)$$

Por outro lado, reescrevendo as equações na forma

$$\frac{x_0}{A} = \cos \delta$$

$$\frac{v_0}{A} \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} = \sin \delta$$

Elevando ao quadrado ambas as equações e somando-as, chega-se, finalmente, à seguinte equação

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{m}{k} \cdot v_0^2}.$$

Viu-se assim que uma equação do tipo

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m} \cdot x = 0$$

tem por solução

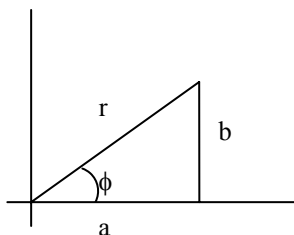
$$x = A \cos(\omega t + \delta)$$

em que A e δ são determinados a partir das condições iniciais.

4.2.1 Solução complexa

Um número complexo identifica um ponto num plano em que o eixo das abcissas é o eixo dos números reais e o eixo das ordenadas é o eixo dos números imaginários. A unidade do eixo real é \mathbf{i} e a unidade do eixo imaginário é \mathbf{j} .

Repare-se que se pode pensar no número complexo como a soma de dois comprimentos: \mathbf{a} , medida no eixo real, e \mathbf{b} , medida na perpendicular, isto é, no eixo imaginário. Sendo assim, multiplicar por \mathbf{j} significa rodar o segmento de 90° .



É imediato do teorema de Pitágoras que



$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

e da definição de tangente

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{b}{a}$$

Também se pode escrever a e b em função de r e ϕ :

$$a = r \cos \phi$$

$$b = r \sin \phi$$

Daqui resulta outra maneira de escrever o número complexo:

$$c = r \cos \phi + j \cdot r \sin \phi = r(\cos \phi + j \sin \phi)$$

Sabendo que

$$\cos \phi + j \sin \phi = e^{j\phi}$$

pode escrever-se um número complexo da seguinte forma

$$c = r e^{j\phi}$$

Esta notação permite que entender um número complexo do seguinte modo: para marcar o ponto a que corresponde, toma-se um comprimento r segundo o eixo real e roda-se um ângulo ϕ . Multiplicar por $e^{j\phi}$ significa rodar a partir do eixo dos xx de um ângulo ϕ .

A equação do movimento harmónico admite como solução famílias de funções de variável complexa do tipo

$$x = A \cdot e^{j(\omega t + \delta)}$$

Esta solução não tem significado real, mas é fácil extrair a solução que tem significado real a partir desta. A solução complexa é do tipo

$$x = A \cdot e^{j(\omega t + \delta)} = A \cos(\omega t + \delta) + j \cdot A \sin(\omega t + \delta)$$

Portanto, a solução com significado real é a parte real da solução complexa, por outras palavras a solução real é a que existe no “mundo real”.

Importa salientar que, se houver necessidade de efectuar operações matemáticas sobre a solução real do tipo sinusoidal, é possível efectuar as operações sobre a solução complexa e extrair depois a parte real, o que facilita muito os cálculos em inúmeras situações.



4.3 Fasores

A solução complexa

$$x = A \cdot e^{j(\omega t + \delta)}$$

pode ser decomposta em dois factores

$$x = A \cdot e^{j\delta} \cdot e^{j\omega t}$$

Se se tiver a garantia de que se trabalha com uma única frequência ω , constante e igual para várias soluções, faz sentido representar a solução apenas pelo primeiro factor.

Quando tal sucede, representa-se a solução por um **fasor**:

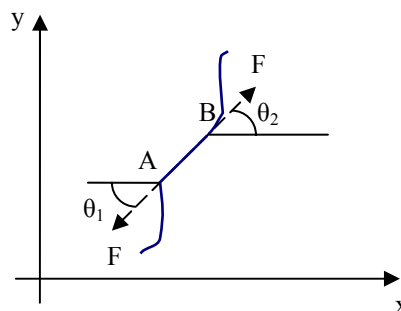
$$\underline{x} = A \cdot e^{j\delta}$$

Para se obter a solução sinusoidal – a que tem significado na realidade – tem de se ter em mente que o fasor é suposto rodar com uma velocidade angular ω . Então, se se pretender o valor da solução sinusoidal no instante t , tem de se rodar o fasor de um ângulo ωt e achar a parte real do número complexo correspondente.

4.4 Corda em vibração e equação de onda

Suponha-se uma corda que pode ter movimentos transversais num único plano de pequena amplitude. Vai-se supor que qualquer movimento só pode decorrer transversalmente ao comprimento da corda em repouso. A corda está submetida a força de tracção F .

Analise-se o que se passa com um comprimento de corda Δx .



A força que as partes da corda não representadas exercem, à esquerda e à direita do troço que está a ser analisado, só pode ser tangente ao troço, porque uma corda flexível como a considerada só transmite força de tracção – a força de tracção F .

Assim sendo, a força que actua segundo y , direcção única do movimento possível é, da figura



$$F_y = F \sin \theta_2 - F \sin \theta_1$$

Se os ângulos θ_1 e θ_2 forem garantidamente pequenos, o seno toma valores próximos da tangente e pode escrever-se

$$F_y = F(\operatorname{tg} \theta_1 - \operatorname{tg} \theta_2)$$

Por definição de derivada, a tangente do ângulo feito pela tangente à curva $y(x)$ com o eixo dos xx é a derivada da função $y(x)$ no ponto. Desse modo

$$F_y = F \left(\left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_B - \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_A \right)$$

As derivadas são parciais porque y é função de x e do tempo t . Então, se μ for a massa por unidade de comprimento da corda, a equação de Newton para o movimento segundo y é

$$F_y = \mu \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Substituindo, fica

$$F \left(\left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_B - \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_A \right) = \mu \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$F \frac{\left(\left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_B - \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_A \right)}{\Delta x} = \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Fazendo Δx tender para zero, obtém-se, por definição de derivada,

$$F \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

que se pode escrever na forma

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\mu}{F} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

Esta é uma equação às derivadas parciais. A solução já não é uma simples família de funções parametrizada por constantes; é toda a classe de funções

$$y = \xi(x \pm vt)$$



formada por todas as funções cujo argumento é $x \pm vt$, com $v > 0$.

Para a demonstração desta afirmação, considere-se o caso do argumento $\alpha = x + vt$.

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial \alpha}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial^2 y}{\partial \alpha^2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial t} = v \frac{\partial y}{\partial \alpha}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial t} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial \alpha^2}$$

Substituindo na equação, resulta

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \alpha^2} - \frac{\mu}{F} \frac{\partial^2 y}{\partial \alpha^2} = 0$$

O que é verdadeiro se

$$v^2 = F / \mu$$

Para o argumento $x - vt$, obtém-se o mesmo resultado.

As funções do tipo

$$y = \xi(x \pm vt)$$

chamam-se funções de onda ou ondas. O movimento da corda é um movimento em que são propagadas ondas.

4.5 Ondas electromagnéticas

As equações dos campos eléctrico e magnético, como visto anteriormente, são dadas por

$$\nabla^2 \vec{E} - \varepsilon \cdot \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 \vec{B} - \varepsilon \cdot \mu \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$



Atendendo à definição de laplaciano de um vector, vê-se que estas duas equações vectoriais se transformam em seis equações escalares:

$$\nabla^2 E_x - \varepsilon \cdot \mu \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 E_y - \varepsilon \cdot \mu \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 E_z - \varepsilon \cdot \mu \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0$$

e

$$\nabla^2 B_x - \varepsilon \cdot \mu \frac{\partial^2 B_x}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 B_y - \varepsilon \cdot \mu \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 B_z - \varepsilon \cdot \mu \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} = 0$$

Desenvolvendo os laplacianos, as equações escrevem-se

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \varepsilon \cdot \mu \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} - \varepsilon \cdot \mu \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} - \varepsilon \cdot \mu \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0$$

e



$$\frac{\partial^2 B_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B_x}{\partial z^2} - \varepsilon \cdot \mu \frac{\partial^2 B_x}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} - \varepsilon \cdot \mu \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} - \varepsilon \cdot \mu \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} = 0$$

São seis equações de onda semelhantes à equação que se viu, a uma variável, para uma corda vibrante

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\mu}{F} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

Agora, cada uma das equações é a três variáveis. Viu-se que, no caso de uma variável, a solução pode ser expressa como um integral duplo de soluções elementares, chamada onda harmónica do tipo

$$y = A \cos(\omega t \pm kx + \delta)$$

Agora pode-se dizer que qualquer solução de cada uma das seis soluções escalares pode ser expressa como um integral quádruplo (em k_x , k_y , k_z e t) de soluções elementares do tipo, por exemplo, para a componente E_x

$$E_x = E_x \cos(\omega t \pm k_x x \pm k_y y \pm k_z z + \delta_x)$$

Chama-se a esta solução, uma onda plana monocromática, OPM.

Definindo um vector \vec{K} , vector de onda

$$\vec{K} = k_x \vec{i} + k_y \vec{j} + k_z \vec{k}$$

e sendo o vector de posição do ponto dado por

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

pode-se escrever a OPM na forma



$$E_x = E_X \cos(\omega t \pm \vec{K} \cdot \vec{r} + \delta_X)$$

$$E_y = E_Y \cos(\omega t \pm \vec{K} \cdot \vec{r} + \delta_Y)$$

$$E_z = E_Z \cos(\omega t \pm \vec{K} \cdot \vec{r} + \delta_Z)$$

e

$$B_x = B_X \cos(\omega t \pm \vec{K} \cdot \vec{r} + \psi_X)$$

$$B_y = B_Y \cos(\omega t \pm \vec{K} \cdot \vec{r} + \psi_Y)$$

$$B_z = B_Z \cos(\omega t \pm \vec{K} \cdot \vec{r} + \psi_Z)$$

Primeiro vai-se confirmar que a OPM é solução e quais as condições a impor a ω e a \vec{K} . Tal vai ser feito para a componente E_x , sendo as conclusões válidas para as outras componentes.

