

Francisco José de Oliveira Restivo

Professor Associado

Departamento de Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

Processamento Digital de Sinal

Tópicos

Ano Lectivo 1998/99

Dezembro de 1998

Índice

1.	Processamento Digital de Sinal	5
1.1	Sinais	5
1.2	Sinais Contínuos e Discretos	5
1.3	Sistemas Contínuos e Discretos	5
1.4	Processamento Digital de Sinal	6
1.5	Breve História do PDS	7
1.6	Vantagens do PDS	8
1.7	Microprocessadores de Sinal	8
1.8	Bibliografia	8
2.	Sinais e Sistemas Discretos	10
2.1	Sinais Discretos	10
2.2	Convolução Discreta	10
2.3	Sistemas Discretos FIR e IIR	13
2.4	Sistemas Discretos Recursivos e Não Recursivos	14
2.5	Operação em Tempo Real e Operação em Tempo Diferido	14
2.6	Sistemas Discretos Causais	14
2.7	Sistemas Discretos Estáveis	14
2.8	Frequência de um Sinal Discreto	15
2.8.1	Fase	16
2.8.2	Gamas de frequências	17
2.9	Resposta em Frequência de um Sistema Discreto	18
2.10	Transformada de Fourier de um Sinal Discreto	20
2.11	Propriedades da Transformada de Fourier	22
2.11.1	Propriedade da Translação	22
2.11.2	Propriedade da Convolução	22
2.11.3	Propriedades de Simetria	23
2.12	Equação às Diferenças e Resposta em Frequência	25
3.	Amostragem de Sinais Contínuos	26
3.1	Introdução	26
3.1	Teorema da Amostragem	29
3.2	<i>Aliasing</i>	29
3.2.1	Uma explicação simples	29

3.3	Reconstrução de um Sinal Amostrado	31
3.4	Amostragem Real	32
3.5	Reconstrução Real	33
3.6	Interpolação	35
3.7	Decimação	37
3.8	Conversão Fraccionária da Frequência de Amostragem	38
4.	Transformada em z	39
4.1	Definição	39
4.2	Região de Convergência	40
4.3	Relação com a Transformada de Fourier	41
4.4	Algumas Propriedades da Transformada em z	42
4.5	Propriedade da Convolução	42
4.6	Função de Transferência de um Sistema Discreto	43
4.7	Estabilidade e Causalidade	43
4.8	Avaliação Geométrica da Transformada de Fourier	43
4.9	Inversão da Transformada em z	45
4.9.1	Método da Divisão	45
4.9.2	Método da Decomposição em Fracções Simples	45
4.9.3	Integral de Linha	46
4.10	Propriedade da Convolução Complexa	48
5.	DFT - Transformada de Fourier Discreta	51
5.1	Introdução	51
5.1.1	Amostragem nos Domínios do Tempo e da Frequência	51
5.1.2	Sinais Periódicos nos Domínios do Tempo e da Frequência	52
5.2	DFS - Série de Fourier Discreta	55
5.3	DFT - Transformada de Fourier Discreta	56
5.4	Propriedades da DFT	59
5.5	Relação com a Transformada em z	61
5.6	Convolução Linear Utilizando a DFT	62
5.6.1	Método <i>Overlap-Add</i>	62
5.6.2	Método <i>Overlap-Save</i>	64
5.7	FFT - Transformada Rápida de Fourier	64
5.7.1	Decimação no Tempo	65
5.7.2	Decimação na Frequência	69
5.7.3	Raiz 4	71
5.7.4	Raiz Dupla	72
5.8	Transformada de Fourier Discreta Inversa	74
5.9	Transformada de Fourier Discreta de Sinais Reais	75

5.10	CZT - <i>Chirp Z Transform.</i>	76
6.	Filtros Digitais	79
6.1	Introdução	79
6.2	Projecto de Filtros Digitais do Tipo FIR.	79
6.2.1	Classificação.	80
6.2.2	Relações entre os Zeros dos Filtros FIR com Fase Linear.	82
6.2.3	Métodos de Projecto.	83
6.3	Projecto de Filtros Digitais do Tipo IIR.	89
6.3.1	Método da Invariância da Resposta Impulsional.	89
6.3.2	Transformação Bilinear.	91
6.4	Transformações no Domínio das Frequências.	96
6.4.1	Filtros Passa Tudo.	96
6.4.2	Transformações no Domínio das Frequências.	98
7.	Realização de Sistemas Discretos	101
7.1	Gráficos de Fluência	101
7.2	Formas Directas	102
7.2.1	Filtros FIR	102
7.2.2	Filtros IIR	104
7.3	Realizações Série e Paralelo	104
7.3.1	Filtros FIR	104
7.3.2	Filtros IIR	105

1. Processamento Digital de Sinal

1.1 Sinais

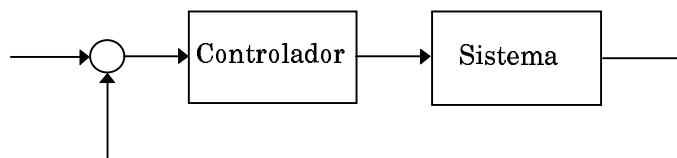
Toda a nossa vida se baseia em sinais, que são medidos, processados, analisados, e dão origem a decisões. O som, a temperatura e a luz são exemplos de sinais que utilizamos no dia a dia.

Os ouvidos convertem o som em sinais eléctricos, que chegam ao cérebro, e este é capaz de analisar algumas das suas propriedades, tais como amplitude, frequência e fase, determinar a direcção em que se encontra a fonte de som, e reconhecê-lo, como música, fala, o ruído de um automóvel, etc..

Os nervos colocados nas partes expostas da pele sentem a temperatura e enviam para o cérebro sinais eléctricos, que podem originar decisões tais como ligar um aquecedor, abrir uma janela, etc..

Os olhos focam as imagens na retina, que converte essas imagens em sinais eléctricos e os envia para o cérebro, que, pela análise da cor, da forma, da intensidade, etc., da luz é capaz de reconhecer objectos, medir distâncias, detectar o movimento, etc..

Um sistema de controlo baseia-se nestes mesmos princípios: um sinal representativo da grandeza a controlar é comparado com uma referência e o sinal de erro é processado pelo controlador para determinar a acção correctiva adequada



1.2 Sinais Contínuos e Discretos

Nos sistemas contínuos, os sinais de entrada e de saída são sinais contínuos, funções de uma variável contínua, normalmente o tempo, t .

Em certas condições, um sinal contínuo $x_c(t)$ pode ser representado univocamente por um sinal em tempo discreto, ou simplesmente, sinal discreto, $x(n)$, uma função de uma variável discreta, n .

O teorema da amostragem estabelece essas condições para o caso da amostragem periódica

$$x(n) = x_c(n\Delta T),$$

em que ΔT é o período de amostragem.

1.3 Sistemas Contínuos e Discretos

Se os sinais contínuos à entrada e à saída de um sistema contínuo H_c podem ser representados por sinais discretos, então o funcionamento do sistema contínuo H_c poderá também ser representado por um conjunto de relações entre esses sinais discretos, ou seja, por um sistema discreto H .

Enquanto que a relação entrada/saída de um sistema contínuo (unidimensional) é normalmente um equação diferencial, num sistema discreto essa relação é normalmente uma equação às diferenças, o que facilita substancialmente o cálculo da resposta do sistema a uma dada entrada.

Exemplo

Consideremos o sistema definido pela equação às diferenças

$$y(n) = 0.4x(n) + 0.6y(n-1).$$

Suponhamos que a este sistema é aplicada a entrada

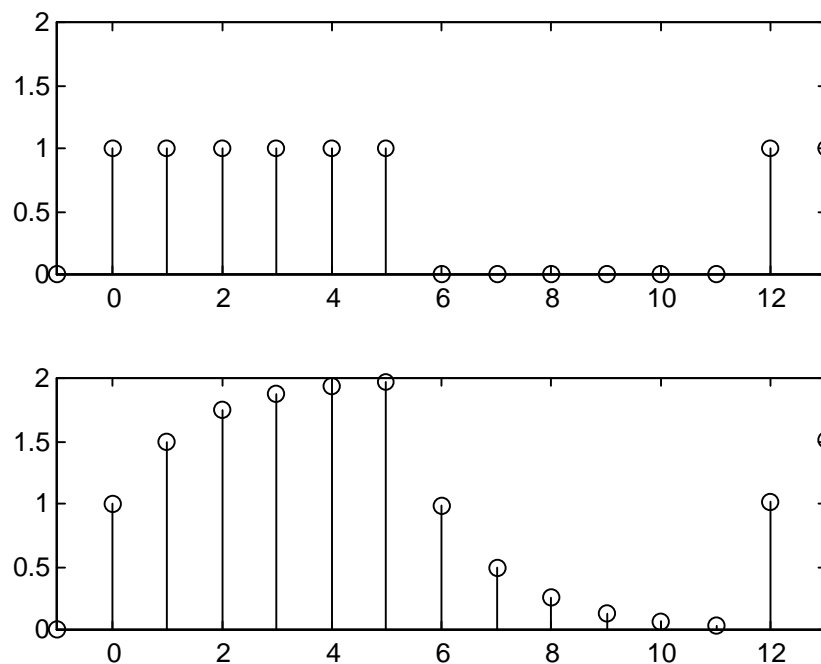
$$x(n) = \begin{cases} 0 & \text{se } n < 0 \text{ ou } (n > 0 \text{ e } n \bmod 12 > 5) \\ 1 & \text{se não,} \end{cases}$$

e que o sistema se encontra inicialmente relaxado ($y(-1) = 0$).

A resposta $y(n)$ do sistema obtém-se realizando apenas duas multiplicações e uma adição para calcular cada termo de $y(n)$. Em MATLAB, o programa seguinte permite calcular os primeiros termos de $y(n)$,

```
x=[0 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 1 1];
y(1)=0;
for i=2:15, y(i)=x(i)+0.5*y(i-1); end
t=-1:1:13;
a=[-1 13 0 2];
clf, subplot(2,1,1), stem(t,x), axis(a)
subplot(2,1,2), stem(t,y), axis(a)
```

e a representação gráfica de $x(n)$ e $y(n)$ já fornece uma ideia do que será possível realizar com operações simples como estas.

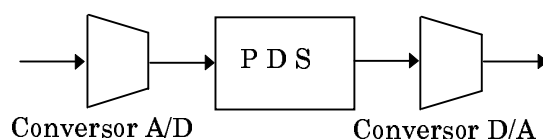


Na realidade, estamos a realizar um sistema discreto de primeira ordem, que poderia ser utilizado, por exemplo, para estudar o fenómeno da carga/descarga de um condensador.

1.4 Processamento Digital de Sinal

Os fantásticos desenvolvimentos que nos últimos anos se verificaram na microelectrónica, tornaram possível pôr em prática esta ideia de uma forma efectiva, e estão na origem do Processamento Digital de Sinal (PDS), disciplina que hoje ocupa um papel preponderante nas telecomunicações, no controlo, na instrumentação, na engenharia biomédica, etc..

A razão porque se diz processamento **digital** de sinal decorre do facto de a realização de um sistema discreto implicar normalmente a digitalização das amostras dos seus sinais de entrada e de saída.



Convém contudo referir que existem actualmente certas implementações de sistemas discretos (por exemplo, com condensadores comutados) em que os valores das amostras desses sinais são armazenados de uma forma analógica, pelo que seria talvez mais correcto falar-se de Processamento Discreto de Sinal.

Importa também realçar que PDS não é apenas a realização discreta de sistemas contínuos.

Por um lado, existem sinais discretos que não são uma amostragem de sinais contínuos, como é, por exemplo, o sinal $v(n)$

n - dia do ano

$v(n)$ - veículos que atravessaram a Ponte da Arrábida no dia n ,

que pode perfeitamente interessar processar.

Por outro, nem sempre o resultado do processamento de um sinal discreto é outro sinal discreto da mesma natureza, como acontece num sistema de reconhecimento de voz, por exemplo.

Nesta disciplina, começaremos por estudar os sinais e sistemas discretos independentemente da sua relação com os sinais e sistemas contínuos, e só posteriormente estudaremos essa relação.

Também estudaremos apenas os sinais e sistemas discretos unidimensionais, sendo contudo razoavelmente simples a extensão do estudo aos sinais multidimensionais (imagens, por exemplo).

1.5 Breve História do PDS

Os modelos matemáticos básicos dos sinais e sistemas contínuos remontam ao século XIX, com as transformadas de Laplace e de Fourier.

Jean Baptiste Joseph Fourier nasceu em Auxerre, França, em 1768 e morreu em Paris em 1830. Um dos maiores matemáticos de todos os tempos, estudou a teoria matemática da condução do calor, tendo estabelecido, no monumental tratado *Théorie Analytique de la Chaleur*, que publicou em 1822, a equação às derivadas parciais que governa o fenómeno e obtido a sua solução usando o desenvolvimentos em série das funções trigonométricas. Os seus trabalhos contribuíram para muitas áreas da matemática, ciência e engenharia.

Pierre Simon, Marquês de Laplace, o maior astrónomo teórico depois de Newton, nascido vinte anos antes de Fourier, aplicou os seus conhecimentos matemáticos ao estudo dos movimentos planetários, dando origem à hoje designada transformada de Laplace, que cedo encontrou aplicação em muitas outras áreas científicas.

Também De Moivre, que em 1730 introduziu a hoje chamada transformada em z , deve ser creditado como um dos precursores do Processamento Digital de Sinal.

No entanto, é ao advento dos computadores digitais, verificado nos anos 40, que se deve o nascimento do PDS como disciplina. Nos anos 50, engenheiros e cientistas como Shannon e Bode nos Bell Telephone Laboratories e Linville no MIT foram certamente dos primeiros a equacionar a utilização de computadores de sinal em processamento de sinal.

No início dos anos 60, Kaiser, nos laboratórios Bell, apresentou importantes contribuições para a análise e a síntese de filtros digitais, e a transformada rápida de Fourier (FFT) foi 'descoberta' em 1965 por Cooley e Tukey, apesar de a sua origem poder ser atribuída aos matemáticos alemães Runge e mesmo Gauss.

A publicação, em 1975, dos livros referência [5] e [6] marca verdadeiramente o nascimento de PDS como disciplina, e dos seus autores como os seus verdadeiros criadores.

Actualmente, o PDS emergiu das aplicações militares onde nasceu e desempenha um papel chave em produtos de consumo, industriais e de telecomunicações. Microprocessadores de sinal de baixo custo são componentes essenciais de jogos electrónicos, telefones celulares, brinquedos, leitores de CDs, discos de computadores, modems, impressoras, sistemas de reconhecimento de voz e de conferência vídeo, e muitos outros produtos familiares. Cada vez mais aplicações tradicionalmente do domínio dos sistemas analógicos estão a encontrar soluções digitais mais baratas e mais fiáveis.

1.6 Vantagens do PDS

Utilizar um conversor AD, um microprocessador, e um conversor DA para a realização discreta de um sistema equivalente a um filtro passa baixo do tipo RC elementar, não será, em princípio, vantajoso do ponto de vista económico, embora se pudesse conceber uma situação em fosse interessante, por exemplo, tirando partido do facto da solução discreta ser programável.

Esta poderia mesmo não ser possível, se a frequência de amostragem requerida excedesse os limites da tecnologia dos conversores AD e DA.

Frequência de amostragem e custo, constituem as duas grandes limitações à utilização do PDS.

As soluções discretas têm, no restante, grandes vantagens sobre as soluções contínuas, pois são normalmente programáveis, são fiáveis, repetitivas e resistentes ao envelhecimento, permitem controlar com mais rigor a precisão dos resultados, etc., e são preferidas numa grande gama de aplicações.

Outras vantagens das soluções discretas resultam da facilidade em resolver os problemas de instabilidade, de implementação de algoritmos adaptativos, de utilização de códigos de detecção e correcção de erros, de transmissão e armazenamento e compressão de dados.

1.7 Microprocessadores de Sinal

Todos os grandes fabricantes de microelectrónica oferecem hoje microprocessadores de sinal (e de imagem, que é um sinal bidimensional), adaptados aos algoritmos mais utilizados em PDS: convolução, transformada de Fourier discreta, etc..

Nos primeiros dois anos dos anos 80, surgiram no mercado quatro microprocessadores de sinal, sendo normalmente aceite que o primeiro destes foi o S2811, da American Microsystems Inc.. Quasi ao mesmo tempo, surgiram o Intel 2920, com conversores AD e DA incorporados, e com o qual se podia realizar facilmente um modem, por exemplo, e o NEC PD7720. O último, mas definitivamente mais avançado, foi o TMS32010, da Texas Instruments.

