Francisco José de Oliveira Restivo

Aníbal João de Sousa Ferreira

Departamento de Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

Processamento Digital de Sinal

Aulas Práticas

Ano Lectivo 1998/99

Setembro de 1998

Aula nº 1

Problema 1

Considere o sistema discreto

$$y(n) = \frac{x(n) + 2x(n-1) + x(n-2)}{4} .$$

a. Determine a sua resposta impulsional h(n).

b. Determine a sua resposta y(n) à entrada x(n) = [0.5, 1, 1, 0.5].

<u>Solução</u>:

a. h(n) = [0.25, 0.5, 0.25]

b. y(n) = [0.5, 1, 1, 0.5] * [0.25, 0.5, 0.25]=[0.125, 0.5, 0.875, 0.875, 0.5, 0.125].

Problema 2

A resposta impulsional de um sistema discreto H é

$h(n) = 2^{-n}u(n)$.

Determine e represente graficamente a sua resposta y(n) à entrada

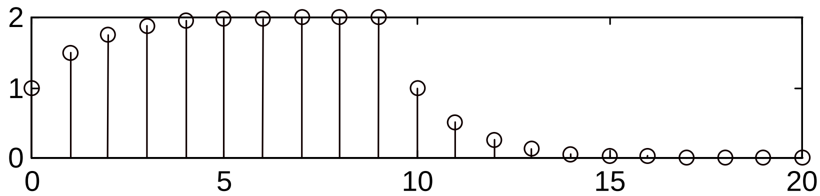
x(n) = u(n) - u(n-10) .

<u>Solução</u>:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k) = \sum_{\substack{0\le k\le 9\\ n-k\ge 0}} 2^{-(n-k)} = \sum_{k=0}^{\min(n,9)} 2^{-n}2^{k}$$

$$y(n)= \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 2^{-n}(2^{n+1}-1), & 0 \le n \le 9 \\ 2^{-n}(2^{10}-1), & n > 9 \end{cases}$$

Graficamente



Problema 3

Determine a resposta impulsional do sistema discreto

y(n) = 0.3x(n) + 0.7y(n-1) .

<u>Solução</u>:

$h(n) = 0.3.0.7^{n}u(n)$.

Aula nº 2

Problema 1

a. Determine a resposta impulsional h(n) e a resposta em frequencia $H(e^{j\omega})$ de um filtro de média de comprimento 5

$$y(n) = \frac{x(n) + x(n-1) + x(n-2) + x(n-3) + x(n-4)}{5}$$

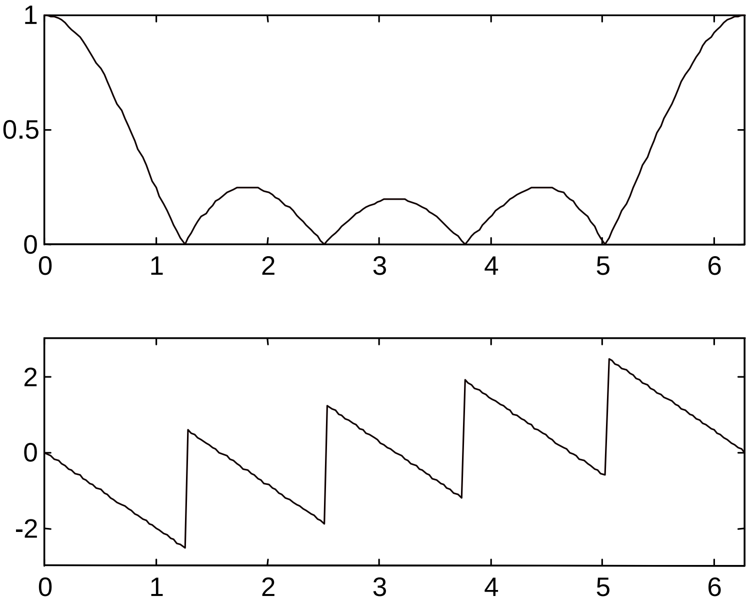
b. Represente graficamente o módulo e a fase de $H(e^{j\omega})$.

Solução:

a. h(n) = [0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2]

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 + e^{-j\omega} + e^{-2j\omega} + e^{-3j\omega} + e^{-4j\omega}}{5} = \frac{1 + 2\cos(\omega) + 2\cos(2\omega)}{5} e^{-2j\omega}$$

b.

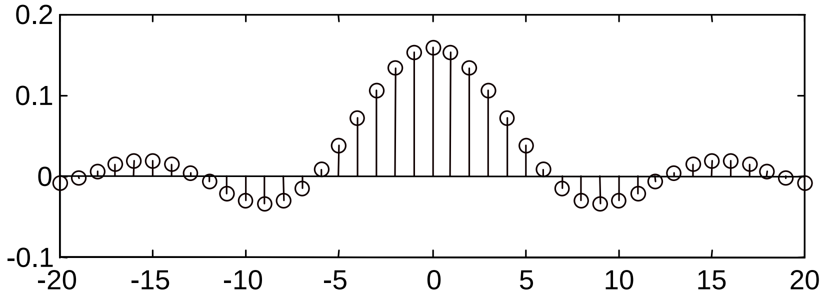


Problema 2

Determine e represente graficamente a resposta impulsional h(n) de um filtro passa baixo ideal com frequencia superior de corte ω = 0.5 rad .