A equação é

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \varepsilon \cdot \mu \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0$$

e

$$E_x = E_X \cos(\omega t \pm \vec{K} \cdot \vec{r} + \delta_X) = E_X \cos(\omega t \pm k_x x \pm k_y y \pm k_z z + \delta_X)$$

Tome-se, por exemplo, a solução com o sinal negativo. Então,

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = -E_X \sin(\omega t - \vec{K} \cdot \vec{r} + \delta_X) \cdot (-k_x) = k_x \cdot E_X \sin(\omega t - \vec{K} \cdot \vec{r} + \delta_X)$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} = -k_x^2 \cdot E_X \cos(\omega t - \vec{K} \cdot \vec{r} + \delta_X) = -k_x^2 \cdot E_x$$

Da mesma forma, concluir-se-ia que

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} = -k_y^2 \cdot E_x \qquad \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = -k_z^2 \cdot E_x$$

Por outro lado



$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = -E_x \sin(\omega t - \vec{K} \cdot \vec{r} + \delta_x) \cdot (\omega) = -\omega \cdot E_x \sin(\omega t - \vec{K} \cdot \vec{r} + \delta_x)$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = -\omega^2 \cdot E_x \cos(\omega t - \vec{K} \cdot \vec{r} + \delta_x) = -\omega^2 \cdot E_x$$

Substituindo na equação, vem

$$-k_x^2 E_x - k_y^2 E_x - k_z^2 E_x + \varepsilon \cdot \mu \cdot \omega^2 \cdot E_x = 0$$

Dividindo por E_x , a equação é satisfeita pela OPM se

$$\varepsilon \cdot \mu \cdot \omega^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$$

$$\frac{\omega}{K} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \cdot \mu}}$$

onde K é chamado de número de onda, o módulo do vector de onda \vec{K} , e ω a frequência angular.

$$K = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$$

A onda plana monocromática pode ser representada, tal como foi feito com a onda harmónica a uma dimensão na corda, na forma complexa

$$E_x = E_X \cdot e^{j(\omega t - \vec{K} \cdot \vec{r} + \delta_x)}$$

$$E_y = E_Y \cdot e^{j(\omega t - \vec{K} \cdot \vec{r} + \delta_y)}$$

$$E_z = E_Z \cdot e^{j(\omega t - \vec{K} \cdot \vec{r} + \delta_z)}$$

e

$$B_x = B_X \cdot e^{j(\omega t - \vec{K} \cdot \vec{r} + \psi_x)}$$

$$B_y = B_Y \cdot e^{j(\omega t - \vec{K} \cdot \vec{r} + \psi_y)}$$

$$B_z = B_Z \cdot e^{j(\omega t - \vec{K} \cdot \vec{r} + \psi_z)}$$

Sabe-se, já, que para encontrar os campos reais tem que se projectar os complexos no eixo real, isto é, tomar os co-senos dos argumentos das exponenciais.

Inclusive, pode representar-se a solução fasorialmente



$$\underline{E}_x = E_X \cdot e^{j(-\vec{K}|\vec{r} + \delta_x)}$$

$$\underline{E}_y = E_Y \cdot e^{j(-\vec{K}|\vec{r} + \delta_y)}$$

$$\underline{E}_z = E_Z \cdot e^{j(-\vec{K}|\vec{r} + \delta_z)}$$

e

$$\underline{B}_x = B_X \cdot e^{j(-\vec{K}|\vec{r} + \psi_x)}$$

$$\underline{B}_y = B_Y \cdot e^{j(-\vec{K}|\vec{r} + \psi_y)}$$

$$\underline{B}_z = B_Z \cdot e^{j(-\vec{K}|\vec{r} + \psi_z)}$$

Sabe-se, agora, que para calcular o campo real, num certo instante, é preciso multiplicar o fasor por $e^{j\omega t}$, rodando de um ângulo ωt e achar os co-senos.

Note-se, também, que fasorialmente é possível simplificar a notação. De facto, em todos aqueles fasores há uma parcela comum, $e^{-j\vec{K}|\vec{r}}$. Então, para o campo eléctrico, se se definir um fasor vectorial

$$\underline{\vec{E}}_0 = E_X \cdot e^{j\delta_x} \vec{i} + E_Y \cdot e^{j\delta_y} \vec{j} + E_Z \cdot e^{j\delta_z} \vec{k}$$

pode escrever-se, para o campo todo,

$$\vec{E} = \underline{\vec{E}}_0 \cdot e^{-j\vec{K}|\vec{r}}$$

Da mesma forma, fazendo

$$\underline{\vec{B}}_0 = B_X \cdot e^{j\psi_x} \vec{i} + B_Y \cdot e^{j\psi_y} \vec{j} + B_Z \cdot e^{j\psi_z} \vec{k}$$

resulta

$$\vec{B} = \underline{\vec{B}}_0 \cdot e^{-j\vec{K}|\vec{r}}.$$

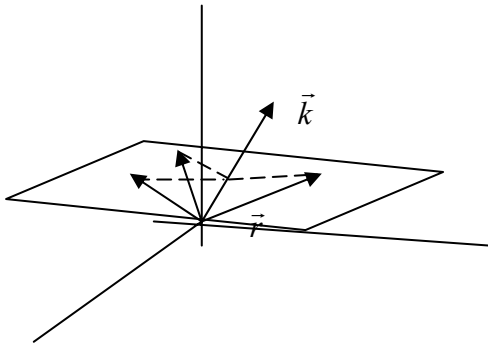
A OPM propaga-se no espaço; interessa saber qual a superfície cujos pontos têm, no mesmo instante, os mesmos valores do campo. Basta considerar as seis equações escalares como se escreveram ao princípio para entender que essas superfícies de igual valor do campo, chamadas frentes de onda, são dadas por

$$\omega t - \vec{K}|\vec{r} = \text{constante}$$

ou, para o mesmo instante,



$$\vec{K} \cdot \vec{r} = \text{constante}$$



Atendendo à figura, vê-se que todos os pontos pertencentes a um plano normal a \vec{K} projectam-se na direcção de \vec{K} no mesmo ponto.

Isto é, a frente de onda é plana. A onda plana monocromática diz-se plana justamente por isso. Diz-se monocromática porque envolve uma única frequência (uma única cor no espectro visível, como se verá a seguir).

A onda propaga-se, portanto, na direcção definida por \vec{K} e as frentes de onda, em que os campos \vec{E} e \vec{B} da onda têm, em cada instante, o mesmo valor, são planas perpendiculares a \vec{K} .

Há, também, relações entre os vectores do campo eléctrico \vec{E} , do campo magnético \vec{B} e do vector de onda \vec{K} .

As OPM's podem ser expressas na forma complexa como

$$\vec{E} = E_x \cdot e^{j(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \delta_x)} \vec{i} + E_y \cdot e^{j(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \delta_y)} \vec{j} + E_z \cdot e^{j(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \delta_z)} \vec{k}$$

$$\vec{B} = B_x \cdot e^{j(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \psi_x)} \vec{i} + B_y \cdot e^{j(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \psi_y)} \vec{j} + B_z \cdot e^{j(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \psi_z)} \vec{k}$$

As equações de Maxwell são

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \qquad \text{div } \vec{B} = 0$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \text{rot } \vec{B} = \mu \cdot \vec{J} + \epsilon \cdot \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Substituindo, por exemplo, a OPM na equação do rotacional de \vec{E} . Fica, por um lado

$$\text{rot } \vec{E} = \nabla \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}$$

em que



$$E_x = E_X \cdot e^{j(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \delta_x)}$$

$$E_y = E_Y \cdot e^{j(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \delta_y)}$$

$$E_z = E_Z \cdot e^{j(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \delta_z)}$$

Como a operação de derivar, para E_x , corresponde a multiplicar por $-jk_x$, vem

$$\text{rot } \vec{E} = \nabla \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -jk_x & -jk_y & -jk_z \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}$$

A operação de derivar para E_y corresponde a multiplicar por $-jk_y$ e para E_z corresponde a multiplicar por $-jk_z$.

Atendendo à definição de produto vectorial, pode escrever-se

$$\text{rot } \vec{E} = -j \cdot \vec{K} \times \vec{E}$$

Por outro lado

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = j \cdot \omega \cdot \vec{B}$$

Substituindo na equação de Maxwell

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

vem

$$-j \cdot \vec{K} \times \vec{E} = -j \cdot \omega \cdot \vec{B}$$

ou

$$\vec{K} \times \vec{E} = \omega \cdot \vec{B}$$

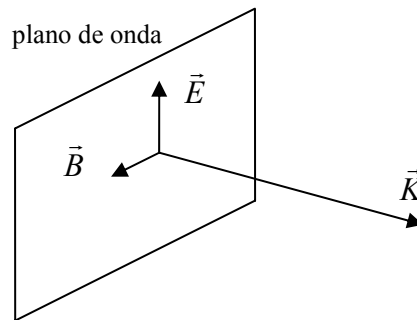
Fazendo o mesmo para as outras equações de Maxwell, resulta

$$\vec{K} \cdot \vec{D} = 0 \qquad \vec{K} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{K} \times \vec{E} = \omega \cdot \vec{B} \qquad \vec{K} \times \vec{H} = -\omega \cdot \vec{D}$$



Destas equações, conclui-se que os vectores \vec{K} , \vec{E} e \vec{B} formam um triedro directo, ou seja, os campos \vec{E} e \vec{B} são perpendiculares a \vec{K} , existem no plano que constitui a frente de onda e são tais que rodando \vec{E} para \vec{B} , um saca-rolhas dá a direcção de \vec{K} .