Uma característica comum a estes microprocessadores era a adopção da arquitectura de Harvard, com memória de programa e memória de dados distintas, o que permitia o acesso simultâneo a uma instrução e a um dado.

Actualmente, a Texas Instruments, com a família de microprocessadores TMS320Cxx, a Motorola, com os microprocessadores M56000 e M96000, a NEC, com o microprocessador μ PD77230, a AT&T, com os microprocessadores DSP16 e DSP32, a Oki, a Analog Devices, a Inmos, com os microprocessadores IMS A100, A110 e A121, a Plessey, a Zoran, etc., fornecem dispositivos que permitem realizar aplicações de PDS altamente sofisticadas.

Por outro lado, convém não esquecer o progresso que em paralelo se verificou nos componentes analógicos, e nomeadamente no amplificador operacional, bem como nos componentes que realizam a 'ligação' entre o mundo analógico e o mundo digital, tais como os conversores A/D e D/A e os comparadores.

Com o progresso das tecnologias VLSI, começam também a ser vulgares implementações mistas (analógicas e digitais) directamente no silício.

1.8 Bibliografia

A bibliografia publicada na área do PDS é muito vasta.

Recomenda-se qualquer um dos dois seguintes livros para o estudo desta disciplina

- [1] A. V. Oppenheim, R. W. Schaffer, *Discrete-Time Signal Processing*, Prentice-Hall, 1989,
- [2] E. C. Ifeachor, B. W. Jervis, *Digital Signal Processing - A Practical Approach*, Addison-Wesley, 1993.

Outros livros têm sido utilizados, e continuam a servir como textos de apoio

- [3] R. Kuc, *Introduction to Digital Signal Processing*, McGraw-Hill, 1988
- [4] D. J. DeFatta, J. G. Lucas, W. S. Hodgkiss, *Digital Signal Processing: A System Design Approach*, Wiley, 1988.

Os dois livros a seguir marcaram o estabelecimento de PDS como uma disciplina científica própria, e são leitura obrigatória para o seu estudo mais aprofundado

- [5] A. V. Oppenheim, R. W. Schaffer, *Digital Signal Processing*, Prentice-Hall, 1975
- [6] L. R. Rabiner, B. Gold, *Theory and Application of Digital Signal Processing*, Prentice-Hall, 1975.

Outros livros cuja leitura se recomenda são

- [7] E. O. Brigham, *The Fast Fourier Transform*, Prentice-Hall, 1974
- [8] H. J. Nussbaumer, *Fast Fourier Transform and Convolution Algorithms*, Springer-Verlag, 1981
- [9] D. F. Elliot, K. R. Rao, *Fast Transforms: Algorithms, Analyses and Applications*, Academic Press, 1982
- [10] Inmos, *The Digital Signal Processing Databook*, Inmos, 1989
- [11] I. Ahmed, ed., *Digital Control Applications with the TMS320 Family*, Texas Instruments, 1991
- [12] C. E. Reid, T. B. Passin, *Signal Processing in C*, Wiley, 1992
- [13] A. Antoniou, *Digital Filters: Analysis, Design and Applications*, 2nd edition, McGraw-Hill, 1993
- [14] C. Marven, G. Ewers, *A Simple Approach to Digital Signal Processing*, Texas Instruments, 1994
- [15] P. M. Clarkson, H. Stark, *Signal Processing Methods for Audio, Images and Telecommunications*, Academic Press, 1995
- [16] S. K. Mitra, *Digital Signal Processing – A Computer-Based Approach*, McGraw-Hill, 1998.

No que respeita a livros orientados para a utilização de aplicações informáticas como *MatLab*, *MathCad*, *Maple*, *Mathematica* e outras para a resolução de problemas de Processamento de Sinal, , recomenda-se

- [17] C. S. Burrus et al., *Computer-Based Exercises for Signal Processing Using MatLab*, Prentice-Hall (1994)
- [18] P. Denbigh, *System Analysis & Signal Processing*, Addison-Wesley, 1998.

Está disponível na FEUPnet a versão 4.2 de *MatLab*, assim como a maior parte das suas *toolbox*, nomeadamente a de Processamento de Sinal.

Finalmente, importa referir as revistas onde é publicada a maioria dos trabalhos científicos em Processamento de Sinal

- [19] *IEEE Transactions on Signal Processing*, IEEE
- [20] *IEEE Signal Processing Magazine*, IEEE
- [21] *Signal Processing*, Eurasip
- [22] *Circuits, Systems, and Signal Processing*, Birkhauser-Boston, Inc.
- [23] *IEE Proceedings: Vision, Image and Signal Processing*, IEE.

A disciplina de Processamento de Sinal da FEUP tem a sua *homepage* na *Web*

<http://www.fe.up.pt/~fjr/pds.html/>

onde se encontram disponíveis todas as informações relevantes para o seu funcionamento.

2. Sinais e Sistemas Discretos

2.1 Sinais Discretos

Um sinal discreto é uma função da variável discreta $n \in \mathbb{N}$.

A soma de dois sinais discretos, a multiplicação de um sinal discreto por uma constante e o atraso (ou melhor, deslocamento, ou translação) de um sinal discreto, são operações elementares envolvendo sinais discretos que admitimos serem suficientemente óbvias.

Um sinal discreto importante é o impulso unitário $\delta(n)$

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \\ 0, & \text{se não,} \end{cases}$$

devendo notar-se que qualquer sinal discreto pode ser decomposto numa soma de impulsos unitários, deslocados e multiplicados por uma constante

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\delta(n - k) .$$

Outro sinal discreto importante é o degrau unitário $u(n)$

$$u(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n \geq 0 \\ 0, & \text{se não.} \end{cases}$$

Um sistema discreto é um sistema que aceita na(s) sua(s) entrada(s) um sinal (sinais) discreto(s) e que fornece na(s) sua(s) saída(s) um sinal (sinais) discreto(s), sendo conhecida de algum modo a(s) relação (relações) entre uma(s) e outra(s).

Consideraremos neste estudo apenas os sistemas discretos lineares e invariantes (LI).

Num sistema discreto linear, se aplicarmos uma entrada que é uma combinação linear de duas outras, na sua saída encontramos a mesma combinação linear mas agora das saídas correspondentes a essas duas entradas, quando aplicadas separadamente.

Um sistema linear obedece ao princípio da sobreposição.

A resposta de um sistema discreto invariante a uma dada entrada é independente do instante (ou ordem, índice) em que essa entrada é aplicada.

2.2 Convolução Discreta

Se conhecermos a resposta $h(n)$ de um sistema discreto LI à entrada $\delta(n)$, podemos determinar a sua resposta $y(n)$ a qualquer entrada $x(n)$.

Utilizando a decomposição atrás referida

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\delta(n - k) ,$$

e tendo em conta que o sistema é invariante, pelo que a resposta do sistema à entrada $\delta(n-k)$ é $h(n-k)$, e que é linear, pelo que esta combinação linear é respeitada,

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k) .$$

Esta operação entre os sinais discretos $x(n)$ e $h(n)$ designa-se por convolução discreta, e goza da propriedade comutativa, entre outras

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(n-k) .$$

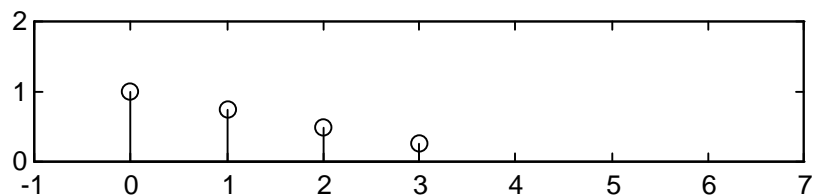
Realmente,

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k-n)h(n-k-n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k-n)h(-k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(n-k)h(k) .$$

Exemplo

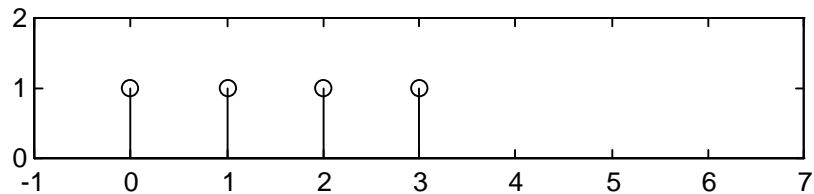
Suponhamos que ao sistema discreto linear e invariante com resposta impulsional

$$h(n) = \delta(n) + 0.75\delta(n-1) + 0.5\delta(n-2) + 0.25\delta(n-3)$$



é aplicada a entrada

$$x(n) = u(n) - u(n-4) ,$$

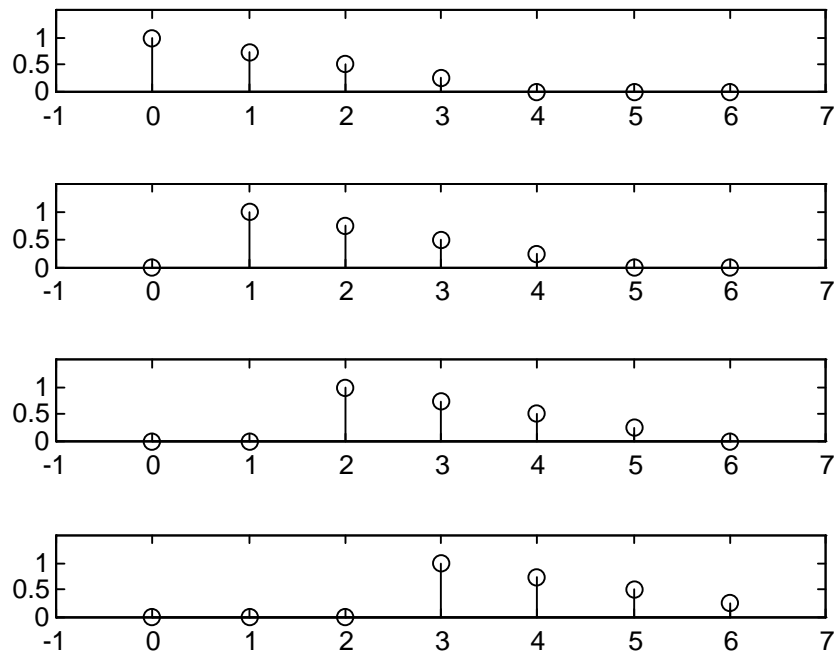


e determinemos a resposta $y(n)$ do sistema.

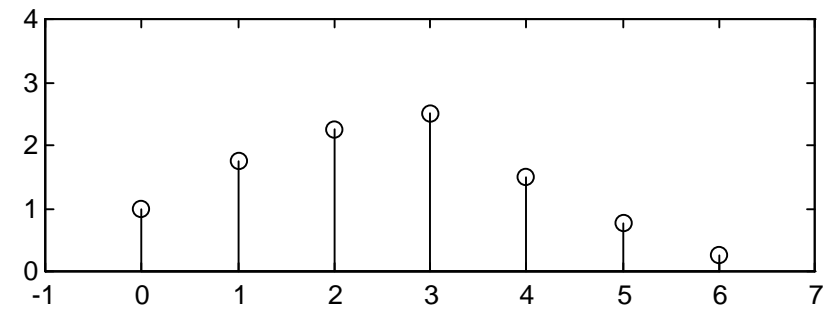
A resposta $y(n)$ é dada pela convolução discreta de $x(n)$ com $h(n)$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(n-k) .$$

Interpretando graficamente a primeira destas expressões como exprimindo que a resposta $y(n)$ pode ser obtida somando os sinais discretos (os restantes serão nulos) $x(0)h(n-0)$, $x(1)h(n-1)$, $x(2)h(n-2)$ e $x(3)h(n-3)$



obtem-se o resultado



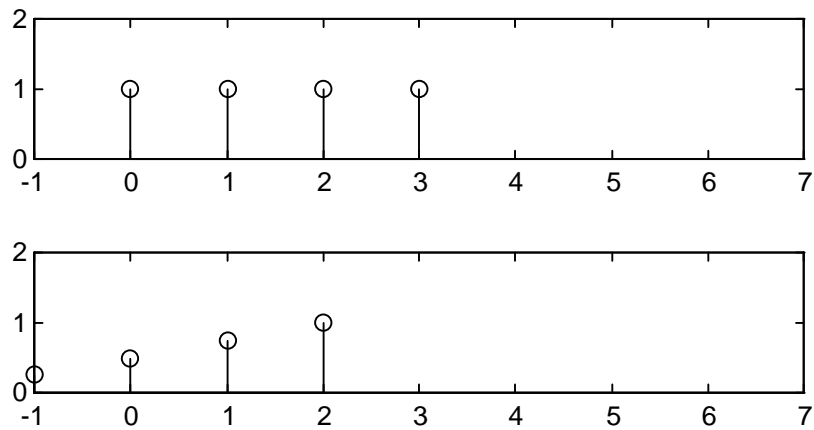
isto é,

$$y(n) = x(0)h(n) + x(1)h(n-1) + x(2)h(n-2) + x(3)h(n-3)$$

$$y(n) = \delta(n) + 1.75\delta(n-1) + 2.25\delta(n-2) + 2.5\delta(n-3) + 1.5\delta(n-4) + 0.75\delta(n-5) + 0.25\delta(n-6) .$$

A mesma expressão pode também ser interpretada como exprimindo que cada elemento $y(n)$ da resposta se pode obter multiplicando termo a termo os sinais dois discretos $x(k)$ e $h(n-k)$ e realizando a soma desses produtos.

Exemplificando, para calcular $y(2)$, será $n = 2$, como $x(k)$ e $h(2-k)$ são



$$y(2) = x(0)h(2) + x(1)h(1) + x(2)h(0) = 0.5 + 0.75 + 1 = 2.25 .$$

Para obter os outros elementos de $y(n)$ seria necessário deslocar $h(n-k)$ relativamente a $x(k)$, e repetir este cálculo, numa interpretação geométrica bem conhecida.

De acordo com a propriedade comutativa da convolução, idênticas interpretações resultariam se os papéis de $x(n)$ e de $h(n)$ se invertessem.

2.3 Sistemas Discretos FIR e IIR

Os sistemas discretos podem ser classificados em

tipo FIR - com resposta impulsional finita,

tipo IIR - com resposta impulsional infinita,

conforme a sua resposta impulsional $h(n)$ tem ou não um número finito de elementos não nulos.

Os sistemas discretos do tipo FIR gozam da propriedade de poderem ser implementados directamente a partir da sua resposta impulsional, uma vez que a soma

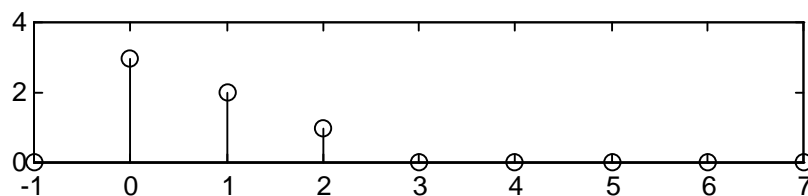
$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(n-k)$$

tem nesse caso um número finito de termos.

Exemplo

O sistema com resposta impulsional finita

$$h(n) = (3-n)(u(n) - u(n-3))$$



pode ser implementado pela equação às diferenças

$$y(n) = 3x(n) + 2x(n-1) + x(n-2) .$$

Os coeficientes da equação às diferenças são os termos da resposta impulsional do sistema.

2.4 Sistemas Discretos Recursivos e Não Recursivos

O sistema discreto

$$y(n) = 3x(n) + 2x(n-1) + x(n-2)$$

é do tipo não recursivo, uma vez a resposta $y(n)$ do sistema se pode calcular exclusivamente a partir da sua entrada $x(n)$.

Um sistema discreto do tipo FIR pode sempre ser implementado não recursivamente, como é óbvio.

O sistema discreto

$$y(n) = x(n) + 0.5y(n-1)$$

é do tipo recursivo, uma vez que a sua resposta $y(n)$ depende de respostas anteriores.

A resposta impulsional de um sistema do tipo recursivo é normalmente de comprimento infinito.

Supondo que o sistema anterior se encontra inicialmente relaxado, isto é, que $y(-1) = 0$, obtem-se facilmente

$$y(n) = 0.5^n u(n),$$

o que quer dizer que o sistema é do tipo IIR.

Quando utilizadas para realizar a mesma especificação, as soluções não recursivas são normalmente mais complexas do ponto de vista aritmético, porque no cálculo de cada elemento da sua resposta não se utiliza o trabalho já realizado para o cálculo de outros elementos dessa resposta.

Num sistema do tipo não recursivo, é, por outro lado, possível calcular isoladamente um qualquer termo da sua resposta a uma determinada entrada, o que pode ser vantajoso em determinadas situações.