Solução:

$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-0.5}^{0.5} e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{jn} (e^{j0.5n} - e^{-j0.5n}) = \frac{2j\,\mathrm{sen}(0.5n)}{2j\pi n} = \frac{0.5}{\pi} \mathrm{senc}(0.5n)$$



Problema 3

a. Se a transformada de Fourier de h(n) for $H(e^{j\omega})$, qual é a transformada de Fourier de $(-1)^n h(n)$?

b. Determine a resposta impulsional h(n) de um filtro passa alto ideal com frequência inferior de corte 0.75π rad.

<u>Solução</u>:

a. $$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n h(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{j\pi n}h(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}h(n)e^{-j(\omega-\pi)n} = H(e^{j(\omega-\pi)})$$

há uma translacção de π rad

b. três possibilidades:

a partir da definição

$$h(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{0.75\pi}^{1.25\pi} e^{j\omega n}d\omega = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{jn}(e^{j1.25\pi n} - e^{j0.75\pi n}) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{jn}(e^{j0.25\pi n} - e^{-j0.25\pi n})e^{j\pi n} = \frac{(-1)^n}{4}\text{senc}(0.25\pi n)$$

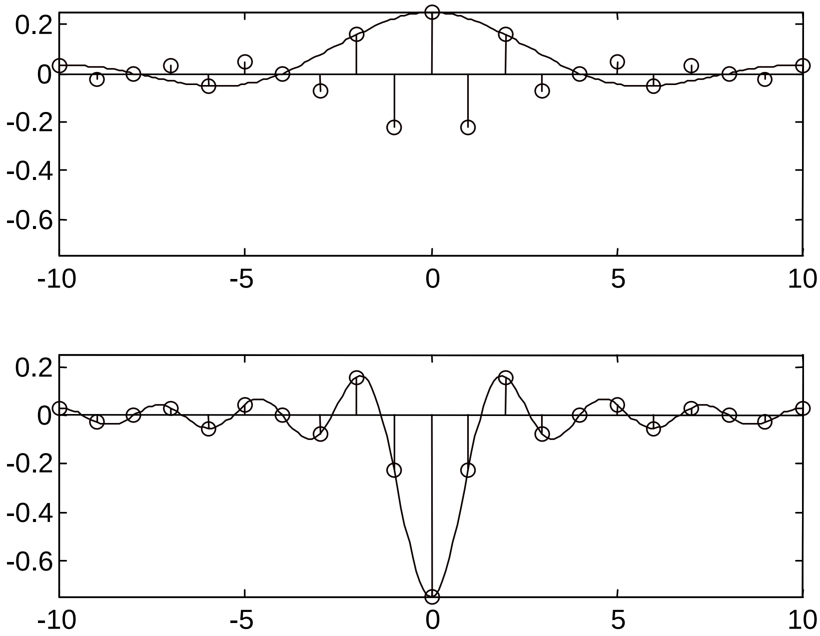
verificando que o filtro pedido se obtem por uma translacção de π da resposta em frequência de um filtro passa baixo ideal com frequência superior de corte 0.25π rad, e utilizando o resultado da alínea anterior, obtem-se directamente

$$h(n) = \frac{(-1)^n}{4}\text{senc}(0.25\pi n)$$

ou ainda notando que o filtro pedido se obtem subtraindo do filtro 'identidade' um filtro passa baixo ideal com frequência superior de corte 0.75π rad

$$h(n) = \delta(n) - \frac{3}{4}\text{senc}(0.75\pi n)$$

que podemos verificar ser a mesma solução, por comparação dos gráficos de $\frac{(-1)^n}{4}\text{senc}(0.25\pi n)$ e de $-\frac{3}{4}\text{senc}(0.75\pi n)$



Aula nº 3

Problema 1 (O&S, 2.3)

Classifique os sistemas seguintes no que respeita à estabilidade, causalidade, linearidade e invariância à translacção:

a. $y(n) = g(n)x(n)$, em que g(n) é conhecido

b. $$y(n) = \sum_{k=n_0}^{n} x(k)$$

c. $$y(n) = \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x(k)$$

d. $y(n) = x(n - n_0)$

e. $y(n)=e^{x(n)}$

f. $y(n) = ax(n) + b$

g. $y(n) = x(-n)$

h. $y(n) = x(n) + 3u(n+1)$.

Solução:

	Estabilidade	Causalidade	Linearidade	Invariância à translacção
a.	sim, se |g(n)| for limitado	sim	sim	não
b.	não	não	sim	não
c.	sim	não	sim	sim
d.	sim	não	sim	sim
e.	sim	sim	não	sim
f.	sim, se a e b finitos	sim	não	não
g.	sim	não	sim	não
h.	sim	sim	não	não

Problema 2 (O&S, 2.11)

Determine a resposta ao degrau unitário do sistema com resposta impulsional

$h(n) = a^{-n}u(-n)$, $0 < a < 1$.

Solução:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(n-k) = \sum_{\substack{k\le 0\\ n-k\ge 0}} a^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{\min(n,0)} a^{-k}$$

$$y(n)= \begin{cases} \dfrac{a^{-n}}{1-a}, & n \le 0 \\[2ex] \dfrac{1}{1-a}, & n > 0 \end{cases}$$

Problema 3

A parte real da transformada de Fourier de um sinal discreto x(n) real e causal é

$X_R(e^{j\omega}) = 1 + \cos(\omega)$.