Faz, então, sentido fazer uma mudança de eixos das coordenadas. O eixo dos zz passa a coincidir em direcção e sentido com o vector de onda \vec{K} .

Então,

$$\vec{K} = k \vec{k}$$

isto é, o vector de onda só tem componente segundo o eixo dos zz . Por outro lado, os campos \vec{E} e \vec{B} só têm componentes segundo os eixos dos xx e dos yy (e essas componentes só variam com z).

Os campos reais têm, então, componentes

$$E_x = E_X \cos(\omega t - k z + \delta_X)$$

$$E_y = E_Y \cos(\omega t - k z + \delta_Y)$$

e

$$B_x = B_X \cos(\omega t - k z + \psi_X)$$

$$B_y = B_Y \cos(\omega t - k z + \psi_Y)$$

Na forma complexa

$$E_x = E_X \cdot e^{j(\omega t - k z + \delta_X)}$$

$$E_y = E_Y \cdot e^{j(\omega t - k z + \delta_Y)}$$

e

$$B_x = B_X \cdot e^{j(\omega t - k z + \psi_X)}$$

$$B_y = B_Y \cdot e^{j(\omega t - k z + \psi_Y)}$$

Finalmente



$$\underline{E}_x = E_X \cdot e^{j(-kz + \delta_x)}$$

$$\underline{E}_y = E_Y \cdot e^{j(-kz + \delta_y)}$$

e

$$\underline{B}_x = B_X \cdot e^{j(-kz + \psi_x)}$$

$$\underline{B}_y = B_Y \cdot e^{j(-kz + \psi_y)}$$

ou, definindo os fasores de vectores

$$\underline{\vec{E}}_0 = E_X \cdot e^{j\delta_x} \vec{i} + E_Y \cdot e^{j\delta_y} \vec{j}$$

$$\underline{\vec{B}}_0 = B_X \cdot e^{j\psi_x} \vec{i} + B_Y \cdot e^{j\psi_y} \vec{j}$$

vem

$$\vec{E} = \underline{\vec{E}}_0 \cdot e^{-jkz}$$

$$\vec{B} = \underline{\vec{B}}_0 \cdot e^{-jkz}$$

Mais uma vez, como na onda harmónica da corda vibrante, é possível definir o comprimento de onda, λ , com marcação segundo o eixo dos zz que é o eixo segundo o qual a onda se propaga, com

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

Da mesma forma o período é

$$T = \frac{1}{f}$$

e a velocidade da onda é

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k}$$

Atendendo ao resultado encontrado atrás

$$\frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \cdot \mu}}$$

vê-se que a velocidade de onda é



$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \cdot \mu}}$$

Para os ε e μ correspondentes ao vazio, nomeadamente ε_0 e μ_0 , constata-se que a velocidade é de $300\,000\text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$, a velocidade da luz, designada por c , que é uma onda electromagnética, isto é,

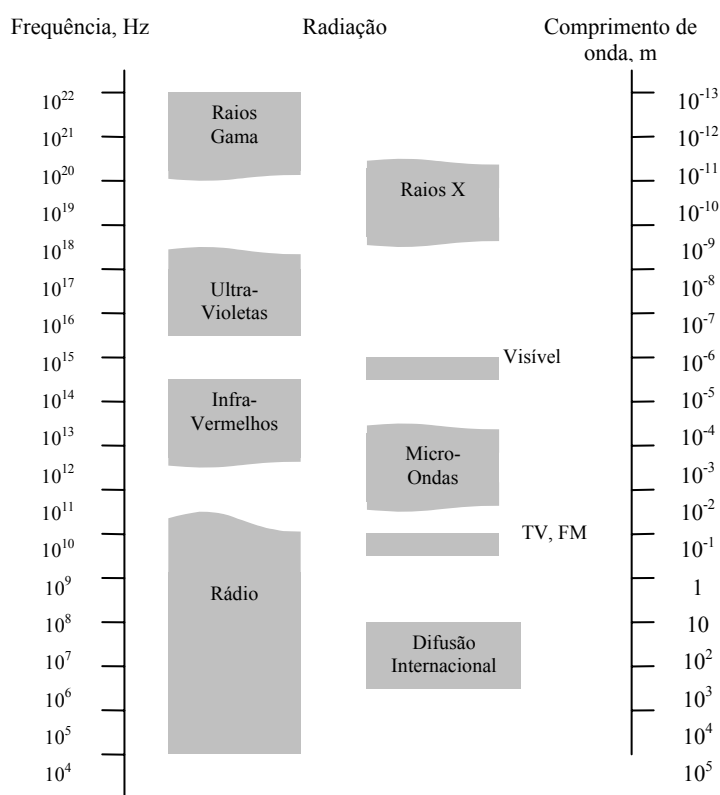
$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \cdot \mu_0}} = 3 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$



5 Quântica

5.1 Ondas electromagnéticas

As ondas electromagnéticas (EM) se propagam com uma velocidade de $3 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}$. Um exemplo de uma onda EM é a luz, que não são mais que ondas EM às quais o olho responde. Estas ondas variam entre uma frequência de $4,3 \times 10^{14} \text{ Hz}$ (correspondente à luz vermelha) e $7,5 \times 10^{14} \text{ Hz}$ (correspondente à luz violeta). Contudo a gama de frequências de uma onda EM vai desde as “baixas” frequências – utilizadas nas comunicações rádio – até às altas-frequências que se encontram nos raios X e Gama. Ao conjunto de frequências das ondas EM chama-se espectro electromagnético, representado na figura seguinte.



5.1.1 Interferência e difracção

Uma propriedade característica de todas as ondas EM é que elas obedecem ao princípio da sobreposição, que diz que quando duas ou mais ondas da mesma natureza atravessam um dado ponto ao mesmo tempo, a amplitude instantânea nesse ponto é a soma das amplitudes instantâneas das ondas individuais.

Quando duas ou mais ondas de luz se encontram numa dada região, elas **interferem** de modo a produzir uma nova onda cuja amplitude é a soma das amplitudes das ondas iniciais. A interferência construtiva refere-se ao reforço de ondas com a mesma fase de modo a produzir uma amplitude maior; a interferência destrutiva refere-se ao cancelamento total ou parcial de ondas que diferem em fase. Caso as ondas iniciais



tenham frequências diferentes, o resultado será uma mistura de interferência construtiva e destrutiva.

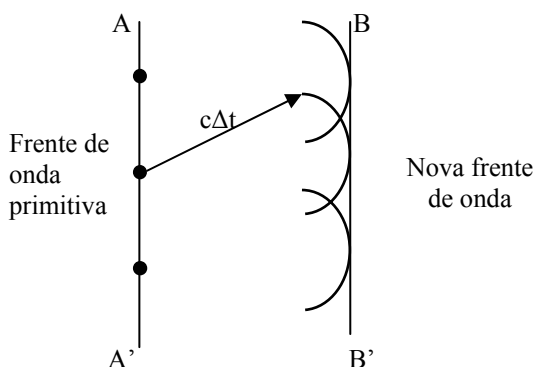
A interferência das ondas de luz foi demonstrada por Thomas Young, que utilizou um par de réguas iluminadas por uma luz monocromática de uma só fonte. De cada uma das réguas espalharam-se várias ondas secundárias; tal deveu-se ao fenómeno da **difracção**, que, tal como a interferência, é uma característica do fenómeno ondulatório.

5.2 Propagação da luz

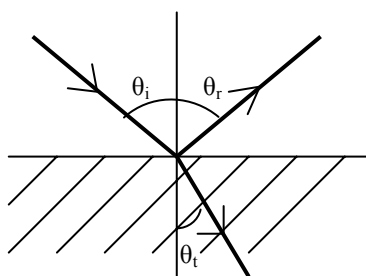
5.2.1 Princípio de Huygens

Todos os pontos de uma frente de onda primária são fontes puntiformes de ondas esféricas secundárias, ondas pequenas, que se propagam para a frente com a velocidade e frequência igual à velocidade e frequência da onda primária. Depois de um certo tempo, a nova posição da frente de onda é a superfície tangente a todas estas ondas pequenas.

A figura seguinte ilustra este princípio, para uma onda plana.



5.2.2 Reflexão



Quando uma atinge uma barreira plana formam-se novas ondas que se afastam dessa barreira; este é o fenómeno da reflexão.

A reflexão ocorre numa fronteira entre dois meios diferentes (por exemplo, uma superfície ar-vidro); uma parte da energia da onda incidente é reflectida no primeiro meio e outra parte é transmitida para o segundo meio.

O raio reflectido está no plano do raio incidente e



$$\theta_i = \theta_r \quad (\text{lei da reflexão})$$

A fracção de energia luminosa reflectida numa fronteira depende, de uma maneira complicada, do ângulo de incidência, da orientação do vector \vec{E} associado à onda e das velocidades da luz no primeiro e no segundo meio. A velocidade da luz num meio (vidro, ar, água, etc.), v , é caracterizada pelo índice de refacção, n :

$$n = \frac{c}{v}$$

No caso de $\theta_i = \theta_r = 0^\circ$, a intensidade da onda reflectida, I_r , é

$$I_r = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 \cdot I_i$$

Se for uma fronteira ar-vidro, vem $n_1 = 1$ e $n_2 = 1,5$ o que dá uma reflexão de somente 4% da energia incidente.

5.2.3 Refracção

Quando um feixe de luz atinge uma superfície que separa dois meios diferentes, parte da energia luminosa é reflectida e parte é transmitida, penetrando no segundo meio. A mudança de direcção do raio transmitido é a refacção.