2.5 Operação em Tempo Real e Operação em Tempo Diferido

Um sistema opera em tempo real quando recebe os elementos do sinal de entrada à medida que vão sendo produzidos e calcula os elementos do sinal de saída a esse ritmo.

Na equação às diferenças que rege o funcionamento de um sistema em tempo real não podem figurar nem elementos ainda não recebidos do sinal de entrada nem elementos ainda não calculados do sinal de saída.

Em muitas situações, os sistemas operam em tempo diferido, com sinais de entrada previamente armazenados.

2.6 Sistemas Discretos Causais

Um sistema que opere em tempo real é necessariamente causal, uma vez que não é de admitir neste caso um comportamento antecipatório relativamente ao sinal de entrada.

De um modo geral, pode dizer-se que um sistema é causal se, e só se, para quaisquer duas entradas $x_1(n)$ e $x_2(n)$ tais que

$$x_1(n) = x_2(n), n < n_0$$

as respectivas respostas $y_1(n)$ e $y_2(n)$ forem tais que

$$y_1(n) = y_2(n), n < n_0.$$

Em termos da sua resposta impulsional $h(n)$, pode demonstrar-se que a condição necessária e suficiente de causalidade é

$$h(n) = 0, n < 0.$$

2.7 Sistemas Discretos Estáveis

Em termos gerais, num sistema estável a uma entrada limitada corresponde sempre uma saída limitada.

Os efeitos de uma situação de instabilidade num sistema discreto e num sistema contínuo são contudo de natureza diferente.

Naqueles, a instabilidade poderá eventualmente provocar uma situação de *overflow*, mas mesmo este pode muitas vezes ser "evitado" mediante uma representação adequada dos sinais.

Em termos da sua resposta impulsional $h(n)$, pode demonstrar-se que a condição necessária e suficiente de estabilidade é

$$S = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h(k)| < \infty .$$

A condição é suficiente: na realidade, se esta condição se verificar e se

$$|x(n)| < M$$

então

$$|y(n)| = \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(n-k) \right| \leq M \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) \right| < \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h(k)| < \infty .$$

E a condição é necessária: à entrada

$$x(n) = \begin{cases} \frac{h^*(-n)}{|h(-n)|} & \text{se } h(n) \neq 0 \\ 0 & \text{se } h(n) = 0 \end{cases}$$

corresponde a saída para $n = 0$

$$y(0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(-k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) \frac{h^*(k)}{|h(k)|} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{|h(k)|^2}{|h(k)|} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h(k)| = S ,$$

que é ilimitada se $S = \infty$.

2.8 Frequência de um Sinal Discreto

A importância do estudo do comportamento dos sistemas LI no domínio das frequências é conhecida.

No caso dos sistemas discretos, o conceito de frequência difere ligeiramente daquele a que estamos mais habituados, pelo que o vamos analisar com algum detalhe.

Um sinal contínuo sinusoidal com frequência f Hz, ou frequência angular Ω radianos por segundo (reservamos o símbolo ω para frequência angular de um sinal discreto), tem a expressão geral

$$x_c(t) = \sin(2\pi ft + \phi) = \sin(\Omega t + \phi) , \quad \Omega = 2\pi f ,$$

em que ϕ é a fase da sinusóide, e corresponde a uma simples translação.

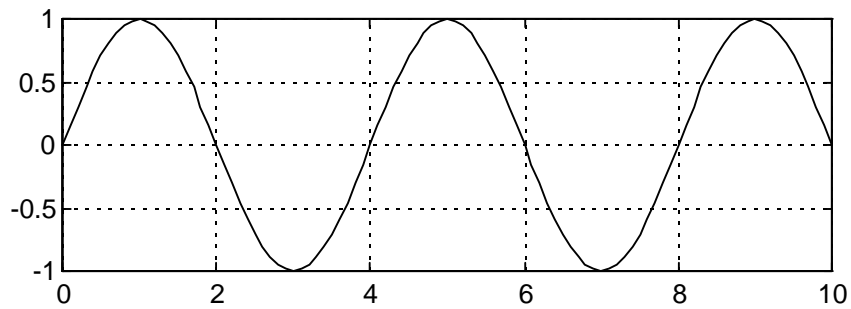
O inverso da frequência é o período

$$T = 1/f .$$

Por exemplo, o sinal contínuo sinusoidal com frequência angular $\pi/2$ radianos por segundo

$$x_c(t) = \sin(\pi t/2) ,$$

tem um período T igual a 4 s e uma representação gráfica perfeitamente clara



Um sinal discreto sinusoidal com frequência angular ω radianos tem a expressão geral

$$x(n) = \sin(\omega n + \phi) .$$

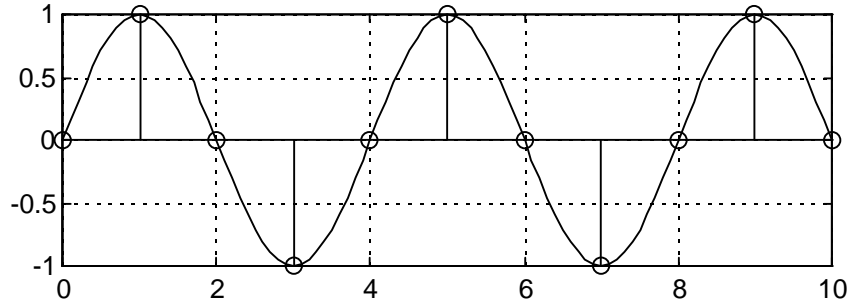
A relação entre o sinal discreto e o sinal contínuo reside no facto de o sinal discreto sinusoidal com frequência angular ω se poder obter por amostragem unitária (período 1 s) do sinal contínuo com essa frequência.

Há, no entanto, uma diferença fundamental, que resulta de não existir a noção de tempo associada ao sinal discreto sinusoidal, e evidenciada pelo facto de Ω se medir em radianos por segundo e ω se medir em radianos. Enquanto que a frequência angular Ω do sinal contínuo sinusoidal é o ângulo que a sinusóide avança por unidade de tempo, a frequência angular ω do sinal discreto sinusoidal é o ângulo que a sinusóide avança entre dois termos consecutivos do sinal.

O sinal discreto sinusoidal com frequência angular $\pi/2$ radianos será

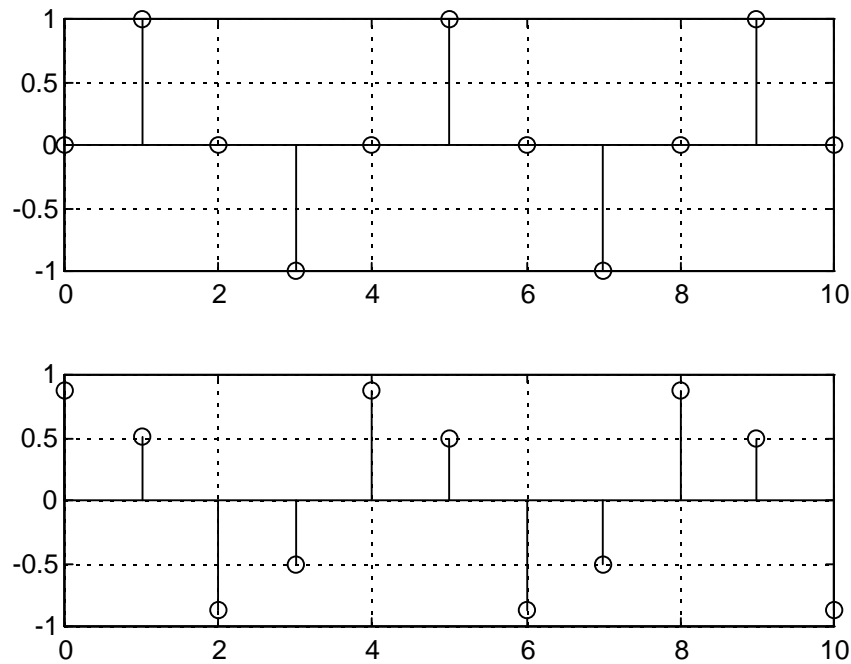
$$x(n) = \sin(0.5\pi n) = \dots, 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \dots ,$$

e pode obter-se por amostragem unitária do sinal contínuo com essa frequência representado anteriormente.

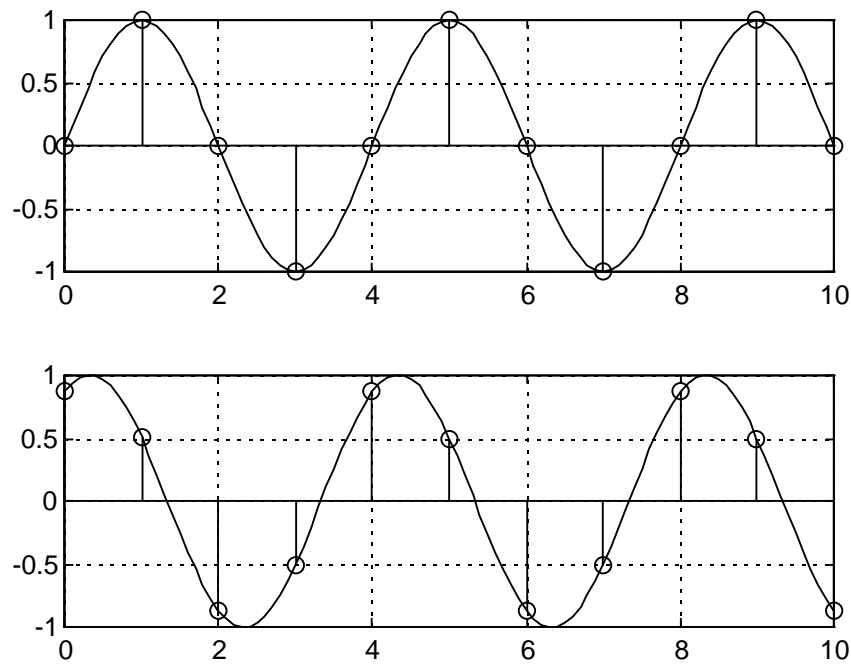


2.8.1 Fase

A noção de fase de um sinal discreto não é óbvia, como se pode concluir comparando dois sinais discretos sinusoidais com a mesma frequência e fases diferentes.



A fase corresponde, na realidade, a uma translação da sinusóide contínua associada ao sinal discreto sinusoidal, que não se pode confundir com uma translação do sinal discreto propriamente dito.



2.8.2 Gamas de frequências

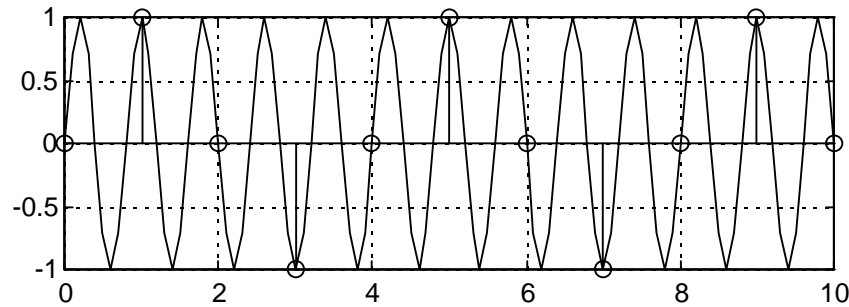
Uma vez que as funções sinusoidais são periódicas, com período 2π ,

$$\sin(\omega n + \phi) = \sin((\omega + 2k\pi)n + \phi), \text{ k inteiro,}$$

e haverá uma infinidade de sinais discretos sinusoidais, com frequências diferindo de um múltiplo de 2π , que são na realidade o mesmo sinal discreto, como a figura a seguir, em que se representa o sinal discreto sinusoidal

$$x(n) = \sin(2.5\pi n),$$

ilustra.



Este sinal discreto sinusoidal $\dots, 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \dots$ pode ser obtido por amostragem unitária de uma infinidade de sinais sinusoidais contínuos.

De facto, no intervalo $[-\pi, \pi]$, ou no intervalo $[0, 2\pi]$, por exemplo, podem encontrar-se todas as frequências digitais distintas!

Esta ambiguidade da amostragem será estudada no capítulo 3. Por agora, pense-se apenas no seguinte.

Numa imagem muito utilizada, pode gerar-se um sinal sinusoidal contínuo com frequência angular ω imaginando a projecção de um ponto sobre uma circunferência rodando a ω radianos por segundo sobre um eixo que passe pelo seu centro.

Se um observador só puder observar a circunferência, ou medir o sinal, em instantes discretos $n\Delta t$, e detectar que entre dois desses instantes a sua posição variou de ω , não tem meios para saber se realmente a circunferência rodou de ω ou de $\omega + 2k\pi$, k inteiro.

2.9 Resposta em Frequência de um Sistema Discreto

À semelhança do que acontece com os sistemas contínuos, a resposta em frequência de um sistema discreto com resposta impulsional $h(n)$ pode obter-se aplicando à sua entrada o sinal discreto exponencial complexo

$$x(n) = e^{j\omega n},$$

sinal a partir do qual se podem definir todos os sinais discretos sinusoidais com frequência ω .

Recordam-se aqui algumas relações importantes

$$\cos(\omega n) = \frac{e^{j\omega n} + e^{-j\omega n}}{2}$$

$$\sin(\omega n) = \frac{e^{j\omega n} - e^{-j\omega n}}{2j}$$

$$\sin(\omega n + \phi) = \sin(\phi) \cos(\omega n) + \cos(\phi) \sin(\omega n).$$

Como vimos anteriormente, a resposta de um sistema discreto com resposta impulsional $h(n)$ ao sinal discreto exponencial complexo é a convolução discreta destes dois sinais, e vale

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) e^{j\omega(n-k)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) e^{-j\omega k} e^{j\omega n} = H(e^{j\omega}) e^{j\omega n}$$

com

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) e^{-j\omega k}.$$

A resposta do sistema é a sua entrada multiplicada por $H(e^{j\omega})$, e esta função de ω é a resposta em frequência do sistema discreto.

$H(e^{j\omega})$ é uma função periódica de ω , com período 2π

$$H(e^{j(\omega+2\pi)}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) e^{-j(\omega+2\pi)k} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) e^{-j\omega k} e^{-j2k\pi} = H(e^{j\omega}).$$

Esta propriedade está obviamente relacionada com a ambiguidade na representação de uma sinusóide através de uma sua amostragem, que atrás vimos. Pode-se dizer que, como um sistema discreto não "distingue" aquelas diferentes frequências, apresenta o mesmo comportamento a todas elas.

Exemplo

Vamos determinar a resposta em frequência do sistema discreto

$$y(n) = \frac{x(n) + 2x(n-1) + x(n-2)}{4}.$$

Como é evidente, o sistema discreto dado tem resposta impulsional

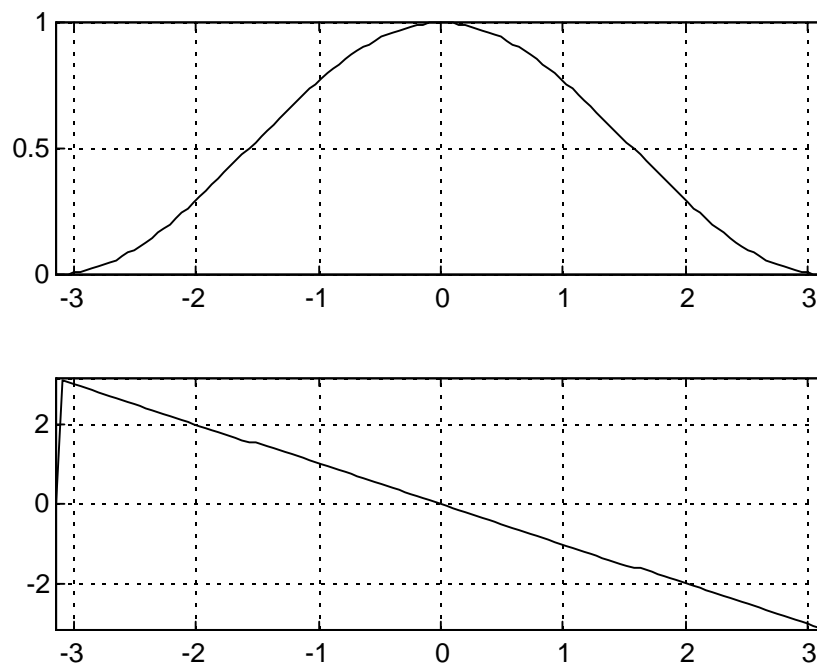
$$h(n) = 0.25\delta(n) + 0.5\delta(n-1) + 0.25\delta(n-2)$$

e portanto resposta em frequência

$$H(e^{j\omega}) = 0.25 + 0.5e^{-j\omega} + 0.25e^{-2j\omega} = (0.5 + 0.5\cos(\omega))e^{-j\omega}.$$

Na figura a seguir, representa-se $H(e^{j\omega})$ em módulo e fase. Os gráficos foram obtidos em MATLAB, utilizando o seguinte programa (fft quer dizer Fast Fourier Transform)

```
h=fft([0.25 0.5 0.25],128);
w=-pi:pi/64:pi-pi/64;
h=fftshift(h);
a=[-pi,pi,0,1];
f=[-pi,pi,-pi,pi];
clf, subplot(2,1,1), plot(w,abs(h)), axis(a), grid on
subplot(2,1,2), plot(w,angle(h)), axis(f), grid on
```



A resposta impulsional de um sistema discreto pode ser obtida a partir sua resposta em frequência, tirando partido da periodicidade desta função. Como

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) e^{-j\omega k}$$

é uma função periódica de ω , com período 2π , então, $H(e^{j\omega})$ pode ser desenvolvida em série de Fourier, por exemplo na forma

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{-j\omega k} ,$$

em que os coeficientes C_k são dados por

$$C_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega k} d\omega ,$$

e é óbvio, por comparação das expressões anteriores, que

$$h(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega k} d\omega .$$

2.10 Transformada de Fourier de um Sinal Discreto

A relação biunívoca entre $h(n)$ e $H(e^{j\omega})$ é a transformada de Fourier, como seria de esperar.