Determine a sua parte imaginária.

Solução:

$$1 + \cos(\omega) = 1 + \frac{e^{j\omega} + e^{-j\omega}}{2} \Leftrightarrow [0.5,\ 1,\ 0.5] \text{ parte par de } x(n)$$

$$x(n) = [1,\ 1] \Rightarrow [-0.5,\ 0,\ 0.5] \text{ parte ímpar de } x(n) \Rightarrow X_I(e^{j\omega}) = j\mathrm{sen}(\omega)$$

Problema 4

Considere um filtro analógico passa baixo elementar do tipo RC, com R = 10 kΩ e C = 2 μF.

a. Determine a sua resposta em frequência $H_c(j\Omega)$.

b. Determine a sua resposta impulsional $h_c(t)$.

c. Determine a resposta em frequência do sistema discreto cuja resposta impulsional é uma amostragem de $h_c(t)$ a uma frequência igual a 10 vezes a frequência de corte do filtro analógico.

d. Determine a respectiva equação às diferenças.

Solução:

a. $$H_c(j\Omega) = \frac{(j\Omega C)^{-1}}{R + (j\Omega C)^{-1}} = \frac{1}{1 + j\Omega RC}$$

frequência angular de corte $(RC)^{-1}$

b. $$h_c(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} u(t)$$

c. frequência angular de amostragem $10(RC)^{-1}$; período de amostragem $T = \pi RC/5$

$$h(n) = Th_c(nT) = \frac{\pi RC/5}{RC} e^{-\frac{n\pi RC/5}{RC}} u(n) = \frac{\pi}{5} e^{-\frac{\pi}{5}n} u(n)$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\pi}{5} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\frac{\pi}{5}n} e^{-j\omega n} = \frac{\pi}{5} \frac{1}{1 - e^{-\frac{\pi}{5}} e^{-j\omega}}$$

d. $$y(n) = \frac{\pi}{5} x(n) + e^{-\frac{\pi}{5}} y(n-1)$$

Aula nº 4

Problema 1

Determine a frequência mínima a que deve amostrar o sinal contínuo de banda limitada $x_c(t) = \text{senc}^2(10t)$ de modo a evitar a ocorrência de *aliasing*.

Solução:

O sinal contínuo cuja transformada de Fourier é um pedestal de largura $2\Omega_M$ centrado em 0 é

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega_M}^{\Omega_M} e^{j\Omega t} d\Omega = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{jt}(e^{j\Omega_M t} - e^{-j\Omega_M t}) = \frac{\Omega_M}{\pi}\text{senc}(\Omega_M t).$$

Se a transformada de Fourier de senc(10t) é um pedestal de largura 20, a transformada de Fourier de $\text{senc}^2(10t)$ será um triangulo de largura 40, que deve ser amostrado à frequência angular de amostragem mínima de 40 rad/s.

Problema 2

Considere os sinais contínuos $x_1(t)$ e $x_2(t)$, de banda limitada a, respectivamente, Ω_1 e Ω_2 rad/s.

Determine a frequência mínima de amostragem dos sinais

a. $x_1(t) + x_2(t)$,

b. $x_1(t) \times x_2(t)$,

c. $x_1(t) * x_2(t)$.

Solução:

a. $\max(\Omega_1, \Omega_2)$

b. $\Omega_1 + \Omega_2$

c. $\min(\Omega_1, \Omega_2)$

Problema 3

O sinal discreto x(n), obtido por amostragem com período T de um sinal analógico $x_c(t)$, tem espectro não nulo só para $|\omega| < \pi/2$.

Especifique o filtro de reconstrução ideal e compensado que recupera o sinal analógico, usando reconstrução de ordem zero, com pedestal de largura T.

Solução:

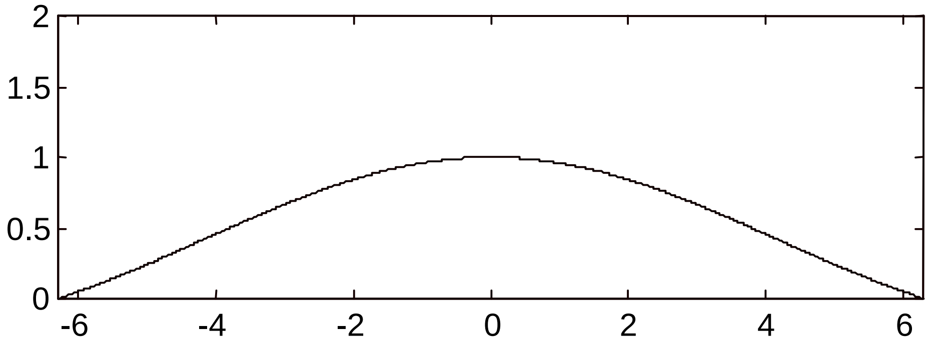
Reconstrução do impulso unitário discreto:

$$h(t) = u(n) - u(n - T)$$

Efeito da reconstrução:

$$H(j\Omega) = \frac{1 - e^{-j\Omega T}}{j\Omega} = \frac{e^{j\Omega\frac{T}{2}} - e^{-j\Omega\frac{T}{2}}}{j\Omega} e^{-j\Omega\frac{T}{2}} = T\text{senc}(\Omega\frac{T}{2})e^{-j\Omega\frac{T}{2}}$$