A onda transmitida é o resultado da interferência da onda incidente e da onda provocada pela absorção e re-irradiação da energia luminosa pelos átomos do meio.

Quando entra no segundo meio, há um atraso entre a onda re-irradiada e a onda incidente; este atraso de fase significa que a posição das cristas da onda, na onda transmitida, está atrasada em relação à posição das cristas de onda na onda incidente no segundo meio. Por isso, num certo tempo, a onda não avança tanto no segundo meio quanto a onda incidente no primeiro meio; por outras palavras, a velocidade da onda transmitida é menor do que a velocidade da onda incidente.

Como a frequência da onda é igual nos dois meios, então

$$\lambda = \frac{v_2}{f} = \frac{c/n}{f} = \frac{\lambda_1}{n}$$

A lei de Snell diz que

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

A partir de um certo ângulo não há raio refractado, ou seja, a energia total é reflectida; esse ângulo é chamado de ângulo crítico, θ_c

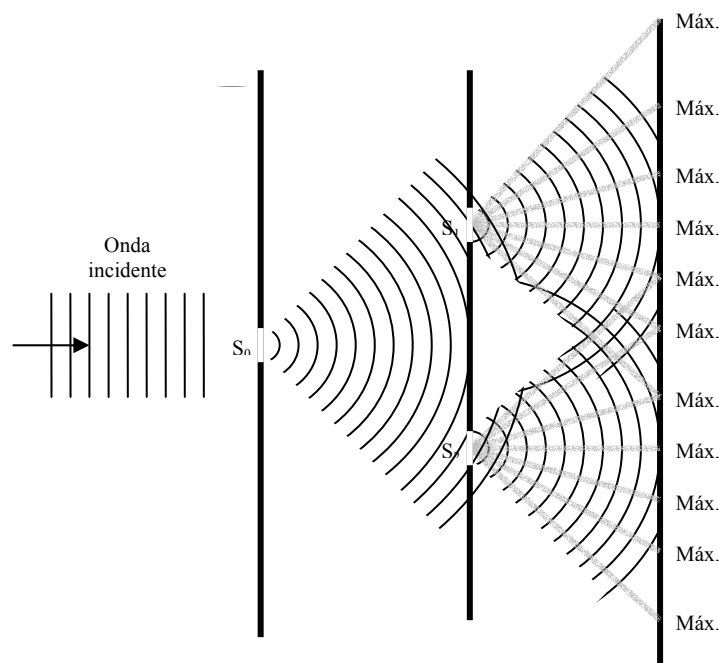


$$\theta_c = \sin^{-1} \frac{n_2}{n_1}$$

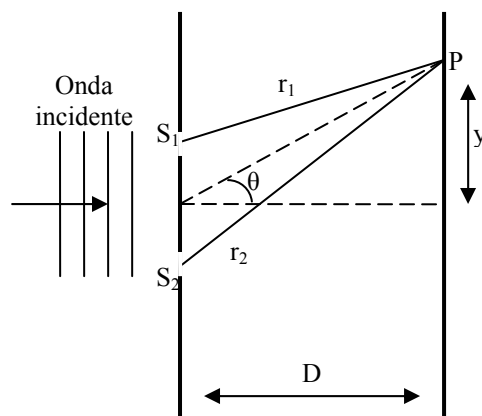
5.3 Difraccção do espectro electromagnético

5.3.1 Experiência da luz de Young

A experiência da luz de Young demonstrou que a luz é um fenómeno ondulatório, demonstrando que duas ondas luminosas podem interferir uma com a outra. Young fez com que a luz solar atravessasse um orifício S_0 colocado numa tela A . Como se pode ver na figura, a difracção faz com que a luz se espalhe e chegue aos orifícios S_1 e S_2 da tela B . Uma nova difracção ocorre quando a luz atravessa esses orifícios e propagam-se duas ondas esféricas no espaço à direita da tela B , onde podem interferir uma com a outra.



Os pontos do espaço onde a interferência é construtiva (máximos de interferência) estão indicados como *Max*. As regiões claras da tela C aparecem à volta desses pontos, sendo separadas por pontos escuros, que correspondem aos pontos em que há interferência destrutiva (mínimos de interferência). Quando tomadas em conjunto, essas regiões formam uma figura de interferência na tela C .



Para haver interferência construtiva entre os raios que chegam ao ponto P é necessário que as ondas dos raios r_1 e r_2 tenham a mesma fase; como o instante considerado é igual para as duas ondas e dado que o percurso percorrido pelas duas ondas é diferente, para a fase ser a mesma então a diferença de percursos tem de ser um múltiplo do comprimento de onda; dado que a diferença de percurso entre os dois raios é $d \sin \theta$, em que d é a distância entre as duas fendas, então vem, para $D \gg d$, situação comum,

$$d \sin \theta = m \lambda$$

As regiões da tela de observação onde estão situados esses máximos de interferência são chamadas *franjas claras* e podem ser rotuladas pelos valores de m .

Igual raciocínio pode ser aplicado aos pontos onde há interferência destrutiva; para esses pontos a diferença de fase tem de ser 180° , ou meio comprimento de onda. Assim sendo, vem

$$d \sin \theta = \left(m + \frac{1}{2}\right) \cdot \lambda$$

Os valores de m agora são usados para rotular as regiões onde estão os mínimos de interferência.

5.3.2 Difracção por Rede Cristalina

Como se pode ver anteriormente há ondas electromagnéticas com diferentes comprimentos de onda. Para ondas com uma determinada frequência, a experiência de Young não é possível de realizar, pois o comprimento de onda é tão pequeno que o método de difracção estudado não pode ser aplicado.

Por exemplo, no caso dos raios X, com $\lambda = 1 \text{ \AA}$ ($= 0,1 \text{ nm}$), mesmo com uma distância entre as fendas $d = 3 \mu\text{m}$, o primeiro máximo ocorre $0,0019^\circ$ ao lado do máximo central; em termos práticos, este valor não tem qualquer utilidade; aliás seria desejável $d \approx \lambda$, mas com comprimentos de onda tão pequenos não é possível construir qualquer dispositivo mecânico que realize esta função.

Para se realizar a difracção de ondas com frequências elevadas usam-se redes de cristais, que são constituídos por arranjos regulares de átomos; assim, temos uma rede de difracção cristalina.



No cristal há uma unidade básica de átomos (a chamada *célula unitária*) que se repete em todo o arranjo. Como exemplo há o cloreto de sódio (NaCl) em que cada célula unitária é constituída por quatro iões de sódio e quatro iões de cloro. Este cristal é cúbico, sendo a célula unitária um cubo com aresta a_0 , como se pode ver na alínea a) da próxima figura.

Quando um feixe de raios X entra num cristal, como o de NaCl, os raios X são espalhados, isto é, são desviados em todas as direcções pela estrutura cristalina. Em algumas direcções, as ondas sofrem interferência destrutiva, resultando em mínimos de intensidade; noutras direcções a interferência é construtiva, resultando em máximos de intensidade. Este processo de espalhamento e interferência é uma forma de difracção, embora seja diferente da difracção da luz através de uma fenda, vista anteriormente.

De facto, o processo de difracção por rede cristalina pode ser complicado, pois os máximos de intensidade aparecem em direcções que poderiam ser identificadas com as direcções que os raios X incidentes tomariam se fossem reflectidos por uma família de planos reflectores paralelos (ou planos cristalinos) que passam pelos átomos do cristal (isto é apenas uma abstracção para melhor se compreender o que se passa; na realidade não há reflexão dos raios X).

A alínea b) da próxima figura mostra três planos de uma família de planos com distância inter-planar d , que hipoteticamente reflectem os raios X incidentes. Os raios 1, 2 e 3 reflectem-se, respectivamente, no primeiro, no segundo e no terceiro plano. Em cada reflexão, os ângulos de incidência e de reflexão têm o valor θ . Ao contrário do que é habitual em óptica, esses ângulos não são medidos em relação à normal ao plano. Nesta situação a distância inter-planar é igual à aresta da célula unitária a_0 .

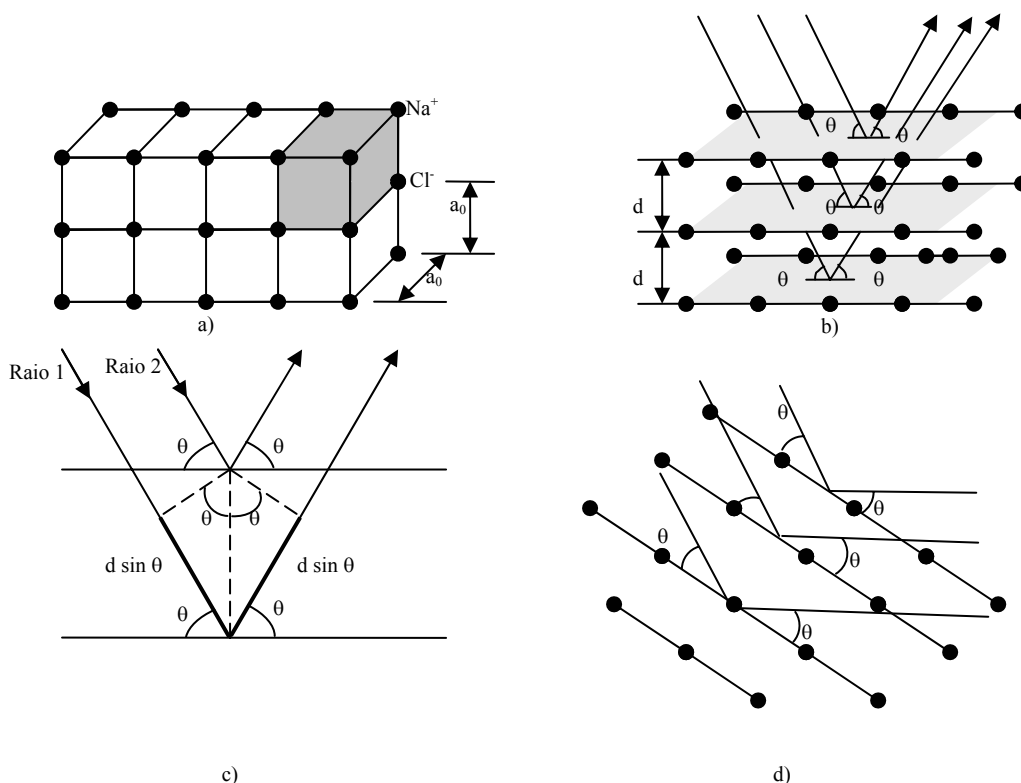
Na alínea c) da figura, pode ver-se as reflexões em dois planos adjacentes. As ondas 1 e 2 chegam em fase ao cristal. Depois da reflexão elas estão novamente em fase, pois o que vai ser analisado é o caso em que a reflexão e os planos reflectores proporcionam máximos de intensidade na difracção dos raios X pelo cristal. Ao contrário do que sucede com os raios de luz, os raios X não sofrem refracção ao entrar no cristal; além disso, não se define qualquer índice de refracção nessas circunstâncias. Assim sendo, a diferença de fase entre as ondas dos raios 1 e 2 é determinada, exclusivamente pelo percurso. Para que os raios estejam em fase, a diferença de fase deve ser igual a um múltiplo inteiro do comprimento de onda λ dos raios X.