Um sinal discreto $x(n)$ terá transformada de Fourier desde que a soma

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$

exista, sendo a transformada de Fourier inversa dada por

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega .$$

Exemplo

Pretende-se determinar a resposta impulsional $h(n)$ do filtro digital passa baixo ideal, com frequência de corte ω_c . A resposta em frequência $H(e^{j\omega})$ deste sistema é naturalmente periódica, de período 2π , e tem a seguinte forma no intervalo $[-\pi, \pi[$

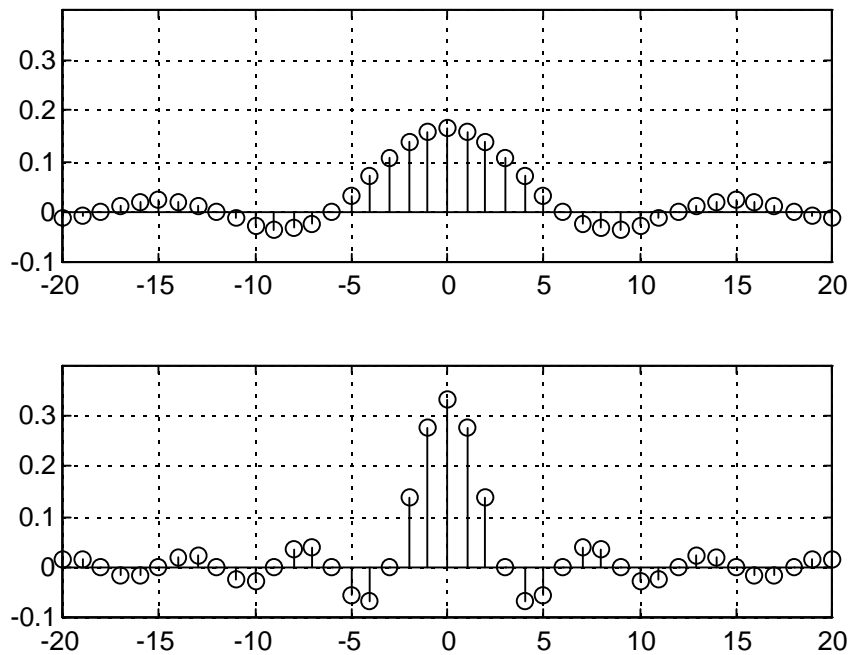
$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & \text{se } |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & \text{se não,} \end{cases}$$

Utilizando a transformada de Fourier inversa, obtem-se

$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n} d\omega = \frac{\omega_c}{\pi} \text{sinc}(\omega_c n) ,$$

que é uma amostragem da função seno cardinal.

Representa a seguir $h(n)$ para $\omega_c = \pi/6$ e e para $\omega_c = \pi/3$, respectivamente.

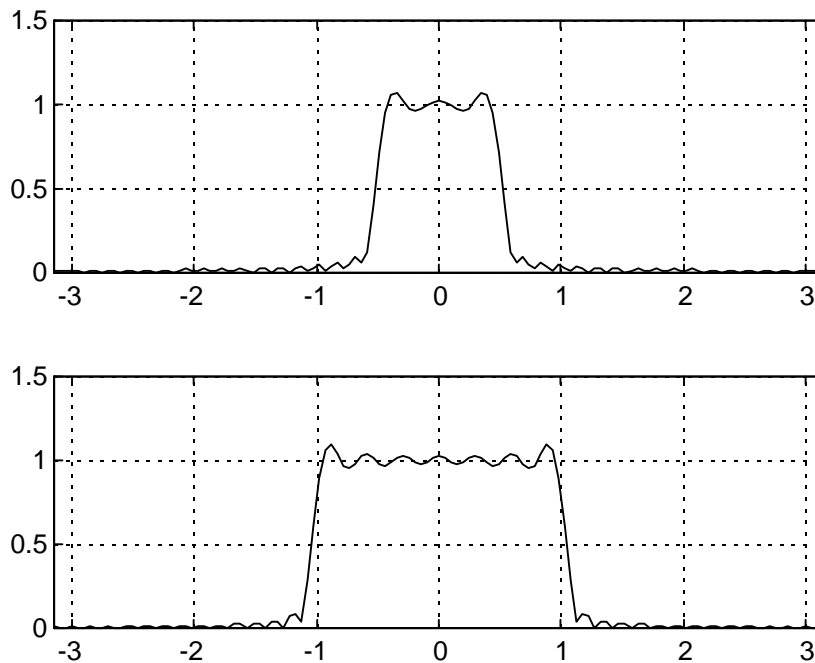


Os sistemas obtidos são do tipo IIR, pelo que não podem ser realizados directamente a partir da sua resposta impulsional (nem por qualquer outro processo - são sistemas ideais).

Na prática, pode-se contudo realizar aproximações, por exemplo do tipo

$$h_a(n) = h(n)(u(n+n_0) - u(n-n_0-1)) ,$$

que serão, em princípio, tanto melhores quanto maior for n_0 . Representam-se a seguir as respostas em frequência correspondentes aos dois valores de ω_c atrás indicados, para $n_0 = 20$.



O programa utilizado para obter estas representações em MATLAB foi (note-se que, em MATLAB,

$$\sin c(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

```
n=-20:1:20;
```

```

h6=sinc(n/6)/6;
h3=sinc(n/3)/3;
a=[-20,20,-0.1,0.4];
clf, subplot(2,1,1), stem(n,h6), axis(a), grid on
subplot(2,1,2), stem(n,h3), axis(a), grid on
pause
w=-pi:pi/64:pi-pi/64;
x6=fftshift(fft(h6,128));
x3=fftshift(fft(h3,128));
a=[-pi,pi,0,1.5];
subplot(2,1,1), plot(w,abs(x6)), axis(a), grid on
subplot(2,1,2), plot(w,abs(x3)), axis(a), grid on

```

Note-se que estes sistemas não são causais, pelo que, em tempo real, seria ainda necessário deslocar $h_a(n)$ de n_0 , introduzindo-se assim um atraso n_0 no cálculo da resposta do sistema.

2.11 Propriedades da Transformada de Fourier

A transformada de Fourier é uma transformada linear, tendo as propriedades daí decorrentes: a transformada de Fourier da soma de dois sinais discretos é a soma das suas transformadas de Fourier, e a transformada de Fourier de um sinal discreto multiplicado por uma constante é a sua transformada de Fourier multiplicada por essa constante.

2.11.1 Propriedade da Translação

Consideremos um sinal discreto $x(n)$ e a sua transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$.

A transformada de Fourier do sinal discreto $x(n-k)$ é

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n-k) e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j\omega(n+k)} = e^{-j\omega k} X(e^{j\omega}).$$

Uma vez que

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{j\alpha n} x(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j(\omega-\alpha)n} = X(e^{j(\omega-\alpha)}),$$

o sinal discreto cuja transformada de Fourier é $X(e^{j(\omega-\alpha)})$ é $e^{j\alpha n} x(n)$.

2.11.2 Propriedade da Convolução

A expressão da transformada de Fourier inversa

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

mostra-nos como um sinal discreto $x(n)$ pode ser decomposto numa combinação linear (integral) de sinais discretos elementares, as exponenciais complexas $e^{j\omega n}$.

Se este sinal for aplicado à entrada de um sistema discreto com resposta em frequência $H(e^{j\omega})$, como a resposta do sistema a cada uma daquelas exponenciais é $H(e^{j\omega})e^{j\omega n}$, a sua resposta à entrada $x(n)$ contém a mesma combinação linear e é

$$y(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega ,$$

cuja transformada de Fourier é $X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$.

A transformada de Fourier da convolução de dois sinais discretos é assim o produto das suas transformadas de Fourier.

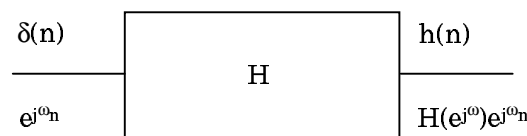
É altura de colocar em paralelo duas expressões já conhecidas, que nos ensinam a decompor um sinal discreto em sinais discretos elementares, a primeira no domínio dos tempos, em que o sinal elementar é o impulso unitário

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\delta(n - k)$$

e a segunda no domínio das frequências, em que o sinal elementar é a sinusóide complexa

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega .$$

A resposta de um sistema discreto LI a um destes sinais elementares, a resposta impulsional $h(n)$ ou a resposta em frequência $H(e^{j\omega})$, caracteriza completamente um sistema H.



A transformada de Fourier estabelece a ligação entre estas duas caracterizações.

2.11.3 Propriedades de Simetria

Se a transformada de Fourier de um sinal discreto $x(n)$ é $X(e^{j\omega})$, a transformada de Fourier do sinal discreto conjugado $x^*(n)$ é

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^*(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (x(n)e^{j\omega n})^* = X^*(e^{-j\omega}) .$$

Daqui se deduzem algumas propriedades de simetria importantes.

Se um sinal discreto $x(n)$ for puramente real,

$$x^*(n) = x(n) ,$$

a sua transformada de Fourier verifica a igualdade

$$X^*(e^{-j\omega}) = X(e^{j\omega}) ,$$

pelo que a transformada de Fourier de um sinal discreto puramente real tem parte real par e parte imaginária ímpar, isto é,

$$X_R(e^{-j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) ,$$

$$X_I(e^{-j\omega}) = -X_I(e^{j\omega}) .$$

Se um sinal discreto $x(n)$ for puramente imaginário,

$$x^*(n) = -x(n) ,$$

e a sua transformada de Fourier verifica a igualdade

$$X^*(e^{-j\omega}) = -X(e^{j\omega}) ,$$

pelo que a transformada de Fourier de um sinal discreto imaginário puro tem parte real ímpar e parte imaginária par.

Se a transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$ de um sinal discreto for puramente real,

$$X^*(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}),$$

e o sinal discreto $x(n)$ verifica a igualdade

$$x^*(-n) = x(n),$$

pelo que um sinal discreto com transformada de Fourier puramente real tem parte real par e parte imaginária ímpar.

Se a transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$ de um sinal discreto for puramente imaginária,

$$X^*(e^{j\omega}) = -X(e^{j\omega}),$$

e o sinal discreto $x(n)$ verifica a igualdade

$$x^*(-n) = -x(n),$$

pelo que um sinal discreto com transformada de Fourier puramente imaginária tem parte real ímpar e parte imaginária par.

Um sinal discreto $x(n)$ real e par tem transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$ real e par.

As correspondências

sinal	transformada de Fourier
puramente real	parte real par, parte imaginária ímpar
puramente imaginário	parte real ímpar, parte imaginária par
parte real par, parte imaginária ímpar	puramente real
parte real ímpar, parte imaginária par	puramente imaginária

podem ser condensadas a partir das noções de parte simétrica conjugada e parte anti-simétrica conjugada de um sinal discreto $x(n)$ ou da sua transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$,

$$x_e(n) = \frac{x(n) + x^*(-n)}{2},$$

$$x_o(n) = \frac{x(n) - x^*(-n)}{2},$$

$$X_e(e^{j\omega}) = \frac{X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega})}{2},$$

$$X_o(e^{j\omega}) = \frac{X(e^{j\omega}) - X^*(e^{-j\omega})}{2},$$

respectivamente.

Estas definições permitem identificar as correspondências

sinal / transformada de Fourier	transformada de Fourier / sinal
parte real	parte simétrica conjugada
parte imaginária	parte anti-simétrica conjugada

entre o sinal e a sua transformada e reciprocamente.

2.12 Equação às Diferenças e Resposta em Frequência

Um sistema discreto LI rege-se por uma equação às diferenças

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k x(n-k) + \sum_{k=1}^{N-1} b_k y(n-k) ,$$

com os coeficientes b_k nulos se o sistema for não recursivo.

Esta equação, tal como uma equação diferencial, admite uma solução constituída por dois termos, um correspondente à resposta natural do sistema e outro correspondente à sua resposta forçada, e dependente das condições iniciais, que serão nulas se o sistema for causal.

A resposta natural do sistema tende normalmente para zero num sistema estável.

Não cabe nesta disciplina o estudo das equações às diferenças, contudo. A transformada em z , que estudaremos no capítulo seguinte, é normalmente utilizada nesse estudo.

Calculando a transformada de Fourier dos dois membros da equação anterior

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{-j\omega k} X(e^{j\omega}) + \sum_{k=1}^{N-1} b_k e^{-j\omega k} Y(e^{j\omega}) .$$

pelo que a resposta em frequência do sistema é dada por

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{-j\omega k}}{1 - \sum_{k=1}^{N-1} b_k e^{-j\omega k}} .$$

Exemplo

Vamos determinar a equação às diferenças que rege o sistema discreto com resposta impulsional

$$h(n) = 0.3(0.7)^n u(n) .$$

A resposta em frequência do sistema discreto é

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(n) e^{-j\omega n} = 0.3 \sum_{n=0}^{+\infty} 0.7^n e^{-j\omega n} = \frac{0.3}{1 - 0.7e^{-j\omega}}$$

e a equação às diferenças respectiva é

$$y(n) = 0.3x(n) + 0.7y(n-1) .$$

3. Amostragem de Sinais Contínuos

3.1 Introdução

Em muitas situações, os sinais discretos resultam da amostragem de sinais contínuos.

No caso da amostragem ser periódica, tem-se

$$x(n) = x_c(nT),$$

em que $x(n)$ é o sinal discreto, $x_c(t)$ é o sinal contínuo, e T é o período de amostragem.

A frequência angular de amostragem é

$$\Omega_a = 2\pi/T.$$

Entre as transformadas de Fourier $X_c(j\Omega)$, do sinal contínuo, e $X(e^{j\omega})$, do sinal discreto, existe necessariamente uma relação, que vamos estabelecer.

Consideremos, por um lado, a transformada de Fourier inversa do sinal contínuo $x_c(t)$

$$x_c(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_c(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega,$$

donde

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_c(j\Omega) e^{j\Omega nT} d\Omega,$$

e, por outro lado, a transformada de Fourier inversa do sinal discreto $x(n)$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega.$$

Realizando na primeira das duas últimas expressões a mudança de variável

$$\Omega T \Rightarrow \omega,$$

obtem-se

$$x(n) = \frac{1}{2\pi T} \int_{-\infty}^{\infty} X_c\left(\frac{j\omega}{T}\right) e^{j\omega n} d\omega,$$

que se pode escrever, subdividindo o domínio de integração em intervalos de comprimento 2π ,

$$x(n) = \frac{1}{2\pi T} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \int_{(2r-1)\pi}^{(2r+1)\pi} X_c\left(\frac{j\omega}{T}\right) e^{j\omega n} d\omega,$$

e, reduzindo todos os integrais ao mesmo domínio de integração $[-\pi, \pi]$,

$$x(n) = \frac{1}{2\pi T} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} X_c\left(\frac{j(\omega + 2r\pi)}{T}\right) e^{j(\omega + 2r\pi)n} d\omega ,$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi T} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} X_c\left(\frac{j(\omega + 2r\pi)}{T}\right) e^{j\omega n} d\omega ,$$

donde, por simples comparação com a segunda daquelas expressões,

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} X_c\left(\frac{j(\omega + 2r\pi)}{T}\right) .$$

A transformada de Fourier do sinal discreto $x(n)$ é uma soma de uma infinidade de parcelas, cada uma das quais resultante, a menos do factor $1/T$, da transformada de Fourier do sinal contínuo $x_c(t)$ através da mudança de variável linear

$$\Omega \Rightarrow \frac{\omega + 2r\pi}{T} .$$

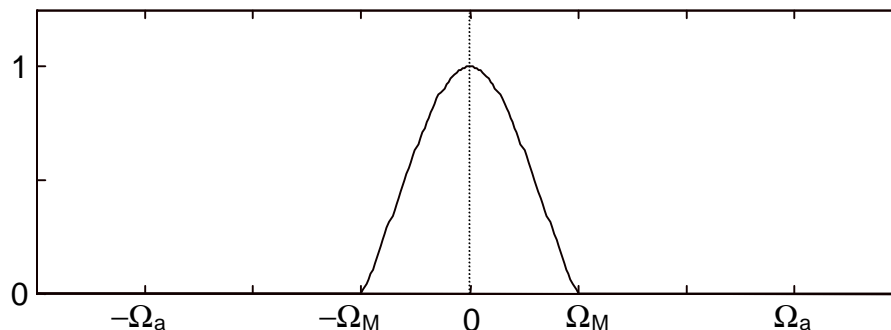
A frequência angular Ω mede-se em radianos por segundo, e a frequência angular digital ω mede-se em radianos.