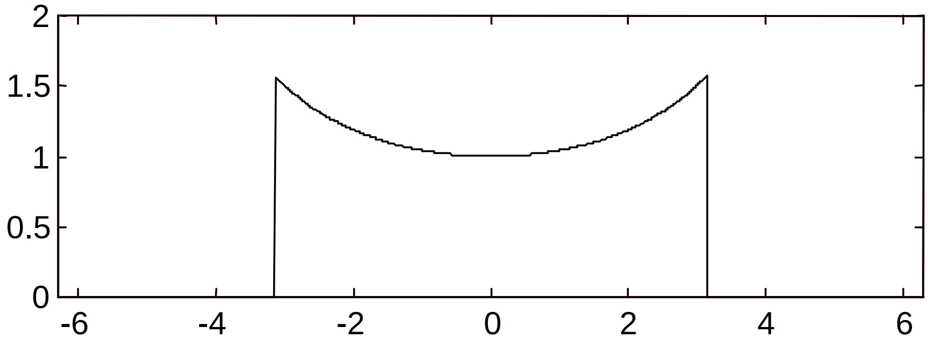
que se representa a seguir para T=1



Filtro de reconstrução ideal e compensado:

$$H_r(j\Omega) = \begin{cases} H^{-1}(j\Omega)\text{, se } |\Omega| \le \dfrac{\pi}{T} \\ 0\text{, se não} \end{cases}$$

que igualmente se representa para T=1



Aula nº 5

Problema 1

O sinal discreto x(n), obtido por amostragem com período T de um sinal analógico $x_c(t)$, tem espectro não nulo só para $|\omega| < \pi/2$.

Suponha que realiza uma interpolação de 1 para 4 do sinal x(n), obtendo o sinal $x_i(n)$.

a. Esboce um possível espectro do sinal $x_i(n)$.

b. Especifique o filtro de reconstrução ideal e compensado que recupera o sinal analógico a partir de $x_i(n)$, usando reconstrução de ordem zero (com pedestal de largura T/4).

c. Comparando este filtro de reconstrução com o obtido no problema 3 da aula anterior, explique porque os leitores de discos compactos fazem, em geral, uso de filtros digitais dedicados para fazer interpolação digital? (um valor comum é "*8 times oversampling*").

Solução:

Problema 2

Repita a alínea b. do problema anterior, supondo que utiliza a reconstrução de primeira ordem (interpolação linear).

Solução:

Aula nº 6

Problema 1

Considere um sinal discreto h(n) e a sua transformada em z, H(z).

Determine o sinal discreto cuja transformada em z é

a. H(-z) .

b. $H(z^2)$.

<u>Solução</u>:

a. $$H(-z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n)(-z)^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n h(n) z^{-n} \Leftrightarrow (-1)^n h(n)$$

b. $$H(z^2) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n)(z^2)^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n) z^{-2n} \Leftrightarrow h(n/2), \text{se n par} \vee 0, \text{se não}$$

Problema 2

Considere o sistema discreto causal

y(n) = 2x(n) + 0.7y(n-1) - 0.1y(n-2) .

a. Determine a sua função de transferência H(z).

b. Represente graficamente, de modo aproximado, a amplitude da sua resposta em frequência $|H(e^{j\omega})|$.

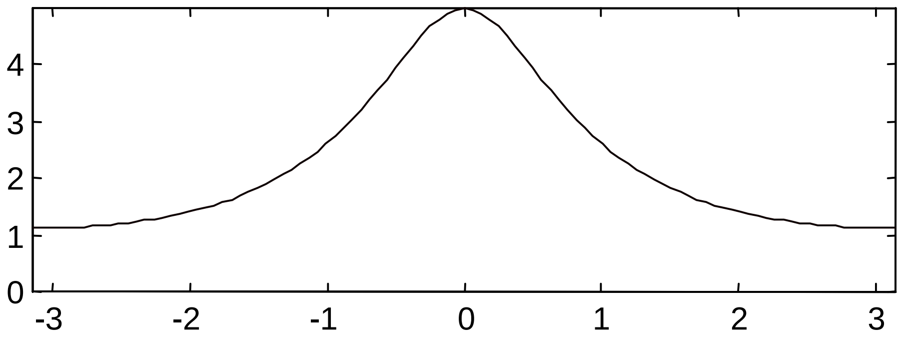
c. Calcule a sua resposta impulsional h(n).

<u>Solução</u>:

a. $$H(z) = \frac{2}{1-0.7z^{-1}+0.2z^{-2}} = \frac{2z^2}{(z-0.2)(z-0.5)}, |z| > 0.5$$

b. $$|H(e^{j\omega})| = \frac{2}{|e^{j\omega}-0.2| . |e^{j\omega}-0.5|}$$

|H(0)| = 2/(0.8x0.5) = 5 ; |H(1)| = 2/(1.2x1.5) = 1.11…



c. $$H(z) = \frac{-4z/3}{z-0.2} + \frac{10z/3}{z-0.5} \Rightarrow h(n) = -\frac{4}{3}0.2^n u(n) + \frac{10}{3}0.5^n u(n)$$

(será interessante repetir a resolução usando o método geral, e verificá-la determinando os primeiros termos de h(n) pelo método da divisão dos polinómios)

Aula nº 7

Problema 1

Um sistema discreto tem um polo em α e um zero em $1/\alpha^*$.