Analisando a alínea c) da próxima figura, chega-se facilmente à conclusão que a diferença de percurso entre o raio 1 e o raio 2 é $2d \sin \theta$. Este resultado é válido para qualquer par de planos adjacentes da família de planos representada na alínea b). Vem, então

$$2d \sin \theta = m \lambda$$

Esta é a lei de Bragg e θ é o ângulo de Bragg.

Independentemente do ângulo sobre o qual entram os raios X num cristal, há sempre uma certa família que, hipoteticamente, pode reflecti-los de tal forma que seja possível aplicar a lei de Bragg. Tal pode ser visto na alínea d) da figura.



5.4 Radiação de um corpo negro

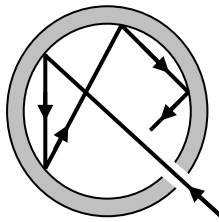
É do conhecimento geral que um metal aquecido brilha desde uma cor avermelhada até uma cor mais branca, à medida que a temperatura aumenta. De facto, há outras frequências (cores) às quais os olhos humanos não reagem, mas que estão presentes. Inclusive, não é necessário um corpo aquecer até um ponto em que a radiação de energia electromagnética se torne visível; todos os objectos radiam uma energia continuamente, independentemente da sua temperatura, apesar de as frequências dominantes dependerem da temperatura.

A capacidade de radiação que um corpo tem está intimamente ligada com a sua capacidade de absorção. Tal é esperado, uma vez que um corpo a uma temperatura constante está em equilíbrio térmico com o meio envolvente e deve absorver energia deste à mesma taxa que radia – por exemplo, se tal não acontecesse, o corpo humano, ao receber calor do meio envolvente, aqueceria indefinidamente.

Considere-se um corpo ideal que absorve toda a radiação que incide nele, independentemente da frequência; esse corpo tem a designação de **corpo negro**. Este corpo, ideal, é independente da sua natureza (ou constituição).

A radiação de um corpo negro consiste na absorção e na emissão de radiação.

Uma boa aproximação de um corpo negro pode ser o interior de um corpo oco; neste, quando a luz entra por uma abertura, parte dela é reflectida e parte absorvida em cada reflexão nas paredes internas da cavidade. Depois de muitas reflexões, praticamente toda a energia incidente foi absorvida.

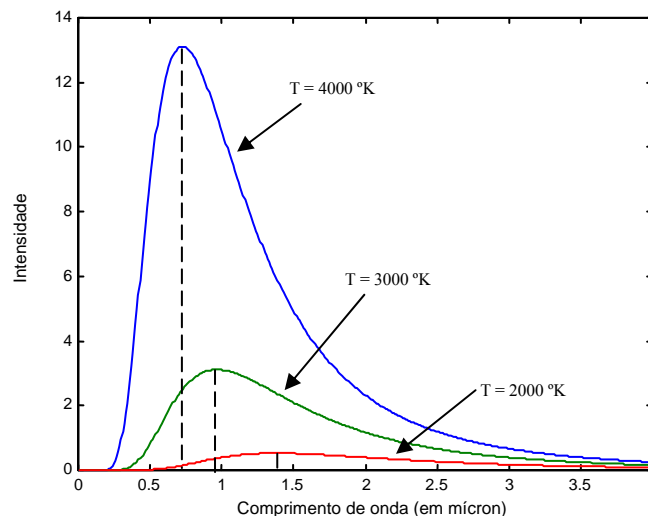


5.4.1 Lei do Deslocamento de Wien

A figura mostra os dados experimentais da distribuição de energia na radiação do corpo negro em três temperaturas diferentes. A energia irradiada varia com o comprimento de onda e com a temperatura; quando a temperatura do corpo negro se eleva, a quantidade total de energia emitida aumenta. De igual modo, com a elevação da temperatura, o máximo da distribuição desloca-se para os comprimentos de onda mais baixos. Este deslocamento obedece à relação conhecida como lei do deslocamento de Wien e é dada por

$$\lambda_{m\acute{a}x} T = 0,2898 \times 10^{-2} \quad (m \cdot K)$$

em que $\lambda_{m\acute{a}x}$ é o comprimento de onda em que ocorre o pico da curva e T é a temperatura absoluta do corpo que emite a radiação.



5.4.2 A Catástrofe do Ultra-Violeta

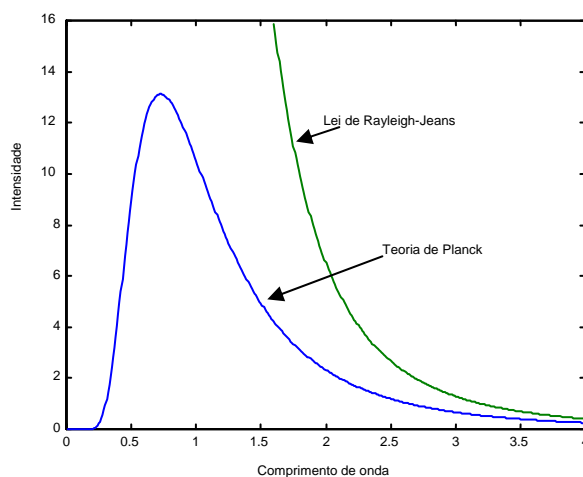
Todas as tentativas mais antigas de explicar estes resultados, com base nas teorias clássicas, falharam. Para descrever o espectro de radiação define-se $I(\lambda, T) d\lambda$ como a potência por unidade de área, emitida no intervalo de comprimento de onda $d\lambda$. O resultado de um cálculo baseado no modelo clássico da radiação do corpo negro é conhecido como *lei de Rayleigh-Jeans* e é

$$I(\lambda, T) = \frac{2\pi ckT}{\lambda^4}$$



em que k é a constante de Boltzmann ($1,38 \times 10^{-23} \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$). Neste modelo clássico de radiação do corpo negro, os átomos da parede de uma cavidade, como a enunciada atrás, são tratados como um conjunto de osciladores que emitem ondas electromagnéticas em todos os comprimentos de onda. Este modelo leva a uma energia média, por oscilador, proporcional a T .

Contudo, o gráfico do espectro da radiação do corpo negro obtido experimentalmente, e o da previsão teórica de Rayleigh-Jeans estão mostrados na figura.



Nos comprimentos de onda grandes, a lei de Rayleigh-Jeans é uma boa aproximação da realidade. Contudo, para comprimentos de onda pequenos, a diferença entre a realidade e a teoria é enorme. O que se pode concluir é que, quando λ tende para zero, a função $I(\lambda, T)$ dada pela lei de Rayleigh-Jeans tende para infinito, ou seja, a radiação de comprimento de onda pequeno deveria ser predominante. Este resultado é negado pelos resultados experimentais, que mostram que quando λ tende para zero, a função $I(\lambda, T)$ também tende para zero. Esta contradição é denominada de *catástrofe do ultra-violeta*.

Outro problema com a teoria clássica é a previsão de uma *densidade de energia total infinita*, pois todos os comprimentos de onda são possíveis. Ora, um campo electromagnético com uma densidade de energia infinita é uma situação fisicamente impossível.

5.4.3 Lei de Planck. Fóton

Planck descobriu uma fórmula de radiação do corpo negro que concorda plenamente com os resultados experimentais, em todos os comprimentos de onda. A função que Planck propôs é

$$I(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5 (e^{hc/\lambda kT} - 1)}$$

em que h é a constante de Planck ($6,626 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$).

Note-se que para valores de λ elevados esta expressão reduz-se à expressão de Rayleigh-Jeans. Além disso, a lei de Planck prevê uma diminuição exponencial de



$I(\lambda, T)$ com a diminuição de λ , o que também está de acordo com os resultados experimentais.