A parcela correspondente a $r = 0$,

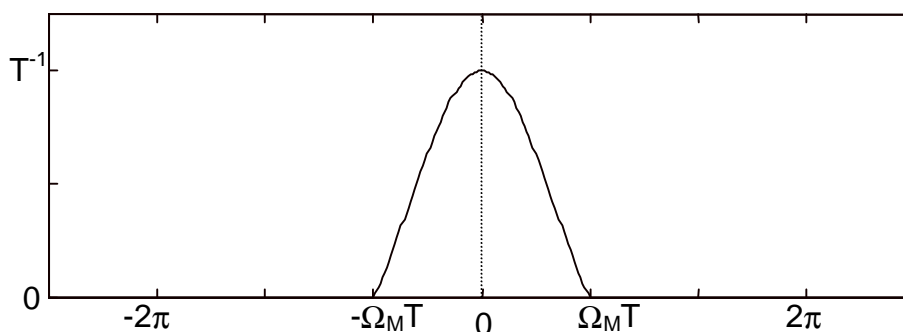
$$\frac{1}{T} X_c\left(\frac{j\omega}{T}\right) ,$$

registra, em termos da amplitude, uma alteração de escala resultante da multiplicação por $1/T$ e, em termos da variável independente, uma alteração de escala resultante da mudança de variável $\Omega \Rightarrow \omega/T$.

Se a transformada de Fourier $X_c(j\Omega)$ do sinal analógico for, por exemplo,



em que Ω_a é a frequência angular de amostragem, então a parcela de $X(e^{j\omega})$ correspondente a $r = 0$ é

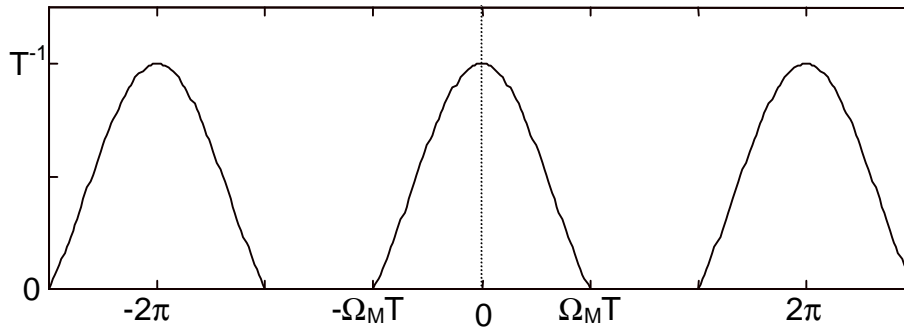


À frequência angular de amostragem $\Omega_a = 2\pi/T$ "corresponde" a frequência "digital" 2π . A frequência de amostragem estabelece a relação entre as frequências "analógica" e "digital".

Cada uma das restantes parcelas,

$$\frac{1}{T} X_c\left(\frac{j(\omega + 2r\pi)}{T}\right),$$

é uma translacção de um múltiplo de 2π da parcela correspondente a $r = 0$



Exemplo

O sinal contínuo

$$x_c(t) = e^{-t}u(t)$$

tem transformada de Fourier

$$X_c(j\Omega) = \frac{1}{1 + j\Omega}.$$

O sinal discreto que se obtém de $x_c(t)$ através de uma amostragem à frequência angular

$$\Omega_a = 40 \text{ radianos/s}, T = 0.05\pi \text{ s}$$

$$x(n) = x_c(0.05\pi n),$$

tem transformada de Fourier

$$X(e^{j\omega}) = \frac{20}{\pi} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + j20\pi^{-1}\omega + j40r}.$$

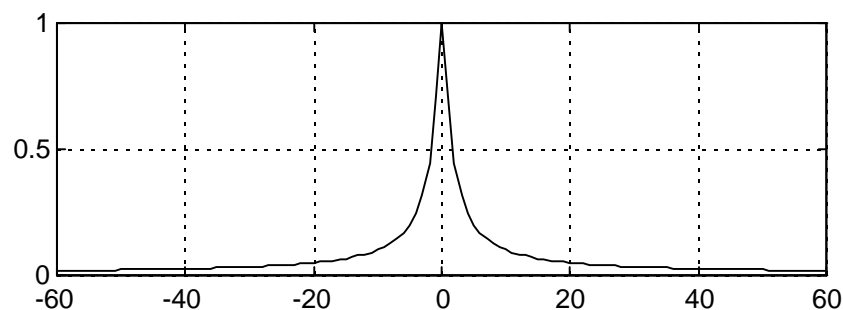
Graficamente, $|X_c(j\Omega)|$ pode obter-se com o seguinte programa em MATLAB

```
w=-60:1:60;
```

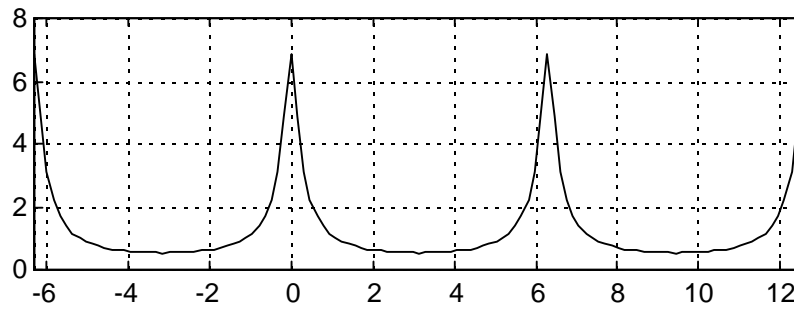
```
h=1./(1+j.*w);
```

```
clf, subplot(2,1,1), plot(w,abs(h)), axis([-60,60,0,1]), grid on
```

(note-se como é simples tratar números complexos em MATLAB) e é



enquanto que em $|X(e^{j\omega})|$, que a seguir também se representa, são visíveis as mudanças de escala e a sobreposição das diferentes parcelas presentes.



De notar que poderíamos facilmente obter uma expressão compacta para $X(e^{j\omega})$, pois, como

$$x(n) = e^{-0.05\pi n} u(n),$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - e^{-0.05\pi} e^{-j\omega}},$$

e desenhar o último gráfico a partir desta expressão.

3.1 Teorema da Amostragem

A sobreposição das diferentes parcelas de $X(e^{j\omega})$ é inconveniente do ponto de vista da representação de um sinal contínuo por uma sua amostragem, uma vez que da transformada de Fourier do sinal discreto não é possível recuperar novamente a transformada de Fourier do sinal contínuo.

A recuperação apenas será possível se as diferentes parcelas de

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} X_c\left(\frac{j(\omega + 2r\pi)}{T}\right)$$

não se sobrepuserem, isto é, se ocuparem regiões diferentes de ω .

Uma condição a que $X_c(j\Omega)$ tem de obedecer é ocupar uma região limitada de Ω , isto é, $x_c(t)$ tem de ser um sinal com espectro (transformada de Fourier) de banda limitada.

Outra condição é a frequência angular de amostragem $2\pi/T$ ser tal que as contribuições das diferentes parcelas de $X(e^{j\omega})$ não se sobreponham, isto é,

$$2\pi/T > 2\Omega_M,$$

em que Ω_M é a frequência limite superior de banda do sinal, em radianos por segundo.

Um sinal contínuo com espectro de banda limitada ao intervalo $[-\Omega_M, \Omega_M]$ deve ser amostrado a uma frequência angular igual ou superior a $2\Omega_M$, para ser possível a sua reconstrução exacta a partir do sinal discreto resultante.

3.2 Aliasing

O fenómeno do *aliasing* ocorre quando não se verificam as condições do teorema da amostragem, e resulta da sobreposição das diferentes parcelas de $X(e^{j\omega})$.

Quando $\Omega_M > \pi/T$, tudo se passa como se as partes do espectro de $X_c(j\Omega)$ exteriores ao intervalo $[-\pi/T, \pi/T]$ se fossem dobrando sucessivamente em torno destas frequências.

3.2.1 Uma explicação simples

Quando estamos a olhar para as imagens na TV de uma corrida de Fórmula 1, por exemplo, apercebemo-nos por vezes que as rodas dos carros parecem ter movimentos estranhos, parecendo mesmo que se imobilizam, ou que giram em sentido contrário ao esperado. Este fenómeno é um efeito típico do *aliasing*.

Na TV, a realidade é amostrada cinquenta vezes por segundo, e é a reprodução dessa sequência de imagens que chega a nossas casas.

Se duas imagens consecutivas de uma roda de um carro em movimento estiveram na situação que a figura representa, nós automaticamente as interpretamos (*aliasing*) como se entre as duas imagens a roda tivesse girado 45° no sentido retrógrado.



No entanto, nada nos garante que tal tenha acontecido. Pode ter girado qualquer número inteiro de voltas mais 45°, no sentido retrógrado, ou pode ter girado qualquer número inteiro de voltas mais 315°, no sentido directo, ou pode ter realizado os movimentos mais extravagantes. Não é possível saber!

A amostragem é, por natureza, uma operação que conduz à perda irremediável de quase a totalidade da informação contida no sinal amostrado.

Agora, se se souber, por exemplo, que a cadência de imagens é tal que entre duas imagens consecutivas a roda gira, no máximo, 180°, então, já é possível ter alguma certeza sobre o que se está a passar.

Se a roda girar a f voltas/s, realiza meia volta em $1/2f$ s, e a cadência mínima de imagens que permite recuperar o movimento é $2f$ imagens/s, o dobro da velocidade a que a roda gira.

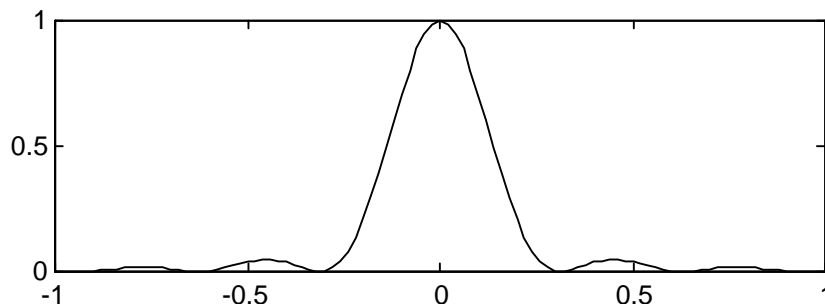
O teorema da amostragem, ou de Nyquist, diz exactamente isto!

Exemplo

O sinal contínuo

$$x_c(t) = \text{sinc}^2(10t)$$

a seguir representado



tem transformada de Fourier $X_c(j\Omega)$ de banda limitada a $-20 < \Omega < 20$ radianos por segundo.

Na realidade, a transformada de Fourier de $\text{sinc}(10t)$ é um pedestal entre -10 e 10 radianos por segundo, como se pode confirmar calculando a transformada de Fourier inversa de um pedestal no domínio das frequências

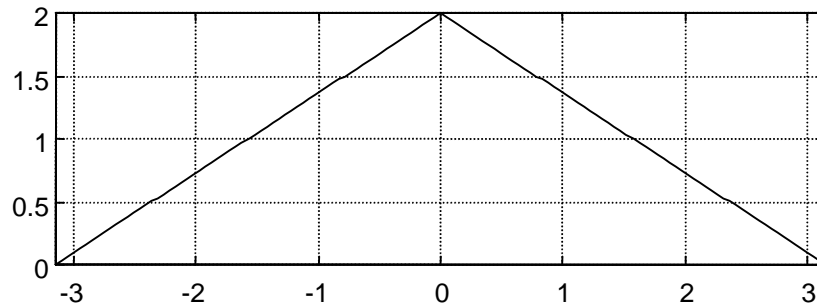
$$X(j\Omega) = \begin{cases} 1, & \text{se } |\Omega| \leq \Omega_M \\ 0, & \text{se não,} \end{cases}$$

que é

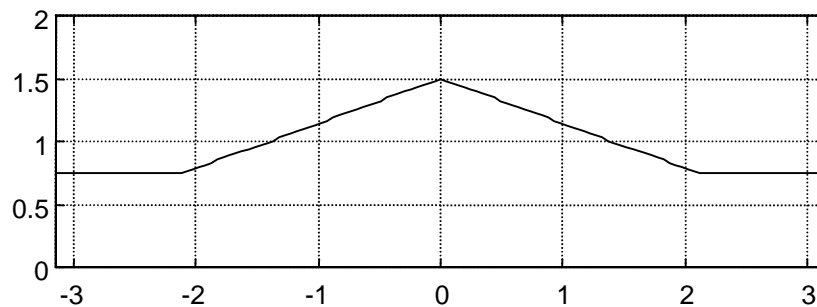
$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_c}^{\Omega_c} e^{j\Omega t} d\Omega = \frac{\Omega_c}{\pi} \text{sinc}(\Omega_c t).$$

Atendendo a que ao produto de dois sinais corresponde a convolução das suas transformadas de Fourier então a transformada de Fourier de $\text{sinc}^2(10t)$ é a convolução deste pedestal com ele próprio, ou seja, um sinal triangular entre -20 e 20 radianos por segundo.

Se procedermos a uma amostragem daquele sinal à frequência angular de 40 radianos por segundo, isto é, obedecendo ao teorema da amostragem, não se verificará a ocorrência de *aliasing*.



Se realizarmos essa amostragem à frequência angular de, por exemplo, 30 radianos por segundo, isto é, não obedecendo ao teorema da amostragem, verificar-se-á a ocorrência de *aliasing*.



O programa em MATLAB seguinte serviu para calcular as transformadas de Fourier dos dois sinais amostrados, no intervalo $[-\pi, \pi]$:

```
n=-64:1:63;
x40=sinc(2*n/4).*sinc(2*n/4);
x30=sinc(2*n/3).*sinc(2*n/3);
h40=fftshift(fft(x40));
h30=fftshift(fft(x30));
w=-pi:pi/64:pi-pi/64;
a=[-pi,pi,0,2];
clf, subplot(2,1,1), plot(w,abs(h40)), axis(a), grid on
subplot(2,1,2), plot(w,abs(h30)), axis(a), grid on
```

3.3 Reconstrução de um Sinal Amostrado

A reconstrução de um sinal amostrado faz-se calculando $X_c(j\Omega)$ a partir de $X(e^{j\omega})$, o que só é possível se não tiver ocorrido *aliasing*. Esta operação implica por um lado eliminar as bandas de $X(e^{j\omega})$ fora do intervalo $[-\pi, \pi]$ e por outro realizar a mudança de variável $\omega \Rightarrow \Omega T$,

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$

$$X_c(j\Omega) = \begin{cases} TX(e^{j\Omega T}), & \text{se } -\pi/T < \Omega < \pi/T \\ 0, & \text{se não.} \end{cases}$$

Calculando em seguida a transformada de Fourier inversa

$$x_c(t) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j\Omega T n} e^{j\Omega t} d\Omega = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} e^{j\Omega(t-nT)} d\Omega$$

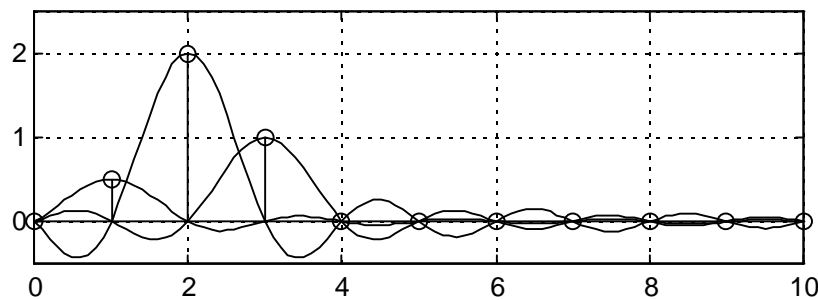
$$x_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \frac{T}{2\pi} \frac{1}{j(t-nT)} \left[e^{j\Omega(t-nT)} \right]_{-\pi/T}^{\pi/T} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \text{sinc}\left(\frac{\pi(t-nT)}{T}\right) .$$

obtem-se um sinal de banda limitada nas condições pretendidas.