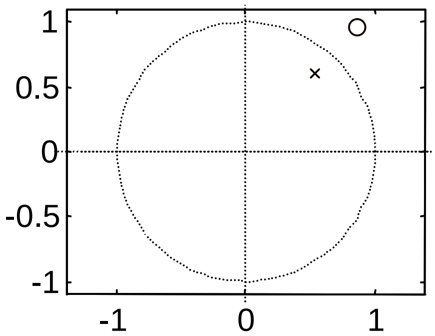
a. Represente graficamente, no plano z, o polo e o zero do sistema.

b. Mostre que o módulo da resposta em frequência deste sistema é independente de ω (sistema do tipo passa tudo).

c. Tente obter uma expressão para a fase da resposta em frequência.

<u>Solução</u>:

a.



(este é o caso geral; há alguns casos particulares)

b.

$$H(z) = \frac{z - \frac{1}{\alpha^*}}{z - \alpha}$$

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = \left|\frac{e^{j\omega} - \frac{1}{\alpha^*}}{e^{j\omega} - \alpha}\right| = \left|\frac{e^{j\omega}}{\alpha^*}\frac{\alpha^* - e^{-j\omega}}{e^{j\omega} - \alpha}\right| = \left|\frac{1}{\alpha^*}\right|$$

(há uma solução gráfica)

c. Em termos de fase, e para $\alpha \in R$

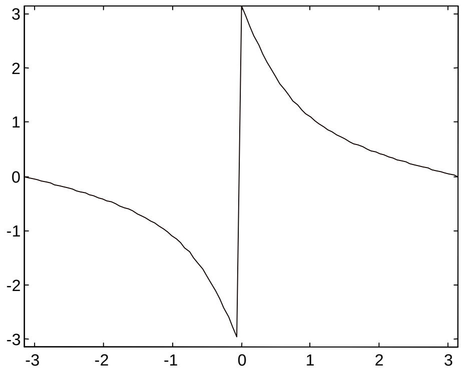
$$\arg(H(e^{j\omega})) = \frac{\arg(\cos\omega + j\,\mathrm{sen}\omega - \frac{1}{\alpha})}{\arg(\cos\omega + j\,\mathrm{sen}\omega - \alpha)} = \mathrm{arctg}\frac{\alpha\,\mathrm{sen}\omega}{\alpha\cos\omega - 1} - \mathrm{arctg}\frac{\mathrm{sen}\omega}{\cos\omega - \alpha}$$

e como $\mathrm{tg}(\theta - \varphi) = \dfrac{\mathrm{tg}\theta - \mathrm{tg}\varphi}{1 + \mathrm{tg}\theta\,\mathrm{tg}\varphi}$

$$\mathrm{tg}\left[\arg(H(e^{j\omega}))\right] = \frac{\frac{\alpha\,\mathrm{sen}\omega}{\alpha\cos\omega - 1} - \frac{\mathrm{sen}\omega}{\cos\omega - \alpha}}{1 + \frac{\alpha\,\mathrm{sen}\omega}{\alpha\cos\omega - 1}\frac{\mathrm{sen}\omega}{\cos\omega - \alpha}} = \frac{(1-\alpha^2)\,\mathrm{sen}\omega}{2\alpha - (1+\alpha^2)\cos\omega}$$

$$\arg(H(e^{j\omega})) = \mathrm{arctg}\frac{(1-\alpha^2)\,\mathrm{sen}\omega}{2\alpha - (1+\alpha^2)\cos\omega}$$

representado a seguir para $\alpha = 0.5$



Problema 2

Considere um sistema do tipo FIR com zeros em $0.8e^{\pm j\frac{\pi}{3}}$ e $1.25e^{\pm j\frac{\pi}{3}}$.

a. Determine a sua função de transferência H(z).

b. Determine dois outros sistemas do mesmo tipo e com a mesma amplitude da resposta em frequência (diferindo apenas na fase).

Solução:

a. $$H(z) = z^{-4}(z-0.8e^{j\frac{\pi}{3}})(z-0.8e^{-j\frac{\pi}{3}})(z-1.25e^{j\frac{\pi}{3}})(z-1.25e^{-j\frac{\pi}{3}})$$

$$H(z) = z^{-4}(z^2-1.6\cos\frac{\pi}{3}z+0.64)(z^2-2.5\cos\frac{\pi}{3}z+1.5625) = 1-2.05z^{-1}+3.2025z^{-2}-2.05z^{-3}+z^{-4}$$

(sistema com fase linear)

b. Colocando em série sistemas do tipo passa tudo e ganho unitário

1. com zeros em $0.8e^{\pm j\frac{\pi}{4}}$ e polos em $1.25e^{\pm j\frac{\pi}{4}}$

$$H(z) = 1.5625z^{-4}(z-0.8e^{j\frac{\pi}{3}})^2(z-0.8e^{-j\frac{\pi}{3}})^2 = 1.5625-2.5z^{-1}+6z^{-2}-1.6z^{-3}+0.64z^{-4}$$

(sistema com fase mínima)

2. com zeros em $1.25e^{\pm j\frac{\pi}{4}}$ e polos em $0.8e^{\pm j\frac{\pi}{4}}$

$$H(z) = 0.64z^{-4}(z-1.25e^{j\frac{\pi}{3}})^2(z-1.25e^{-j\frac{\pi}{3}})^2 = 0.64-1.6z^{-1}+6z^{-2}-2.5z^{-3}+1.5625z^{-4}$$