Na sua teoria, Planck, admitiu duas hipóteses, relativamente às moléculas oscilantes nas paredes da cavidade:

- a) as moléculas oscilantes que emitem radiação só podem ter valores discretos de energia, E_n , dados por

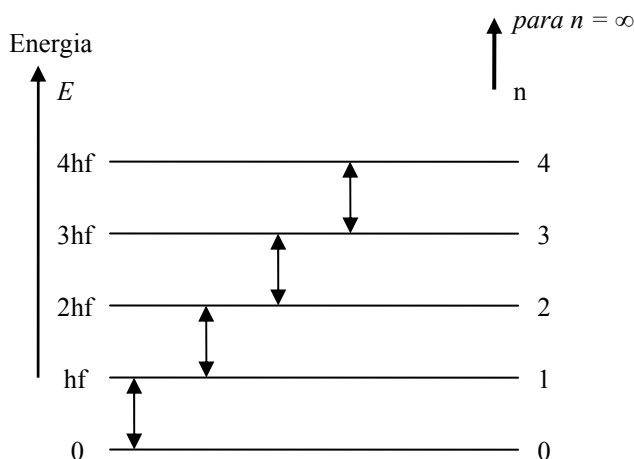
$$E_n = nhf$$

em que n é um número inteiro positivo, um número quântico, e f é a frequência de vibração das moléculas. As energias das moléculas estão quantizadas e os estados de energia permitidos são denominados de *estados quânticos*

- b) as moléculas absorvem ou emitem energia em unidades discretas de energia luminosa, os *quanta* (ou fótons). Se o número quântico se alterar em uma unidade, a expressão anterior mostra que a energia irradiada ou absorvida pela molécula é hf . Então, a energia de um fóton corresponde à diferença de energia entre dois estados quânticos é $E = hf$.

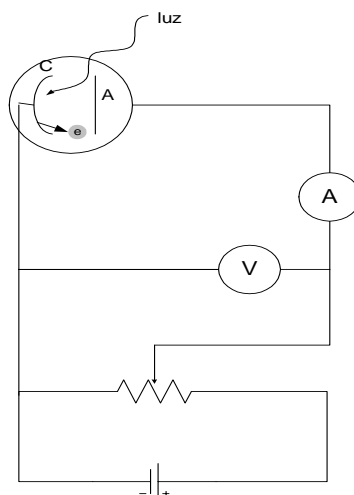
A molécula só irradia, ou absorve, energia quando o seu estado quântico se alterar. Se a molécula permanecer num estado quântico, não há emissão nem absorção de energia. A seguir pode ver-se os níveis quantizados de energia e as transmissões propostas por Planck.

O ponto-chave da teoria de Planck é a hipótese, radical, dos estados de energia quantizados. Esta teoria marcou o nascimento da teoria quântica. Contudo, o trabalho dele foi o resultado de muitos anos de trabalho e não uma mera e hábil manipulação matemática das leis anteriores.



5.5 Efeito Fotoelétrico

Certas experiências mostram que, quando uma luz incide sobre certas superfícies metálicas, há emissão de electrões pela superfície. Este fenómeno é conhecido como *efeito fotoelétrico* e aos electrões emitidos chama-se fotoelectrões. A figura seguinte mostra um esquema que permite a visualização desse efeito.



Um tubo de vidro, ou de quartzo, com vácuo, contém uma placa metálica C que é ligada ao terminal negativo de uma bateria; uma outra placa metálica, A , é ligada ao terminal positivo da bateria, ficando com um potencial positivo. Quando o tubo está no escuro, ou seja, quando não se incide luz sobre o tubo, o valor lido no amperímetro é nulo, indicando ausência de corrente no circuito. Quando se ilumina a placa C com uma luz monocromática, com um comprimento de onda apropriado, então o valor indicado pelo amperímetro é diferente de zero, o que indica que há corrente no circuito, ou seja, há uma passagem de cargas através do espaço entre A e C . A corrente associada a este processo provém dos electrões emitidos pela placa negativa e recolhidos na placa positiva.

As experiências mostram que para grandes valores da diferença de potencial entre A e C – V –, a corrente atinge um valor máximo, correspondente ao caso em que todos os fotoelectrões são recolhidos em A . Outro dado verificado é que quanto maior for a intensidade da luz incidente, maior será o valor da corrente que atravessa o circuito. Por último, constata-se que para valores de V negativos, ou seja, quando se inverte a polaridade da bateria, de modo a que A seja negativa e C positiva, os fotoelectrões são repelidos pela placa negativa A . Deste modo só os que tiverem energia cinética maior que eV é que conseguirão atingir A , onde e é a carga do electrão. Além disso, se V for menor ou igual a V_c , que é o potencial de corte, nenhum fotoelectrão irá atingir A , sendo a corrente nula. O potencial de corte é independente da intensidade da radiação.

A energia cinética máxima dos fotoelectrões está relacionada com o potencial de corte através de

$$K_{max} = eV_c$$

Muitas características do efeito fotoelétrico não podem ser explicadas pela física clássica nem pela teoria ondulatória da luz, nomeadamente:

- Nenhum electrão é emitido se a frequência da luz incidente for menor que um limiar de frequência, f_c , que é característico do material iluminado; esta observação é incoerente com a teoria ondulatória que prevê que o efeito fotoelétrico ocorra em qualquer frequência, desde que a intensidade da luz seja suficiente
- Se a frequência da luz for superior ao limiar de frequência, o efeito fotoelétrico ocorrerá e o número de electrões será proporcional à



intensidade da luz; contudo, a energia cinética máxima dos fotoelectrões é independente da intensidade da luz

- c) A energia cinética máxima dos fotoelectrões aumenta com o aumento da frequência da luz
- d) Os electrões são emitidos pela superfície quase instantaneamente, mesmo com intensidades de luz baixas; do ponto de vista clássico, seria de esperar que os electrões precisassem de um certo tempo para absorver a energia da radiação incidente antes de ter energia cinética suficiente para escaparem do metal.

Uma explicação bem sucedida do efeito fotoelétrico foi dada por Einstein, que generalizou o conceito de quantização de Planck para as ondas electromagnéticas; Einstein admitiu que a luz (ou qualquer outra onda electromagnética) de frequência f pode ser considerada uma corrente de fotões; cada fotão tem a sua energia E dada por

$$E = hf$$

em que h é a constante de Planck. Einstein admitiu que a energia da luz não estivesse distribuída uniformemente sobre a frente de onda, mas sim concentrada em regiões discretas (ou “pacotes”), os quanta de luz ou fotões. A interpretação de Einstein para o efeito fotoelétrico é de um fotão transmitir toda a sua energia, hf , a um único electrão no metal. Os electrões emitidos pela superfície do metal têm uma certa energia cinética máxima, K_{max} . Assim sendo, a energia cinética máxima dos electrões emitidos é

$$K_{max} = hf - \phi$$

em que ϕ é a função trabalho de extracção de um material e constitui a energia mínima de ligação de um electrão no metal e é da ordem de alguns electrões-volt.

Com a teoria dos fotões para a luz é possível explicar os aspectos referidos anteriormente, nomeadamente:

- a) O facto do efeito fotoelétrico não ser observado abaixo de um certo limiar de frequência é a consequência da energia do fotão ter de ser maior que a função de trabalho ϕ ; se a energia do fotão incidente não for igual, ou maior, a ϕ , os electrões jamais irão ser ejectados da superfície, independentemente da intensidade da luz
- b) O facto da energia cinética máxima ser independente da intensidade da luz pode ser compreendido da seguinte forma: se a intensidade da luz for duplicada, o número de fotões também o será, o que duplica o número de fotões emitidos; porém, a energia cinética dos fotões é igual a $hf - \phi$, ou seja, só depende da frequência da luz e da função trabalho de extracção de electrões e não da intensidade da luz
- c) O facto da energia cinética máxima aumentar com o aumento da frequência é entendido atendendo à última equação
- d) O facto dos electrões serem emitidos quase instantaneamente é coerente com a teoria corpuscular da luz, segundo a qual a energia incidente aparece em pequenos pacotes e há uma inter-acção de um para um, dos fotões com os electrões, o que é bem diferente de haver uma distribuição de energia sobre uma grande área.



Uma confirmação da hipótese de Einstein é o facto de haver uma relação linear entre a frequência da luz e a energia cinética máxima e foi verificada experimentalmente, sendo a razão entre as variações h .

A frequência de limiar é a frequência para a qual a energia cinética é nula, ou seja $f_c = \phi/h$; o limiar de comprimento de onda corresponde a essa frequência e é dado por

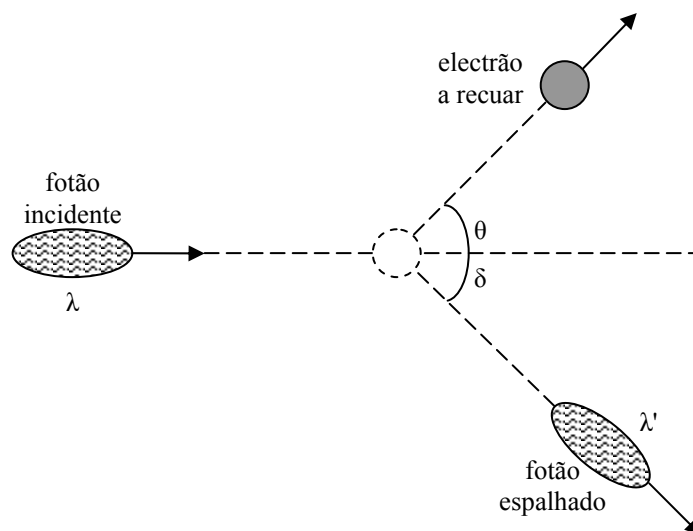
$$\lambda_c = \frac{c}{f_c} = \frac{c}{\phi/h} = \frac{hc}{\phi}$$

5.6 Efeito de Compton

Einstein concluiu que um fóton com energia E , desloca-se numa única direcção (ao contrário de uma onda esférica) e é portador de um momento (linear) igual a $E/c = hf/c$, ou seja, se um pacote de radiação provoca a emissão ou a absorção de um pacote de energia hf por uma molécula, então há uma transferência do momento para a molécula com valor hf/c , na direcção do pacote quando houver absorção na direcção do pacote e na direcção oposta quando houver absorção na direcção oposta à do pacote.