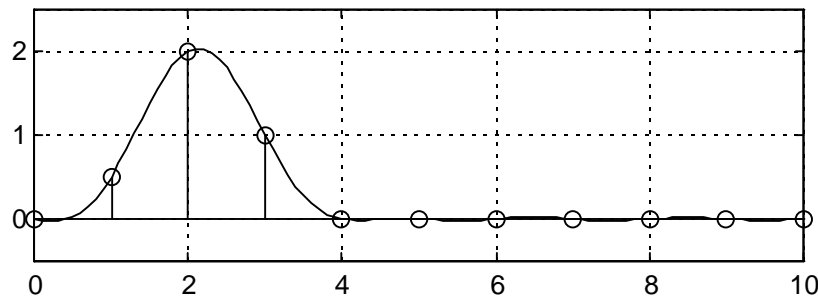
Realmente, cada componente

$$x(n) \text{sinc}(\pi(t-nT)/T)$$

é de banda limitada, e toma o valor zero em todos os pontos de amostragem, excepto no ponto $t = nT$, onde toma o valor $x(n)$, como se mostra no exemplo seguinte.



O resultado é



3.4 Amostragem Real

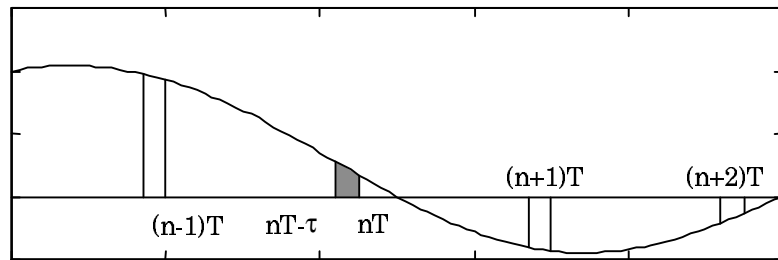
A amostragem ideal que estudamos

$$x(n) = x_c(nT)$$

não é realizável na prática. Uma amostragem real pode contudo em muitos casos ser expressa em termos de uma amostragem ideal, ficando desse modo completamente caracterizada, para todos os efeitos práticos, e nomeadamente para a sua compensação.

Exemplo

Um modelo para muitas situações de amostragem real é o do valor médio



$$x(n) = \frac{1}{\tau} \int_{nT-\tau}^{nT} x_c(t) dt ,$$

que se pode exprimir como a amostragem ideal da convolução

$$x_c(t) * (u(t) - u(t-\tau))/\tau ,$$

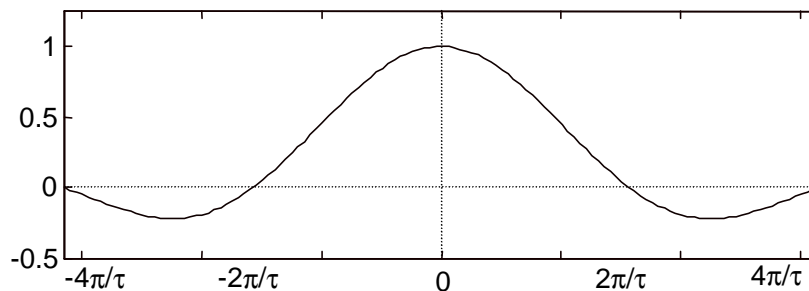
ou seja, do sinal contínuo $x_c(t)$ filtrado por um filtro passa baixo com resposta impulsional

$$h(t) = (u(t) - u(t-\tau))/\tau .$$

A resposta em frequência respectiva é

$$H(j\Omega) = \text{sinc}(\Omega/2)e^{-0.5j\Omega\tau}$$

e, como seria de esperar, quanto menor for τ , maior é a largura de banda do filtro e mais próxima da ideal é esta amostragem real.



Como, normalmente, τ é muito menor que T , então $2\pi/\tau \gg \pi/T$ e o efeito deste filtro passa-baixo é, nesses casos, muito pequeno.

Por outro lado, esse efeito pode sempre ser compensado noutro ponto da cadeia de processamento, nomeadamente no processador de sinal.

3.5 Reconstrução Real

A reconstrução do sinal contínuo a partir da expressão

$$x_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\text{sinc}\left(\frac{\pi(t - nT)}{T}\right)$$

é normalmente problemática, e mesmo impossível em tempo real, por ser uma operação não causal.

Em muitos casos, a reconstrução que realmente se faz é da forma

$$x_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\phi(t - nT) ,$$

em que $\phi(t)$ é uma determinada função de reconstrução, que se pode facilmente obter reconstruindo o sinal discreto $\delta(n)$.

Calculando a transformada de Fourier

$$X_c(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\Phi(j\Omega)e^{-j\Omega nT} = \Phi(j\Omega)X(e^{j\Omega T}),$$

em que $\Phi(j\Omega)$ é a transformada de Fourier de $\phi(t)$.

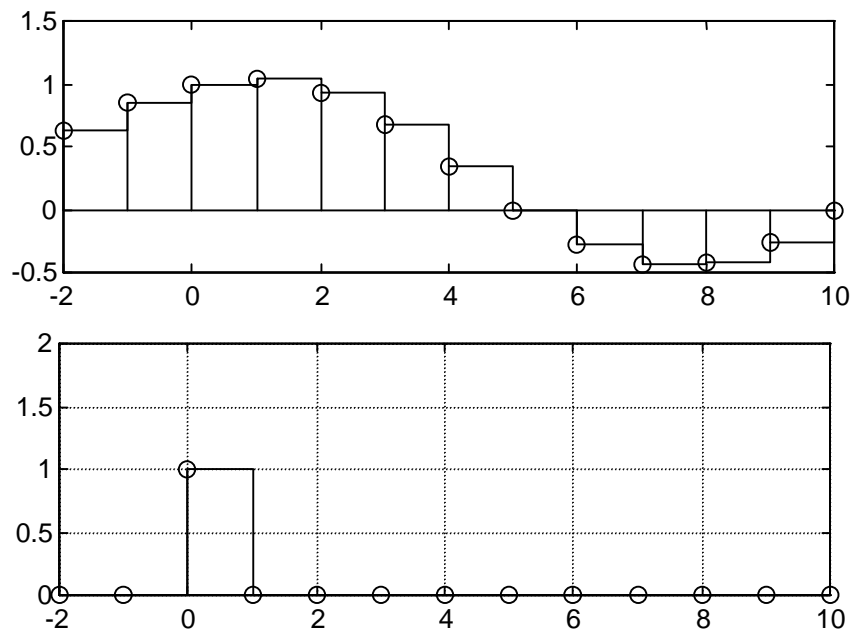
Comparando esta expressão com a expressão da reconstrução ideal

$$X_c(j\Omega) = \begin{cases} TX(e^{j\Omega T}), & \text{se } -\pi/T < \Omega < \pi/T \\ 0, & \text{se não,} \end{cases}$$

pode dizer-se que $X_c(j\Omega)$ se obtém de $X(e^{j\omega})$, não através de um filtro passa-baixo ideal, cujo efeito é eliminar as bandas de $X(e^{j\omega})$ fora do intervalo $[-\pi, \pi]$, mas sim através de um filtro, $\Phi(j\Omega)$, que, para além de não ter ganho constante neste intervalo, eventualmente apenas atenua aquelas bandas.

Exemplos

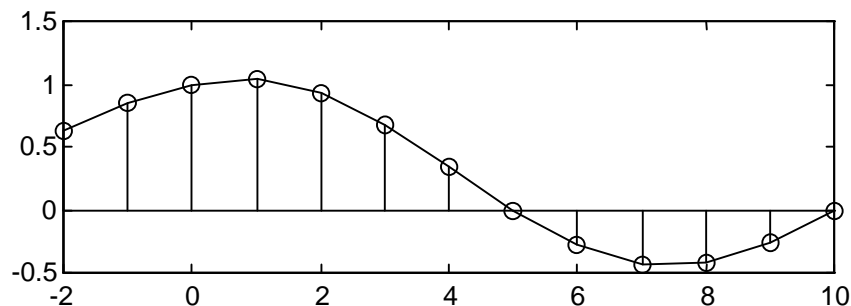
Na reconstrução de ordem 0,

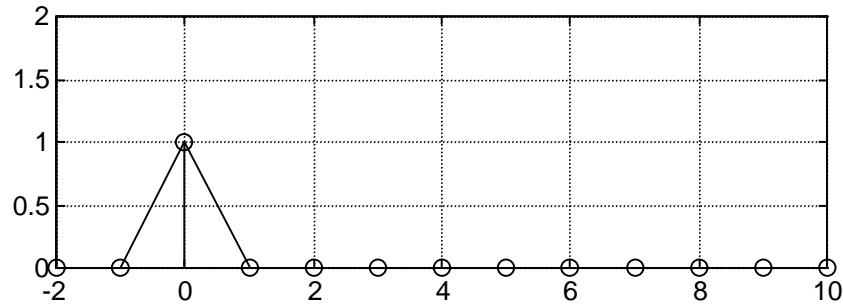


$$\phi(t) = u(t) - u(t-T),$$

$$\Phi(j\Omega) = T \text{sinc}(0.5\Omega T)e^{-0.5j},$$

como se sabe, e na reconstrução de ordem 1 (interpolação linear),





$$\phi(t) = \frac{(u(t + 0.5T) - u(t - 0.5T)) * (u(t + 0.5T) - u(t - 0.5T))}{T},$$

$$\Phi(j\Omega) = T \text{sinc}^2(0.5\Omega T).$$

3.6 Interpolação

A interpolação corresponde ao aumento da frequência de amostragem do sinal contínuo, e só é, naturalmente, possível se este tiver já sido amostrado a uma frequência satisfazendo o teorema da amostragem.

Sejam $x(n)$ um sinal discreto com transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$ e $x_0(n)$ o sinal discreto que se obtém do anterior intercalando $M-1$ zeros entre cada dois valores de $x(n)$

$$x_0(n) = \begin{cases} x(n/M), & \text{se } n \text{ é múltiplo de } M \\ 0, & \text{se não.} \end{cases}$$

A transformada de Fourier de $x_0(n)$ é evidentemente

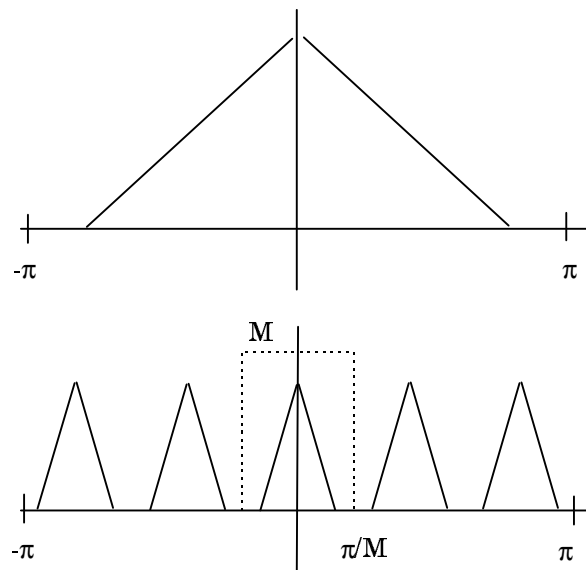
$$X_0(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega M}),$$

isto é, é a transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$ como que “comprimida” no intervalo $[-\pi/M, \pi/M]$ e depois repetida periodicamente com período $2\pi/M$

Se se notar, a partir da expressão

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{\Delta t} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} X_c\left(\frac{j(\omega + 2r\pi)}{\Delta t}\right),$$

que amostrar a uma frequência M vezes maior um sinal contínuo tem exactamente por efeito comprimir M vezes a transformada de Fourier do sinal discreto resultante e multiplicar por M a sua amplitude, pode-se concluir que a interpolação se consegue realizando uma filtragem passa baixo de $x_0(n)$ com frequência de corte π/M e ganho M .



A interpolação é uma situação em que os filtros digitais do tipo não recursivo são muitas vezes utilizados, tirando partido de apenas 1 em M elementos do sinal discreto $x_0(n)$, no máximo, serem não nulos.

Assim, na equação

$$x_i(n) = \sum_{n=0}^{L-1} h(n)x_0(n-k)$$

apenas L/M coeficientes $h(k)$ intervêm no cálculo de um elemento de $x_i(n)$, como se o filtro fosse realmente de comprimento L/M .

Estes L/M coeficientes variam contudo com a ordem do elemento de $x_i(n)$.

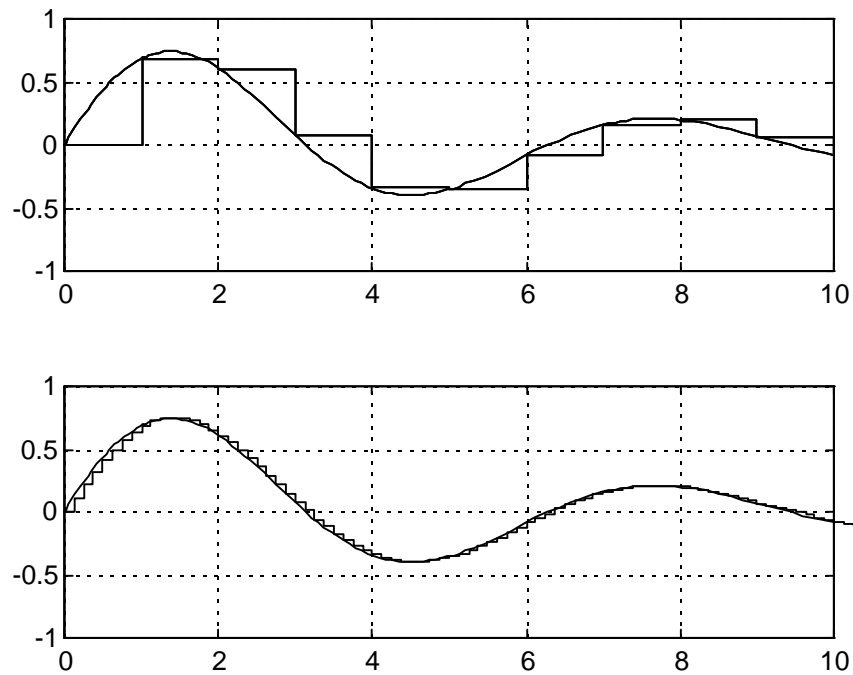
Se L for um múltiplo de M , os L coeficientes $h(k)$ podem ser arranjados em M conjuntos

conjunto				
0	$h(0)$	$h(M)$...	$h(L-M)$
1	$h(1)$	$h(M+1)$...	$h(L-M+1)$
...
$M-1$	$h(M-1)$	$h(2M-1)$...	$h(L-1)$

sendo utilizado o conjunto $n \bmod M$ para o cálculo do elemento $x_i(n)$, e tudo se passando como se fosse utilizado um filtro não recursivo de comprimento L/M e coeficientes variáveis (não invariante).

Em MATLAB, a função `interp` realiza a interpolação. O programa a seguir mostra-o:

```
t=0:1:10;
x=exp(-t/5).*sin(t);
xi=interp(x,8);
ti=0:0.125:10.875;
subplot(2,1,1), fplot('exp(-x/5)*sin(x)',[0 10 -1 1])
hold on, subplot(2,1,1), stairs(t,x), axis([0 10 -1 1]), grid on
subplot(2,1,2), fplot('exp(-x/5)*sin(x)',[0 10 -1 1])
hold on, subplot(2,1,2), stairs(ti,xi), axis([0 10 -1 1]), grid on
```



3.7 Decimação

A decimação é a operação correspondente à redução da frequência de amostragem do sinal contínuo.

Na realização desta operação, a única dificuldade é a possível ocorrência de *aliasing*.