(sistema com fase máxima)

Problema 3

Considere o sistema discreto causal com função de transferência

$$H(z) = \frac{1-0.4z^{-1}}{1-0.8z^{-1}+0.64z^{-2}}.$$

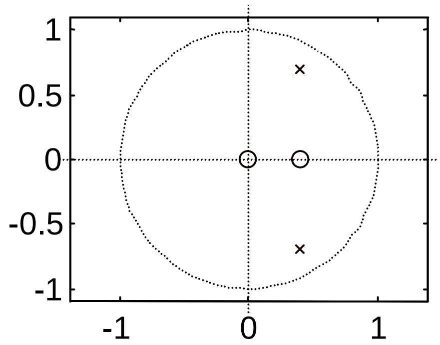
a. Localize no plano z os polos e zeros deste sistema e a região de convergência de H(z).

b. Calcule a sua resposta impulsional h(n).

c. Determine a equação às diferenças que rege o sistema.

Solução:

a.



b. $\alpha = 0.8e^{j\frac{\pi}{3}}$

$$h(n) = \oint_C \frac{z^n(z-0.4)}{(z-\alpha)(z-\alpha^*)}dz = \frac{\alpha^n(\alpha-0.4)}{\alpha-\alpha^*} + \frac{(\alpha^*)^n(\alpha^*-0.4)}{\alpha^*-\alpha} = \frac{j\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha^n - j\frac{\sqrt{3}}{2}(\alpha^*)^n}{j\sqrt{3}} = 0.8^n\cos(\frac{\pi}{3}n)u(n)$$

c. $y(n) = x(n) - 0.4x(n-1) + 0.8y(n-1) - 0.64y(n-2)$

Aula nº 8

Problema 1

Utilizando apenas propriedades elementares da transformada em z, determine a transformada em z inversa de

a. $H(z) = \dfrac{1}{1-z^{-4}}$, causal.

b. $H(z) = \dfrac{z}{z^2-0.5}$, causal.

Solução:

a. $\dfrac{1}{1-z^{-1}} \Leftrightarrow u(n)$

$\dfrac{1}{1\text{-}z^{-4}} \Leftrightarrow u(n/4)\ \text{se n múltiplo de } 4 \vee 0\ \text{se não}$

b. $\dfrac{z}{z-0.5} \Leftrightarrow 0.5^n u(n)$

$\dfrac{z^2}{z^2-0.5} \Leftrightarrow 0.5^{n/2} u(n/2)\ \text{se n par} \vee 0\ \text{se não}$

$\dfrac{z}{z^2-0.5} \Leftrightarrow 0.5^{\frac{n-1}{2}} u(\dfrac{n-1}{2})\ \text{se n ímpar} \vee 0\ \text{se não}$

Problema 2

Considere o sistema discreto do tipo FIR com zeros em

$0.3+j0.4,\ 0.3-j0.4,\ (0.3+j0.4)^{-1},\ (0.3-j0.4)^{-1},\ 0.6+j0.8,\ 0.6-j0.8,\ -1.$

a. Determine a sua resposta impulsional h(n).

b. Mostre que o sistema é de fase linear.

c. Decomponha o sistema numa associação em série de dois sistemas, cada um deles ainda de fase linear.

Solução:

a. $H(z) = z^{-7}(z - 0.3\text{-}j0.4)(z - 0.3+j0.4)(z - (0.3+j0.4)^{-1})(z - (0.3\text{-}j0.4)^{-1})(z - 0.6\text{-}j0.8)(z - 0.6+j0.8)(z + 1)$

$H(z) = z^{-7}(z^2 - 0.6z + 0.25)(z^2 - 2.4z + 4)(z^2 - 1.2z + 1)(z + 1)$

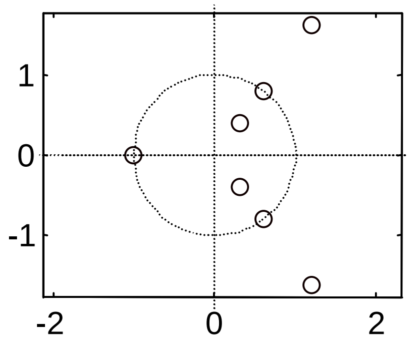
$H(z) = z^{-7}(z^4 - 3z^3 + 5.69z^2 - 3z + 1)(z^3 - 0.2z^2 - 0.2z + 1)$

$H(z) = z^{-7}(z^7 - 3.2z^6 + 6.09z^5 - 2.538z^4 - 2.538z^3 + 6.09z^2 - 3.2z + 1)$

$h(n) = [1\ -3.2\ 6.09\ -2.538\ -2.538\ 6.09\ -3.2\ 1]$

b. A resposta impulsional é simétrica.

c. (ver 3ª linha de a))



$H(z) = z^{-4}(z^4 - 3z^3 + 5.69z^2 - 3z + 1)\ z^{-3}\ (z^3 – 0.2z^2 – 0.2z + 1)$

Aula nº 9

Problema 1

a. Calcule a DFT do sinal discreto [0, 1, 1, 0].

b. Utilizando o resultado anterior, calcule a DFT do sinal discreto [0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0].