Mais tarde, percebeu-se que o espalhamento de fótons de raios X por electrões poderia ser explicado considerando-se os fótons como partículas puntiformes, com energia hf e momento hf/c e havendo conservação de energia e do momento do par fóton-electrão na colisão.

Considere-se o que acontece numa colisão entre um fóton e um electrão, atendendo à figura seguinte:



Após a colisão o electrão, inicialmente em repouso, vai começar a movimentar-se; esse movimento vai fazer com que a energia cinética do fóton após a colisão seja diferente da energia cinética antes da colisão; a variação dessa energia será igual à perda de energia do fóton. Assim sendo, o fóton terá uma frequência f' diferente da inicial após a colisão.

Em termos de energia, vem



$$hf = hf' + K$$

Em termos de momento, tem de se considerar o momento segundo a horizontal e segundo a vertical; assim sendo, vem

Momento final = Momento inicial

$$\begin{cases} \frac{hf}{c} + 0 = \frac{hf'}{c} \cos \delta + p \cos \theta \\ 0 = \frac{hf'}{c} \sin \delta - p \sin \theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} pc \cos \theta = hf - hf' \cos \delta \\ pc \sin \theta = hf' \sin \delta \end{cases}$$

Elevando as duas últimas equações ao quadrado e somando-as, vem

$$p^2 c^2 = (hf)^2 - 2(hf)(hf') \cos \delta + (hf')^2$$

A energia total de uma partícula é

$$E = K + m_0 c^2$$

$$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2}$$

donde

$$(K + m_0 c^2)^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2 \Leftrightarrow p^2 c^2 = K^2 + 2m_0 c^2 K$$

como

$$K = hf - hf'$$

vem

$$p^2 c^2 = (hf)^2 - 2(hf)(hf') \cos \delta + (hf')^2 + 2m_0 c^2 (hf - hf')$$

igualando os dois valores para $p^2 c^2$, vem

$$(hf)^2 - 2(hf)(hf') \cos \delta + (hf')^2 = (hf)^2 - 2(hf)(hf') \cos \delta + (hf')^2 + 2m_0 c^2 (hf - hf')$$

$$2m_0 c^2 (hf - hf') = 2(hf)(hf')(1 - \cos \delta)$$

expressando esta relação em ordem a λ , vem

$$\frac{m_0 c}{h} \left(\frac{f}{c} - \frac{f'}{c} \right) = \frac{f}{c} \frac{f'}{c} (1 - \cos \delta)$$



Como $f/c = \lambda$ e $f'/c = \lambda'$, vem

$$\frac{m_0 c}{h} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} \right) = \frac{1 - \cos \delta}{\lambda \lambda'}$$

Finalmente

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \delta)$$

Esta é a expressão do efeito de Compton.

Pode, ainda, ser definido o comprimento de onda de Compton, como sendo

$$\lambda_C = \frac{h}{m_0 c} = 2,426 \times 10^{-12} \text{ m}$$

podendo escrever-se

$$\lambda' - \lambda = \lambda_C (1 - \cos \delta)$$

5.7 Ondas de matéria

Pelo facto dos fótons terem características ondulatórias e corpusculares, talvez todas as formas de matéria também tenham propriedades ondulatórias e também corpusculares.

De acordo com de Broglie, os electrões também têm uma natureza dupla de partícula e onda: acompanhando cada electrão há uma onda (que não uma onda electromagnética) que guia os electrões pelo espaço. De Broglie chamou a este tipo de ondas, *ondas de matéria*.

Sabe-se que o momento de um fóton é $p = E/c$; como $E = hf$ e $f = c/\lambda$, vem $p = hc/c\lambda$ e finalmente $p = h/\lambda$. Daqui se vê que o comprimento de onda de um fóton pode ser calculado a partir do seu momento.

As partículas materiais com momento p também devem ter propriedades ondulatórias, bem como um comprimento de onda associado. Como $p = mv$, vem

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$$

Esta equação dá o comprimento de onda de de Broglie.

Fazendo uma analogia com os fótons, de Broglie postulou que as frequências das ondas de matéria (ondas associadas a partículas de massa de repouso não nula) obedecem à relação de Einstein $E = hf$, de modo que $f = E/h$.



5.8 Incerteza

5.8.1 Princípio da incerteza de Heisenberg

Na mecânica clássica é possível efectuar medições com incertezas arbitrariamente pequenas ou com exactidão infinita, ou seja, não há qualquer barreira para o aperfeiçoamento mais refinado dos aparelhos de medida ou dos procedimentos experimentais.

Na teoria quântica, é impossível efectuar medições simultâneas da posição e da velocidade de uma partícula com exactidão infinita.

O princípio da incerteza foi introduzido por Heisenberg e diz que

se uma medida da posição for efectuada com precisão Δx e se uma medida simultânea do seu momento for feita com precisão Δp , então o produto das duas incertezas nunca poderá ser menor que um número da ordem da constante de Planck, ou seja

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar$$

$$\text{em que } \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

Por outras palavras, é fisicamente impossível medir, simultaneamente, a posição exacta de uma partícula e o seu momento.

5.8.2 Equação de Schrödinger

As ondas de matéria são representadas por uma função de onda $\psi(x,y,z,t)$, em que ψ é um número complexo. A probabilidade, por unidade de volume, (ou densidade de probabilidade) de uma partícula ser encontrada num ponto com coordenadas (x,y,z) no instante t é dada por $|\psi|^2$.

Para as ondas “clássicas” tem-se

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Neste caso, considerando, tal como no caso clássico, um movimento somente na direcção dos xx , vem

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

Se se confinar a discussão aos sistemas ligados, cuja energia total E permanece constante, então, como $E = hf$, a frequência da onda de de Broglie também é constante.



Pode exprimir-se $\psi(x,t)$ como sendo o produto de dois termos, um só dependente de x , $\psi(x)$, e outro só dependente de t , ou seja

$$\psi(x,t) = \psi \cdot \cos(\omega t)$$

Considerou-se o cosseno da frequência, pois esta é constante.

Desenvolvendo, vem

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \cos(\omega t) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\frac{\omega^2}{v^2} \cdot \psi \cdot \cos(\omega t) \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -\frac{\omega^2}{v^2} \psi$$

Como $\omega = 2\pi f = 2\pi v / \lambda$ e como para as ondas de matéria $p = h / \lambda$, vem

$$\frac{\omega^2}{v^2} = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{h}\right)^2 \cdot p^2 = \frac{p^2}{\hbar^2}$$

Por outro lado, a energia total é a soma da energia cinética e potencial, pelo que,

$$E = K + U = \frac{p^2}{2m} + U \Leftrightarrow p^2 = 2m(E - U)$$

donde

$$\frac{\omega^2}{v^2} = \frac{p^2}{\hbar^2} = \frac{2m}{\hbar^2} (E - U)$$

Finalmente

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -\frac{\omega^2}{v^2} \psi = -\frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \psi$$

Doutra forma

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \psi = 0$$

Esta é a equação de Schrödinger para uma dimensão; no caso tridimensional, virá

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \psi = 0$$

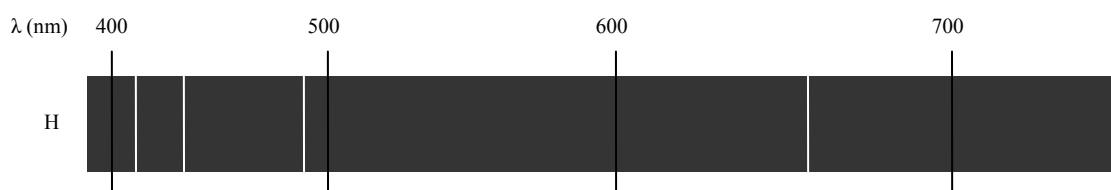


5.9 Espectros Experimentais de Absorção e de Emissão

Todas as substâncias emitem radiação térmica, a uma certa temperatura, caracterizada por uma distribuição contínua de comprimentos de onda. A forma de distribuição depende da temperatura e das propriedades das substâncias.

O espectro obtido experimentalmente, emitido por um gás rarefeito sujeito a uma descarga eléctrica, tem um contraste nítido com esta distribuição contínua; é um espectro de riscas.

Quando a luz desta descarga é examinada por espectroscópio, verifica-se que o espectro é constituído por algumas linhas brilhantes, de cor pura, sobre um fundo que em geral é escuro.



Os comprimentos de onda que constituem um determinado espectro de riscas são característicos do elemento emissor da luz. O mais simples de todos é o do hidrogénio. Uma vez que dois elementos diferentes emitem espectros diferentes, estes constituem a base de uma técnica prática e sensível para identificar os elementos presentes numa amostra.

Outra forma de espectroscopia é a de absorção. Obtém-se um espectro de absorção pela passagem da luz de uma fonte contínua através de um gás ou de uma solução diluída do elemento que se pretende analisar.

O espectro de absorção é constituído por uma série de riscas negras sobrepostas ao fundo contínuo do espectro da fonte.



5.10 Átomo de Bohr

O modelo do átomo de Bohr assenta em quatro pontos fundamentais:

- O electrão move-se em órbitas circulares em torno do protão, sob a influência da força de atracção coulombiana
- Só certas órbitas são estáveis; essas órbitas são aquelas nas quais o electrão não irradia, logo a energia é fixa (estática) sendo o movimento do electrão descrito pela mecânica clássica
- A radiação é emitida pelo átomo quando o electrão “salta” de um estado estacionário inicial, com maior energia, para um estado com menor energia. Este “salto” não pode ser visualizado nem analisado nos modos clássicos.