Sejam $x(n)$ um sinal discreto com transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$ e $x_d(n)$ o sinal discreto que se obtém do anterior através de uma decimação de $M:1$

$$x_d(n) = x(Mn), \quad M \text{ inteiro.}$$

Como

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

$$x_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega Mn} d\omega$$

e, realizando a mudança de variável

$$\omega M \Rightarrow \omega,$$

$$x_d(n) = \frac{1}{2M\pi} \int_{-M\pi}^{M\pi} X(e^{j\frac{\omega}{M}}) e^{j\omega n} d\omega$$

integral que é possível reduzir ao domínio de integração $[-\pi, \pi]$

$$x_d(n) = \frac{1}{2M\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{r=0}^{M-1} X(e^{j\frac{\omega}{M} + j\frac{2r\pi}{M}}) e^{j\omega n} d\omega$$

donde, por simples comparação,

$$X_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{r=0}^{M-1} X(e^{j\frac{\omega}{M} + j\frac{2r\pi}{M}})$$

A decimação será uma operação reversível, isto é, realizada sem perda de informação, se $X(e^{j\omega})$ for zero fora do intervalo $[-\pi/M, \pi/M]$, ou seja, se for de banda limitada.

A decimação é assim habitualmente precedida de uma filtragem passa baixo digital, para que esta situação se verifique garantidamente.

A decimação é outra das situações em que os filtros digitais do tipo não recursivo são muito utilizados, apesar de normalmente exigirem mais operações por saída do que os do tipo recursivo.

Apesar de apenas ser necessário conservar uma saída do filtro passa baixo de M em M , se o filtro for do tipo recursivo todas as saídas têm de ser necessariamente calculadas.

3.8 Conversão Fraccionária da Frequência de Amostragem

A multiplicação da frequência de amostragem de um sinal contínuo por uma fracção M/N realiza-se encadeando uma interpolação 1: M e uma decimação N :1.

As duas filtragens passa-baixo podem evidentemente ser realizadas por um único filtro digital, cuja frequência de corte seja o mínimo dos valores π/M e π/N .

4. Transformada em z

4.1 Definição

A transformada em z é um instrumento matemático essencial para a análise e síntese de sistemas discretos, desempenhando um papel paralelo ao desempenhado pela transformada de Laplace relativamente aos sistemas contínuos.

Como se sabe, um sinal discreto $x(n)$ apenas terá transformada de Fourier se a soma

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

existir, sendo a transformada de Fourier inversa dada por

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega .$$

A condição de convergência necessária à existência da transformada de Fourier é demasiado exigente, daí resultando que muitos sinais com interesse prático não têm transformada de Fourier.

A transformada em z, $X(z)$, de um sinal discreto $x(n)$ é uma função complexa da variável complexa $z \in \mathbb{C}$, e define-se como

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n} .$$

Como veremos, esta definição vai permitir que muitos daqueles sinais que não têm transformada de Fourier tenham transformada em z.

Exemplos

O sinal discreto impulso unitário

$$x(n) = \delta(n)$$

tem transformada

$$X(z) = 1 .$$

O sinal discreto degrau unitário

$$x(n) = u(n) ,$$

que não tem transformada de Fourier, tem transformada em z

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n} = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

na região do plano z $|z| > 1$, condição em que este somatório converge.

A condição de convergência necessária à existência da transformada em z é menos exigente que a condição de convergência necessária à convergência da transformada de Fourier.

4.2 Região de Convergência

A região do plano z onde existe a transformada em z de um sinal discreto denomina-se região de convergência da transformada em z desse sinal.

A indicação da região de convergência é absolutamente obrigatória na transformada em z .

Exemplo

A transformada em z de

$$x(n) = a^n u(n)$$

é

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n} = \frac{1}{1 - az^{-1}}, |z| > |a|$$

e a transformada em z de

$$x(n) = -a^n u(-n-1)$$

é

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} -a^n z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} -a^{-n} z^n = -\frac{a^{-1}z}{1 - a^{-1}z}, |a^{-1}z| < 1$$

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, |z| < |a|,$$

que só difere da anterior na região de convergência!

Em certas situações, a região de convergência da transformada em z de um sinal discreto pode ser determinada muito facilmente.

A região de convergência da transformada em z de um sinal discreto de comprimento finito, isto é, tal que

$$n < n_1 \text{ ou } n > n_2 \Rightarrow x(n) = 0,$$

é todo o plano z , excepto

$$z = 0, \text{ se } n_2 > 0,$$

uma vez que neste caso

$$X(z) = \sum_{n=n_1}^{n_2} x(n) z^{-n}$$

contem parcelas com potências negativas de z , e / ou

$$|z| = \infty, \text{ se } n_1 < 0,$$

já que neste caso $X(z)$ contem parcelas com potências positivas de z .

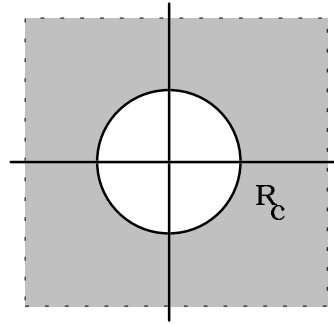
Se o sinal discreto for de comprimento infinito mas tal que

$$n < n_1 \Rightarrow x(n) = 0,$$

é sempre possível encontrar um valor R_c suficientemente grande que garanta que exista

$$\sum_{n=n_1}^{\infty} x(n) R_c^{-n},$$

o que quer dizer que a região de convergência da transformada em z de um sinal discreto nestas condições é o exterior de um círculo centrado na origem do plano z e com raio R_c .



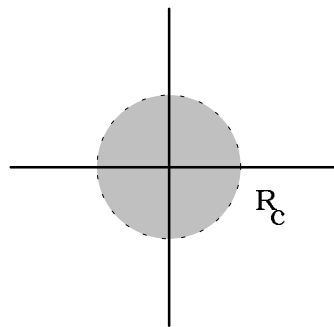
Similarmente, se o sinal discreto for de comprimento infinito mas tal que

$$n > n_2 \Rightarrow x(n) = 0,$$

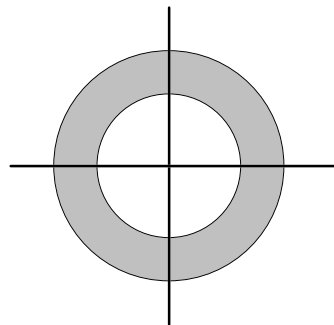
é sempre possível encontrar um valor R_c suficientemente pequeno que garanta que exista

$$\sum_{n=-\infty}^{n_2} x(n)R_c^{-n},$$

e então a região de convergência da transformada em z de um sinal discreto nestas condições é o interior de um círculo centrado na origem do plano z e com raio R_c .



Finalmente, se o sinal discreto for de comprimento infinito e não se verificar nenhuma das situações anteriores, a região de convergência da sua transformada em z , se existir, será uma coroa circular centrada na origem do plano z .



Em muitos casos, a transformada em z de um sinal discreto é uma fracção cujos numerador e denominador são dois polinómios em z , ou em z^{-1} .

Os zeros do denominador desta fracção são os polos dessa transformada em z .

Os polos da transformada em z de um sinal discreto situam-se sempre fora da sua região de convergência, a qual, contudo, é sempre limitada pelos seus polos.

Seria absurdo que assim não fosse.

4.3 Relação com a Transformada de Fourier

Sejam $x(n)$ um sinal discreto e $X(z)$ a sua transformada em z .

Se a circunferência de raio unitário e centrada na origem do plano z

$$z = e^{j\omega}, \quad -\pi \leq \omega < \pi$$

pertencer à região de convergência de $X(z)$, então a transformada de Fourier de $x(n)$ pode obter-se de $X(z)$ através de

$$X(e^{j\omega}) = X(z) \Big|_{z=e^{j\omega}}.$$

De notar que existirão sinais discretos para os quais não existe transformada de Fourier e existe transformada em z , e para os quais portanto esta relação não é válida.

Inversamente, pode obter-se a transformada em z de $x(n)$ a partir da sua transformada de Fourier, utilizando a transformada de Fourier inversa e em seguida a definição de transformada em z

$$X(e^{j\omega}) \Rightarrow x(n) \Rightarrow X(z).$$

Esta possibilidade de se obter uma função definida num plano a partir do conhecimento do seu valor ao longo de uma linha desse plano, está ligada ao facto de $X(z)$ ser uma função complexa da variável complexa z .

Não será esta a última vez em que certas propriedades das funções complexas da variável complexa são referidas.

4.4 Algumas Propriedades da Transformada em z

A transformada em z é uma transformada linear, o que quer dizer que a transformada em z da soma de dois sinais discretos é a soma das suas transformadas em z , e a transformada em z do produto de um sinal discreto por uma constante é o produto da transformada em z desse sinal discreto por essa constante.

A transformada em z do sinal discreto $x(n)$, com transformada em z $X(z)$, deslocado de k , $x(n-k)$, é

$$x(n-k) \Leftrightarrow z^{-k}X(z),$$

como se obtém escrevendo

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n+k-k} = z^{-k} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n+k} = z^{-k}X(z)$$

A transformada em z do sinal discreto $x(n)$ multiplicado por a^n , $a^n x(n)$, é

$$a^n x(n) \Leftrightarrow X(z/a),$$

com região de convergência de raio aR_c .

A transformada em z do sinal discreto $x(-n)$ é

$$x(-n) \Leftrightarrow X(z^{-1}),$$

com região de convergência de raio R_c^{-1} .

4.5 Propriedade da Convolução

Sejam $x(n)$ e $h(n)$ dois sinais discretos e

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k)$$

a sua convolução discreta. Então

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k)z^{-n}$$

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k)z^{-n+k-k}$$

$$Y(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)z^{-k} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n-k)z^{-n+k} = X(z)H(z),$$

sendo necessário que não seja vazia a intersecção das regiões de convergência de $X(z)$ e de $H(z)$. A região de convergência de $Y(z)$ inclui aquela intersecção, mas pode excedê-la, se houver cancelamento de polos com zeros.

A transformada em z tem assim a propriedade da convolução.

4.6 Função de Transferência de um Sistema Discreto

Como resulta da propriedade da convolução, as transformadas em z , $X(z)$, da entrada $x(n)$, e $Y(z)$, da saída $y(n)$, de um sistema discreto estão relacionadas por

$$Y(z) = H(z)X(z),$$

em que $H(z)$ é a transformada em z da sua resposta impulsional $h(n)$.

$H(z)$ é a função de transferência do sistema discreto, e, como veremos, desempenha um papel fundamental na análise e na síntese de sistemas discretos.

4.7 Estabilidade e Causalidade

Um sistema discreto é estável se e só se a região de convergência da sua função de transferência contiver a circunferência unitária do plano z . Realmente, neste caso $h(n)$ tem transformada de Fourier e satisfaz portanto ao critério de estabilidade de um sistema discreto.

Um sistema discreto é causal se e só se a região de convergência da sua função de transferência for o exterior de um círculo.

Um sistema discreto causal e estável tem todos os seus polos no interior da circunferência unitária do plano z .

Esta circunferência desempenha um papel semelhante ao do eixo $j\Omega$ do plano s relativamente à transformada de Laplace.

4.8 Avaliação Geométrica da Transformada de Fourier

Conhecidos os zeros z_{z_i} e os polos z_{p_i} da transformada em z , $X(z)$, de um sinal discreto $x(n)$

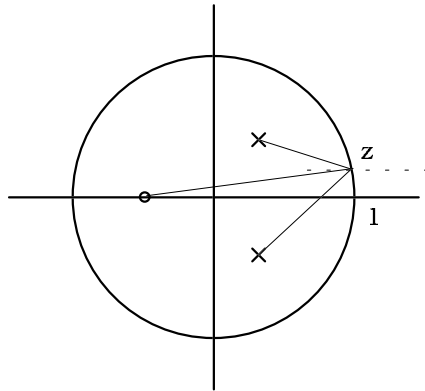
$$X(z) = \frac{\prod (z - z_{z_i})}{\prod (z - z_{p_i})},$$

e se notarmos que $(z - z_{z_i})$ e $(z - z_{p_i})$ são "vectores" no plano z , obtemos um método simples de avaliação de $X(z)$ quer em módulo quer em fase, muito utilizado por exemplo quando se pretende uma ideia aproximada do andamento da transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$ de $x(n)$.

Interpretando

$$z = e^{j\omega}$$

como um ponto móvel z que se desloca ao longo da circunferência unitária do plano z ,



$$|X(e^{j\omega})| = \frac{\prod |e^{j\omega} - z_{z_i}|}{\prod |e^{j\omega} - z_{p_i}|},$$

e

$$\arg(X(e^{j\omega})) = \sum \arg(e^{j\omega} - z_{z_i}) - \sum \arg(e^{j\omega} - z_{p_i}).$$

Exemplo

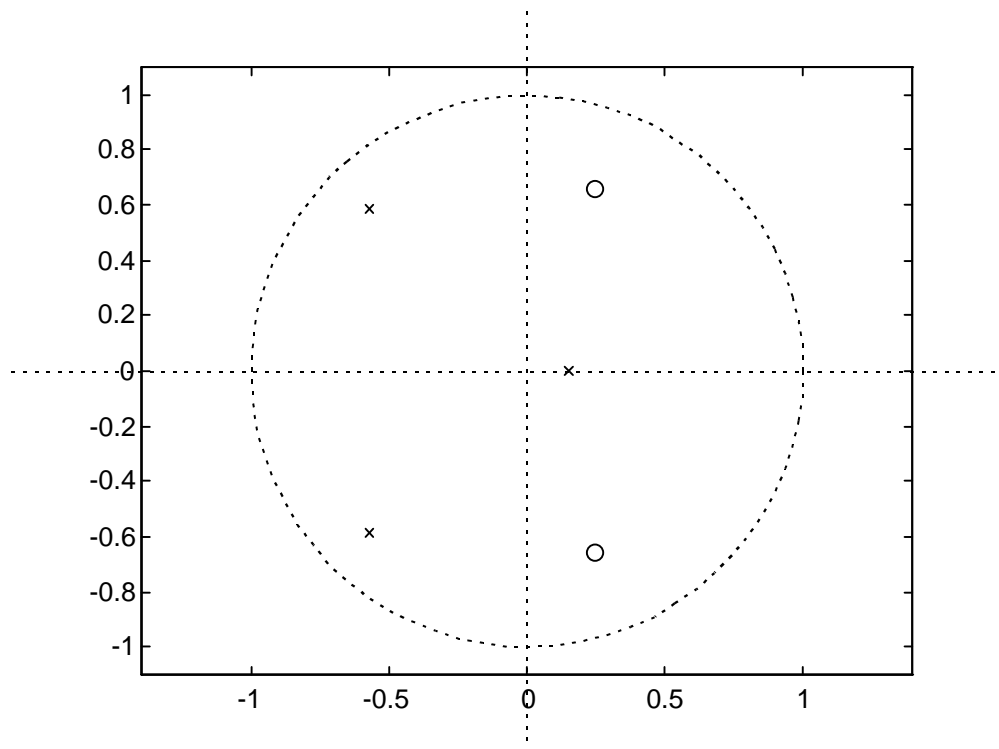
Em MATLAB, a instrução `zplane` localiza imediatamente os zeros e polos de uma função $X(z)$.

Por exemplo, para localizar no plano z os zeros e os polos de

$$X(z) = \frac{1 - 0.5z^{-1} + 0.5z^{-2}}{1 + z^{-1} + 0.5z^{-2} - 0.1z^{-3}}$$

basta fazer

```
zplane([1 -0.5 0.5],[1 1 0.5 -0.1])
```



4.9 Inversão da Transformada em z

Se uma determinada transformada em z, $X(z)$, estiver expressa como um polinómio em z, a sua inversão é óbvia.

Exemplo

Se

$$X(z) = 1 - 2z^{-1}$$

então

$$x(n) = \delta(n) - 2\delta(n-1).$$

4.9.1 Método da Divisão

Se $X(z)$ estiver expressa como um quociente de dois polinómios em z, a realização da respectiva divisão permite obter $x(n)$.

Exemplo

Se

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \text{ causal,}$$

a divisão segundo as potências decrescentes de z conduz ao resultado pretendido

$$\begin{array}{r} 1 \\ -1 \quad + az^{-1} \\ \hline \quad \quad az^{-1} \\ \quad \quad -az^{-1} \quad + a_2z^{-2} \\ \hline \quad \quad \quad \quad \dots \end{array} \qquad \begin{array}{r} | \quad 1 - az^{-1} \\ \hline 1 + az^{-1} + a_2z^{-2} + a_3z^{-3} + \dots \end{array}$$

Para se encontrar a solução não causal, seria necessário realizar a divisão segundo as potências crescentes de z

$$\begin{array}{r} 1 \\ -1 \quad + a^{-1}z \\ \hline \quad \quad a^{-1}z \\ \quad \quad -a^{-1}z \quad + a^{-2}z^2 \\ \hline \quad \quad \quad \quad \dots \end{array} \qquad \begin{array}{r} | \quad -az^{-1} + 1 \\ \hline -a^{-1}z - a^{-2}z^2 - a^{-3}z^3 - \dots \end{array}$$

Este método não permite normalmente obter uma expressão compacta para $x(n)$, mas oferece um processo expedito para o cálculo de seus valores iniciais. É muito usado em programas de computador.