Problema 2

Pretende-se projectar um sistema discreto utilizando o método da amostragem da resposta em frequência. O número de amostras é de 16, e sabe-se que as únicas amostras diferentes de zero são

$H(0) = H(1) = H(15) = 1$

$H(2) = H(14) = 0.5.$

Escreva as equações às diferenças que realizam este sistema.

<u>Solução</u>:

O caminho a seguir é H(k) $\rightarrow$ h(n) $\rightarrow$ H(z) $\rightarrow$ sistema, utilizando-se a iDFT e a transformada em z

$$h(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} H(k) W_N^{-nk}$$

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} H(k) W_N^{-nk} z^{-n} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} H(k)\sum_{n=0}^{N-1}(W_N^{-k} z^{-1})^n$$

$$H(z) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} H(k)\frac{1-(W_N^{-k}z^{-1})^N}{1-W_N^{-k}z^{-1}} = \frac{1-z^{-N}}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{H(k)}{1-W_N^{-k}z^{-1}}$$

O sistema pretendido é constituído pela associação em série do sistema do tipo não recursivo (FIR)

$$H_p(z) = \frac{1-z^{-N}}{N}$$

que é um sistema com N zeros igualmente espaçados sobre a circunferência unitária do plano z, em $z_k = W_N^{-k}, k = 0...N-1$, normalmente designado por filtro em pente (‘*comb filter*’), com o paralelo de N sistemas do tipo recursivo (IIR)

$$H_k(z) = \frac{H(k)}{1-W_N^{-k}z^{-1}}, k = 0..N-1$$

cada um com um polo exactamente em $z_k = W_N^{-k}$. Cada um destes polos é cancelado por um dos zeros do primeiro sistema, resultando

$$H(z)\big|_{z=W_N^{-k}} = H(k).$$

Se H(k) = H(N-k), é possível agrupar os polos conjugados em sistemas de segunda ordem

$$H_{kk}(z) = \frac{H(k)}{1-W_N^{-k}z^{-1}} + \frac{H(k)}{1-W_N^{k}z^{-1}} = H(k)\frac{2-2\cos\frac{2k\pi}{N}z^{-1}}{1-2\cos\frac{2k\pi}{N}z^{-1}+z^{-2}}.$$

No caso dado

$$H_p(z) = \frac{1 - z^{-16}}{16}$$

$$H_0(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

$$H_{11}(z) = \frac{2 - 2\cos\frac{\pi}{8} z^{-1}}{1 - 2\cos\frac{\pi}{8} z^{-1} + z^{-2}}$$

$$H_{22}(z) = \frac{1 - \cos\frac{\pi}{4} z^{-1}}{1 - 2\cos\frac{\pi}{4} z^{-1} + z^{-2}}$$

$$H(z) = H_p(z)\left[H_0(z) + H_{11}(z) + H_{22}(z)\right]$$

a que correspondem as equações

$$v(n) = \frac{x(n) - x(n-16)}{16}$$

$$y_0(n) = v(n) + y_0(n-1)$$

$$y_{11}(n) = 2v(n) - 2\cos\frac{\pi}{8} v(n-1) + 2\cos\frac{\pi}{8} y_{11}(n-1) - y_{11}(n-2)$$

$$y_{22}(n) = v(n) - \cos\frac{\pi}{4} v(n-1) + 2\cos\frac{\pi}{4} y_{22}(n-1) - y_{22}(n-2)$$

$$y(n) = y_0(n) + y_{11}(n) + y_{22}(n)\,.$$

Aula nº 10

Problema 1

Considere o sinal discreto $x(n)=2^{-n}u(n)$ e a sua transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$. Determine o sinal discreto y(n) de comprimento N cuja DFT é

$$Y(k) = X(e^{j\frac{2\pi}{N}k}), k = 0,..., N-1 .$$

<u>Solução</u>:

Verifica-se aqui o fenómeno do *aliasing*, e poderíamos escrever imediatamente o resultado ... Fazendo "as contas", temos

$$X(z) = \sum_{r=0}^{+\infty} 2^{-r} z^{-r} \ , |z| > \frac{1}{2}$$

$$Y(k) = \sum_{r=0}^{+\infty} 2^{-r} e^{-j\frac{2\pi rk}{N}}$$

$$y(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{r=0}^{+\infty} 2^{-r} e^{-j\frac{2\pi rk}{N}} \ W_N{}^{-nk} = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{+\infty} 2^{-r} \sum_{k=0}^{N-1} W_N{}^{(r-n)k}$$

e como o segundo somatório vale 0 se r-n≠0, N, 2N, ... e N se r-n=0, N, 2N, ...

$$y(n) = \sum_{r=0}^{+\infty} 2^{-n+rN} \ , n = 0...., N\text{ -1} .$$

Aula nº 11

Problema 1

Pretende-se filtrar um sinal discreto x(n), de comprimento indeterminado, com um filtro FIR, de comprimento 71, utilizando a convolução rápida, pelo método *overlap-add*.

Determine o comprimento N da FFT raiz 2 que minimiza o número de multiplicações complexas a realizar por amostra à saída. Considere que N não pode exceder 2048 e que pode desprezar as multiplicações realizadas para o cálculo da DFT da resposta impulsional do filtro.

<u>Solução</u>:

Analisam-se os cinco comprimentos possíveis:

N	L	n.a	n.b	n.m	m/a
128	58	7	64	1024	17.66
256	186	8	128	2304	12.39
512	442	9	256	5120	11.58
1024	954	10	512	11264	11.81
2048	1978	11	1024	24576	12.42

Problema 2

Faça um diagrama de fluxo para um programa para a FFT, algoritmo de decimação na frequência, entradas ordenadas.