Em particular, a frequência do fóton emitido no salto é independente da frequência do movimento orbital do electrão. A frequência da luz emitida está relacionada com a variação da energia do átomo e é dada por $E_i - E_f = hf$

- d) O tamanho das órbitas permitidas do electrão é determinado pela condição quântica adicional imposta ao momento angular orbital do electrão, ou seja, as órbitas permitidas são aquelas nas quais o momento angular orbital do electrão é múltiplo inteiro de \hbar , ou seja, $mvr = n\hbar$.

Como

$$U = qV = -\frac{k_e e^2}{r}$$

vem

$$E = K + U = \frac{mv^2}{2} - \frac{k_e e^2}{r}$$

Por outro lado,

$$F_e = \frac{k_e e^2}{r^2} \quad e \quad F_e = m \cdot a_c \quad \Rightarrow \quad \frac{k_e e^2}{r^2} = \frac{m \cdot v^2}{r}$$

logo

$$K = \frac{m \cdot v^2}{2} = \frac{k_e e^2}{2r}$$

e

$$E = K + U = \frac{k_e e^2}{2r} - \frac{k_e e^2}{2r} = -\frac{k_e e^2}{2r}$$

Como

$$\begin{cases} mvr = n\hbar \\ \frac{mv^2}{2} = \frac{k_e e^2}{2r} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = \frac{n\hbar}{mr} \\ v = \sqrt{\frac{k_e e^2}{mr}} \end{cases} \Leftrightarrow r_n = \frac{n^2 \hbar^2}{mk_e e^2}$$

Para $n = 1$, vem

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{mk_e e^2} = 0,0529nm$$

Este a_0 é o chamado raio de Bohr.



Assim sendo, pode escrever-se

$$E_n = -\frac{k_e e^2}{2a_0} \left(\frac{1}{n^2} \right) = -\frac{13,6}{n^2} eV$$

e

$$f = \frac{E_i - E_f}{h} = \frac{k_e e^2}{2a_0 h} \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$

Em termos de comprimento de onda, vem

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{f}{c} = \frac{k_e e^2}{2a_0 c h} \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$

O átomo de Bohr foi muito bem aceite, pois os dados calculados para o caso do hidrogénio coincidiam com os valores obtidos na época.

5.11 Espectro do Hidrogénio e Átomo de Hidrogénio

5.11.1 Espectro do Hidrogénio

Ao contrário da teoria de Bohr, observando-se as riscas espectrais do hidrogénio, vê-se que estas não são simples, mas antes grupos de linhas muito próximas umas das outras. De facto, observa-se que, em certas circunstâncias, nomeadamente quando se colocam átomos num campo magnético intenso, algumas das riscas simples são, na realidade, três linhas bastante próximas.

5.11.2 Átomo de Hidrogénio

A energia potencial no átomo de hidrogénio é dada por

$$U(r) = -\frac{k_e e^2}{r}$$

em que r é a distância radial entre o protão e o electrão.

De acordo com a mecânica quântica, as energias dos estados permitidos do átomo de hidrogénio são

$$E_n = -\frac{k_e e^2}{2a_0} \left(\frac{1}{n^2} \right) = -\frac{13,6}{n^2} eV$$

No caso de problemas unidimensionais, basta um número quântico para caracterizar um estado estacionário. No problema tridimensional do átomo de hidrogénio são



necessários três números quânticos para cada estado estacionário, correspondendo aos três graus de liberdade do electrão. Estes três números, teóricos, são representados pelos símbolos n , l e m_l :

n – número quântico principal

l – número quântico secundário

m_l – número quântico magnético orbital

Estes números têm as seguintes limitações:

n é um número inteiro que pode variar de 1 até ∞

l é um número inteiro que pode variar de 0 até $n - 1$

m_l é um número inteiro que pode variar de $-l$ até $+l$

Por razões históricas, diz-se que os estados com o mesmo número quântico principal formam uma *camada*, identificadas pelas letras K, L, M, \dots . De igual modo, os estados com os mesmos números quânticos principal e secundário formam uma *subcamada*.

A tabela seguinte resume as regras de determinação dos valores permitidos de l e m_l :

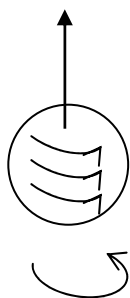
Número quântico	Nome	Valores permitidos	Nº de estados permitidos
n	Número quântico principal	$1, 2, 3, \dots$	Qualquer número
l	Número quântico secundário	$0, 1, 2, \dots, n - 1$	n
m_l	Número quântico magnético orbital	$-l, -l + 1, \dots, 0, \dots, l - 1, l$	$2l + 1$

Na tabela seguinte está a notação das camadas e subcamadas

n	Símbolo da camada	l	Símbolo da subcamada
1	K	0	s
2	L	1	p
3	M	2	d
4	N	3	f
5	O	4	g
6	P	5	h
...		...	

Fazendo as contas, é-se levado a concluir que, por exemplo, para $n = 2$, só existem quatro estados orbitais possíveis. Contudo, na realidade constatam-se oito, tal é devido a um outro número quântico, o número quântico magnético de spin – m_s – que corresponde ao sentido de rotação do electrão; de facto só há duas maneiras do electrão girar:

spin para cima



spin para baixo





5.12 Princípio da Exclusão e Tabela Periódica

5.12.1 Princípio da Exclusão

O estado de um átomo de hidrogénio pode ser identificado por quatro números quânticos: n , l , m_l e m_s . Por exemplo, um electrão no estado fundamental do hidrogénio pode ter os números quânticos $n = 1$, $l = 0$, $m_l = 0$ e $m_s = 1/2$. Acontece, porém, que o estado de um electrão em qualquer outro átomo também pode ser identificado por este mesmo conjunto de números quânticos. De facto, estes quatro números quânticos podem ser usados para descrever todos os estados electrónicos de um átomo, independentemente do número de electrões da sua estrutura.

Uma questão que se pode colocar é a de saber quantos electrões pode ter um determinado conjunto de números quânticos. A resposta a esta questão é o princípio de exclusão enunciado por Pauli:

Dois electrões quaisquer num átomo nunca podem estar num mesmo estado quântico, isto é, dois electrões num mesmo átomo não podem ter os mesmos números quânticos n , l , m_l e m_s .

Se esta regra não fosse válida, todos os electrões de um átomo acabariam por estar no estado de energia mais baixa e o comportamento químico dos elementos seria diferente. De facto, pode imaginar-se a estrutura atómica dos átomos complexos como uma sucessão de níveis de energia crescente, que se enchem um depois do outro, sendo os electrões mais externos os principais responsáveis pelas propriedades químicas do elemento.

5.12.2 Tabela Periódica

Como regra geral, a ordem de preenchimento das subcamadas de um átomo pelos electrões é a seguinte: uma vez completa uma subcamada, o electrão seguinte vai para a subcamada vazia seguinte de mais baixa energia. Pode entender-se este princípio, pois se o átomo não estivesse no estado de energia mais baixo possível, iria irradiar energia até atingir esse estado.

Define-se *orbital* como o estado de um electrão caracterizado pelos números quânticos n , l e m_l . Pelo princípio da exclusão, pode ver-se que, em qualquer orbital só podem estar, no máximo dois electrões: um desses electrões com $m_s = +1/2$ e outro com $m_s = -1/2$. Uma vez que cada orbital está limitado a ter, no máximo, dois electrões, o número de electrões que podem ocupar os diversos níveis também está limitado.

A seguir mostra-se o número de estados quânticos permitidos num átomo até $n = 3$.

n	1		2			3								
l	0	0	1			0	1			2				
m_l	0	0	1	0	-1	0	1	0	-1	2	1	0	-1	-2
m_s	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓

Uma questão que se coloca é a seguinte: o que acontece no caso de electrões que ocupam a mesma subcamada? Ficam em duas orbitais diferentes com spins desemparelhados (↑↑) ou ficam na mesma orbital com spins emparelhados (↑↓)? Os



dados experimentais mostram que a configuração mais estável, isto é, a que é do ponto de vista energético preferível, é a que tem os spins desemparelhados. Hund estabeleceu uma regra – a regra de Hund – que diz que *quando um átomo tem orbitais de igual energia, a ordem de preenchimento desses orbitais é a que possibilita o maior número e electrões com os spins desemparelhados.*

Algumas excepções a esta regra ocorrem nos elementos que têm subcamadas quase completas ou semi-cheias. Uma descrição mais completa dos elementos pode ser encontrada na maior parte dos livros de química geral.



6 Bibliografia

- *Analisis Vectorial*, H. B. Phillips, Union Tipografica Editorial Hispano Americana, 1960
- *Apontamentos de Electromagnetismo*, Prof. Carlos Espain
- *Apontamentos de Ondas*, Prof. Carlos Espain
- *Applied Electromagnetics*, M. Plonus, Mc Graw-Hill, 1986
- *Concepts of Modern Physics*, A. Beiser, McGraw-Hill, 1995
- *Electromagnetismo*, W. H. Hayt Jr., LTC, 1995
- *Engineering Mathematics – A Modern Foundation For Electronic, Electrical and Systems Engineers*, A. Croft, R. Davison, M. Hargreaves, Addison-Wesley, Essex, 1996
- *Física – um curso universitário*, M. Alonso, E. J. Finn, Editora Edgard Blücher, 1981
- *Física Atômica*, M. Born, Fundação Calouste Gulbenkian, 1986
- *Física para Cientistas e Engenheiros, com Física Moderna*, R. Serway, LTC, 1996
- *Física*, D. Halliday, R. Resnick, K. S. Krane, LTC, 1996
- *Física*, P. Tipler, LTC, 1995
- *Fundamentos de Física*, D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, LTC, 1995
- *Introdução ao Electromagnetismo*, S. K. Mendiratta, Fundação Calouste Gulbenkian, 1995