Aula nº 12

Problema 1

Pretende-se projectar um filtro digital passa-banda, do tipo FIR, tal que

$$H(e^{j\Omega T}) \approx \begin{vmatrix} 0 & |\Omega| < 400\,\text{rad/s} \\ 1 & 400 \le |\Omega| \le 600\,\text{rad/s} \\ 0 & 600 < |\Omega| \le 1000\,\text{rad/s} \end{vmatrix}$$

ara a frequência angular de amostragem $\Omega_s = \frac{2\pi}{T} = 2000\,\text{rad/s}$.

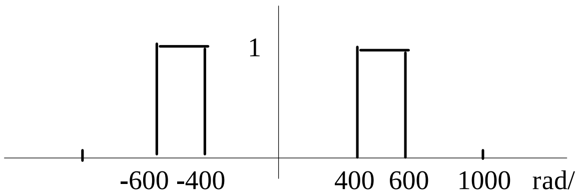
a. Determine a resposta impulsional do filtro analógico protótipo.

b. Determine os coeficientes do filtro digital, utilizando uma janela de Hanning de comprimento 7.

c. Faça um esboço da resposta em frequência do filtro digital.

<u>Solução</u>:

a.

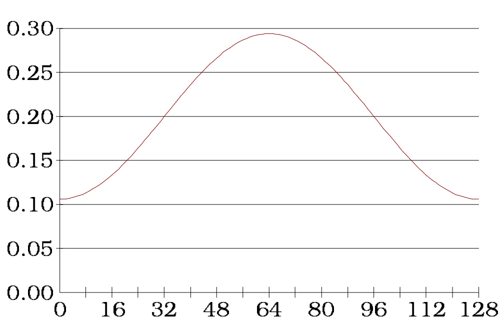


$$h_c(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H_c(j\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega = \frac{600}{\pi}senc(600t) - \frac{400}{\pi}senc(400t)$$

b. $h(n) = (0.6senc(0.6\pi n) - 0.4senc(0.4\pi n))w(n)$

n	0.6senc(0.6πn)	0.4senc(0.4πn)	h_d(n)	ω(n)	h(n)
-3	-0.062	-0.062	0.000	0.000	0.000
-2	-0.094	0.094	-0.187	0.250	-0.047
-1	0.303	0.303	0.000	0.750	0.000
0	0.600	0.400	0.200	1.000	0.200
1	0.303	0.303	0.000	0.750	0.000
2	-0.094	0.094	-0.187	0.250	-0.047
3	-0.062	-0.062	0.000	0.000	0.000

c. gráfico aproximado



Aula nº 13

Problema 1

Considere o filtro analógico passa baixo

$$H_a(s) = \frac{1}{1+0.08s} \ .$$

a. Determine a frequência de corte Ω_c (atenuação igual a 3 dB) deste filtro.

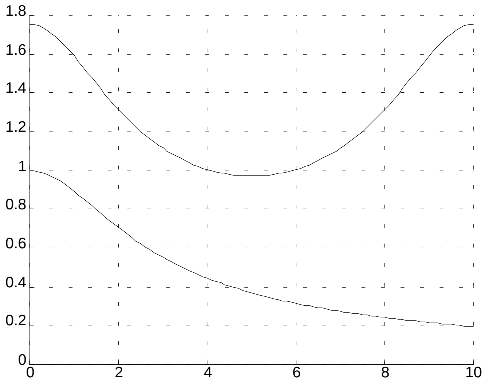
b. Determine o filtro digital que se obtem de $H_a(s)$ pelo método da invariância da resposta impulsional, para uma frequência de amostragem de 10 Hz.

c. Represente graficamente a amplitude da resposta em frequência deste filtro digital e a do filtro analógico original, e explique as eventuais diferenças entre ambas.

Solução:

$$H_a(s) = \frac{1}{1+0.08s} = \frac{12.5}{s+12.5} \Rightarrow \Omega_c = 12.5 \text{ rad/s} \therefore \text{F}_\text{c} = 1.984\, Hz$$

$$H(z) = \frac{1.25}{1-e^{-1.25}z^{-1}}$$



nota-se um acentuado efeito de *aliasing*.

Problema 2

Pretende-se projectar um filtro digital passa-baixo, usando o método da transformação bilinear, a partir de um filtro de Butterworth de 3ª ordem, de tal modo que à frequência de amostragem de 10 kHz a sua frequência superior de corte seja de 1 kHz.

a. Determine a frequência superior de corte do filtro analógico protótipo.

b. Localize, no plano z, os polos do filtro digital.

c. Determine a partir de que frequência a atenuação do filtro digital é melhor que 60 dB.

Solução:

de acordo com o enunciado

a. $$\Omega_c = \frac{2}{T} tg \frac{\omega_c}{2} = 20000 tg \frac{\pi}{10} = 6498.4 \text{ rad/s}$$

c. $$10\log\frac{1}{1+(\frac{\Omega}{6498.4})^6} < -60 \Rightarrow (\frac{\Omega}{6498.4})^6 > 999999 \Rightarrow \Omega = 64984$$

donde

$$\omega = 2tg^{-1}\frac{\Omega T}{2} = 2.5445\,\text{rad}$$