4.9.2 Método da Decomposição em Fracções Simples

A decomposição de $X(z)$ em fracções simples, no caso em que $X(z)$ é uma fracção racional, é outro método de realizar a inversão da transformada em z. O objectivo é decompor $X(z)$ em parcelas das quais seja conhecida a transformada em z inversa e invocar a linearidade da transformada em z para realizar a inversão.

Para aplicar este método, será útil conhecer-se as transformadas

$$a^n u(n) \Leftrightarrow \frac{z}{z-a} = \frac{1}{1-az^{-1}}, |z| > |a|$$

$$-a^n u(-n-1) \Leftrightarrow \frac{z}{z-a} = \frac{1}{1-az^{-1}}, |z| < |a|,$$

e algumas propriedades elementares da transformada em z .

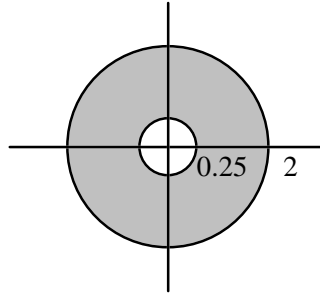
Exemplo

Seja

$$H(z) = \frac{z^{-1}}{1 - 2.25z^{-1} + 0.5z^{-2}}, \text{ estável.}$$

$H(z)$ apresenta dois polos simples em 0.25 e 2, e, para o sistema ser estável, a região de convergência de $H(z)$ é

$$0.25 < |z| < 2$$



Decompondo em fracções simples

$$H(z) = \frac{z}{(z - 0.25)(z - 2)}, \quad 0.25 < |z| < 2 = \frac{-\frac{1}{7}}{z - 0.25} + \frac{\frac{8}{7}}{z - 2}, \quad |z| > 0.25 + \frac{8}{7}, \quad |z| < 2,$$

e, notando que é sempre possível decidir qual a região de convergência de cada uma das parcelas em face da região de convergência da transformada em z , já que esta é a intersecção daquelas,

$$h(n) = -\frac{1}{7} 0.25^{n-1} u(n-1) - \frac{8}{7} 2^{n-1} u(-n) = -\frac{4}{7} \left[0.25^n u(n-1) + 2^n u(-n) \right].$$

4.9.3 Integral de Linha

Existe uma formula integral para o cálculo da transformada em z inversa, a qual se pode derivar das propriedades das funções complexas de variável complexa.

Uma propriedade importante da função complexa da variável complexa z^n é que o integral de linha

$$\oint_C z^n dz$$

calculado ao longo de uma qualquer linha fechada C que envolva a origem do plano z , e percorrida no sentido directo, vale

$$\oint_C z^n dz = \begin{cases} 2\pi j, & \text{se } n = -1 \\ 0, & \text{se não.} \end{cases}$$

Escrevendo $X(z)$ como uma soma de potências de z

$$X(z) = \dots + x(n-1)z^{-n+1} + x(n)z^{-n} + x(n+1)z^{-n-1} + \dots,$$

multiplicando ambos os termos desta igualdade por z^{n-1}

$$X(z)z^{n-1} = \dots + x(n-1) + x(n)z^{-1} + x(n+1)z^{-2} + \dots,$$

e calculando o integral de linha atrás referido

$$\oint_C X(z)z^{n-1}dz = \dots + 0 + 2\pi j x(n) + 0 + \dots ,$$

conclui-se imediatamente que

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z)z^{n-1}dz ,$$

com o integral calculado ao longo de um contorno C desenhado à volta da origem do plano z e na região de convergência de X(z).

Esta é a forma geral para o cálculo da transformada em z inversa.

Um integral de linha como o anterior pode ser calculado pelo método dos resíduos, que utiliza o facto de esse integral ser igual à soma dos resíduos da função integranda nos seus polos situados no interior do contorno, suposto percorrido no sentido directo.

O resíduo de uma função F(z) num polo simples **a** é

$$(z - a)F(z)\Big|_{z=a}$$

Num polo **a** com multiplicidade **m**, o resíduo é dado por uma expressão um pouco mais complexa

$$\frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z-a)^m F(z) \right] \Big|_{z=a}$$

Exemplo

Seja novamente

$$H(z) = \frac{z^{-1}}{1 - 2.25z^{-1} + 0.5z^{-2}} , \text{ estável .}$$

O integral de linha que permite calcular a transformada em z inversa é

$$h(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C H(z)z^{n-1}dz = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{z^n}{(z-0.25)(z-2)} dz ,$$

apresentando a função integranda dois polos simples em 0.25 e 2, e um polo de multiplicidade -n em 0, este para valores negativos de n, apenas.

No caso $n \geq 0$, verifica-se que apenas o polo em 0.25 se encontra no interior de um contorno de integração traçado na região de convergência de H(z), pelo que, utilizando o teorema dos resíduos,

$$h(n) = \frac{0.25^n}{-1.75} = -\frac{4}{7} 0.25^n , n \geq 0 .$$

No caso $n < 0$, verifica-se que os polos em 0.25 e em 0 se encontram no interior do contorno, sendo este último de multiplicidade variável, o que obrigaria a calcular h(n) termo a termo.

Em muitas situações, este problema não surge, por se saber, por exemplo, que o sinal original é causal, e, portanto, nulo para valores negativos de n.

No caso geral, a mudança de variável de integração

$$z \Rightarrow p^{-1}$$

permite colocar em ∞ (e logo, no exterior de qualquer contorno) o polo que estava em 0 e simplificar o problema.

No nosso exemplo, a função a integrar passa a ser

$$h(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C_p} \frac{p^{-n}}{(p^{-1} - 0.25)(p^{-1} - 2)} (-p^{-2}) dp = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C_p} \frac{-2p^{-n}}{(p-4)(p-0.5)} dp ,$$

com polos em 0.5 e 4, e em que C_p é o novo contorno de integração.

O novo contorno de integração, que está situado necessariamente no interior da nova região de convergência

$$0.5 < |p| < 4 ,$$

apresenta apenas o polo em 0.5 no seu interior, mas passa a ser percorrido em sentido retrógrado, pelo que ao aplicar a regra dos resíduos é necessário trocar o sinal ao resultado, obtendo-se

$$h(n) = -\frac{-2 \cdot 0.5^{-n}}{-3.5} = -\frac{4}{7} 0.5^{-n} , n < 0 .$$

Escrevendo os dois resultados numa única expressão,

$$h(n) = -\frac{4}{7} [0.25^n u(n) + 2^n u(-n-1)] .$$

que é equivalente ao resultado que tínhamos obtido anteriormente.

4.10 Propriedade da Convolução Complexa

A transformada em z do produto de dois sinais discretos $x(n)$ e $w(n)$, com transformadas em z , respectivamente, $X(z)$ e $W(z)$, é

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)w(n)z^{-n} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(v)v^{n-1} dv w(n)z^{-n} = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(v) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} w(n)z^{-n} v^{n-1} dv \\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)w(n)z^{-n} &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(v)W\left(\frac{z}{v}\right)v^{-1} dv . \end{aligned}$$

Este integral é na realidade uma convolução! A variável de integração v desempenha um papel equivalente ao da variável k na expressão da convolução

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k) .$$

A transformada de Fourier do produto de dois sinais discretos $x(n)$ e $w(n)$ é, por sua vez,

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_C X(v)W\left(\frac{z}{v}\right)v^{-1} dv \Big|_{z=e^{j\omega}} .$$

Repare-se que se se escolher como contorno de integração C a circunferência unitária do plano v , o que é sempre possível pois de outro modo $x(n)$ e $w(n)$ não teriam transformada de Fourier,

$$v = e^{j\theta}$$

$$v^{-1} dv = j d\theta ,$$

aquele integral fica

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})W(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$

expressão que evidencia claramente uma convolução, com a imagem geométrica que geralmente lhe está associada.

Esta propriedade é muito utilizada para avaliar o efeito, no domínio das frequências, da multiplicação de dois sinais discretos, como acontece, por exemplo, quando se multiplica uma resposta impulsional infinita por uma janela rectangular

$$h_a(n) = h(n)[u(n+n_0) - u(n-n_0-1)] .$$

Exemplo

Os sinais discretos

$$x(n) = 2^{-n}u(n)$$

e

$$w(n) = 3^{-n}u(n)$$

tem transformada em z respectivamente

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} , |z| > \frac{1}{2}$$

e

$$W(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} , |z| > \frac{1}{3}$$

e o seu produto

$$x(n)w(n) = 6^{-n}u(n)$$

tem transformada em z

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{6}z^{-1}} , |z| > \frac{1}{6}$$

Este resultado pode ser naturalmente obtido através da propriedade da convolução complexa, calculando no plano v o integral

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{1}{1 - \frac{1}{2}v^{-1}} \frac{1}{1 - \frac{1}{3}(\frac{z}{v})^{-1}} v^{-1} dv , |v| > \frac{1}{2} \text{ e } \left| \frac{z}{v} \right| > \frac{1}{3} ,$$

com o contorno C satisfazendo as condições impostas pelas regiões de convergência de X(z) e W(z), isto é,

$$\frac{1}{2} < |v| < 3|z| .$$

Um contorno nessas condições só existirá evidentemente se

$$3|z| > \frac{1}{2} \Leftrightarrow |z| > \frac{1}{6}$$

que será a região de convergência da transformada em z de x(n)w(n).

O integral pode ser calculado pelo método dos resíduos, para o que se torna necessário determinar os polos da função integranda

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{-3z}{(v - \frac{1}{2})(v - 3z)} dv , |z| > \frac{1}{6} \wedge \frac{1}{2} < |v| < 3|z| ,$$

que são 1/2 e 3z.

Como apenas o polo 1/2 se encontra no interior do contorno C, o resíduo nesse polo,

$$\frac{-3z}{\frac{1}{2} - 3z} = \frac{1}{1 - \frac{1}{6}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{6},$$

é a transformada em z procurada.

Note-se que através da propriedade da convolução complexa foi possível deduzir não só a expressão da transformada em z como também a sua região de convergência.

5. DFT - Transformada de Fourier Discreta

5.1 Introdução

A transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$ de um sinal discreto $x(n)$ é uma função da variável contínua ω , que sabemos ser periódica, com período 2π .

Do ponto de vista do seu processamento, interessa evidentemente conhecer em que condições é possível representar esta transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$ por uma sua amostragem $X(k)$.

Essas condições são, como vamos ver, o sinal $x(n)$ ser de comprimento limitado, N , e a sua transformada de Fourier ser amostrada em pelo menos N pontos num período, e são da mesma natureza das condições que estabelecemos quando estudamos a amostragem de sinais contínuos.

Nessas condições, um sinal de banda limitada e de duração limitada poderá então ser representado por N amostras, do sinal ou da sua transformada de Fourier!

5.1.1 Amostragem nos Domínios do Tempo e da Frequência

A transformada de Fourier de um sinal contínuo $x_c(t)$ é, se existir,

$$X_c(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_c(t) e^{-j\Omega t} dt ,$$

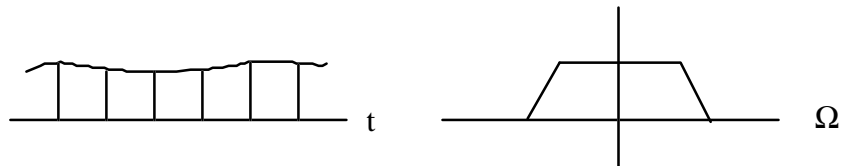
e a sua transformada inversa é

$$x_c(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_c(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega ,$$

Quando se amostra um sinal contínuo $x_c(t)$,

$$x(n) = x_c(n\Delta t) , n \in \mathbb{N}$$

sabemos que esta amostragem apenas representa o sinal contínuo se a sua transformada de Fourier $X_c(j\Omega)$ for de banda limitada a um intervalo de largura igual ou inferior a $2\pi/\Delta t$.

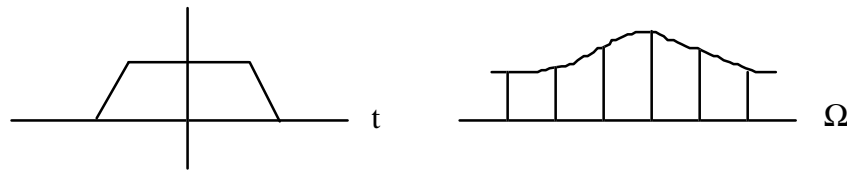


Se esta condição não for satisfeita ocorre o fenómeno designado por *aliasing* e a amostragem deixa de ser reversível.

Atendendo à similaridade entre as expressões da transformada de Fourier e da transformada de Fourier inversa, poderíamos verificar que quando se amostra uma transformada de Fourier $X_c(j\Omega)$,

$$X(k) = X_c(jk\Delta\Omega) , k \in \mathbb{N}$$

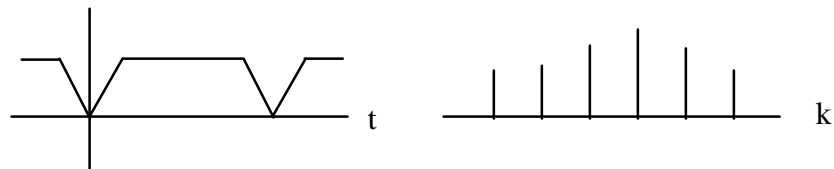
esta amostragem apenas representará a transformada de Fourier se o sinal contínuo $x_c(t)$ for de duração limitada a um intervalo igual ou inferior a $2\pi/\Delta\Omega$, e que de outro modo ocorreria *aliasing* e a transformada de Fourier não poderia ser recuperada a partir da amostragem realizada.



Na realidade, amostrar num dos domínios equivale a repetir periodicamente no outro, e o *aliasing* não é mais que a sobreposição decorrente dessa repetição periódica.

5.1.2 Sinais Periódicos nos Domínios do Tempo e da Frequência

Um sinal contínuo periódico $x_p(t)$ não têm transformada de Fourier, mas, como se sabe, pode ser desenvolvido em série de Fourier, com coeficientes

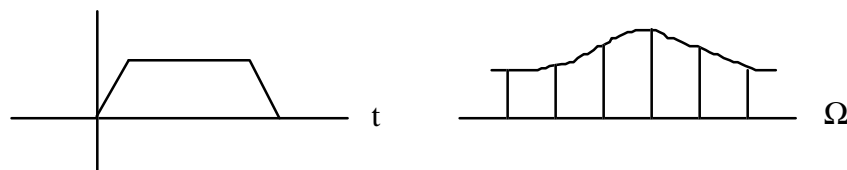


$$C_k = \frac{1}{T} \int_0^T x_p(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}kt} dt ,$$

em que T é o período do sinal, sendo então

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{j\frac{2\pi}{T}kt} .$$

Os coeficientes C_k são, a menos do factor $1/T$, uma amostragem nos pontos $2k\pi/T$ da transformada de Fourier do sinal de duração limitada definido por um período do sinal periódico $x_p(t)$

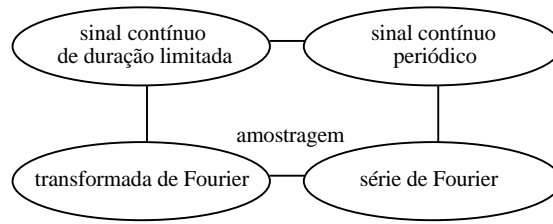


$$X_p(j\Omega) = \int_0^T x_p(t) e^{-j\Omega t} dt$$

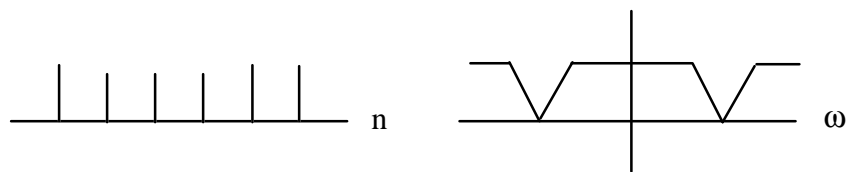
$$C_k = \frac{1}{T} X_p(j\frac{2k\pi}{T}) .$$

No domínio dos tempos, exxiste uma correspondência biunívoca entre um sinal de duração limitada e um sinal periódico constituído por uma repetição periódica daquele, desde que o período da repetição seja igual ou superior à duração do sinal.

No domínio das frequências, desde que se considere um número suficiente de amostras, há igualmente uma correspondência biunívoca, sendo os coeficientes da série de Fourier do primeiro uma amostragem, a menos do factor 1/T, da transformada de Fourier do segundo.

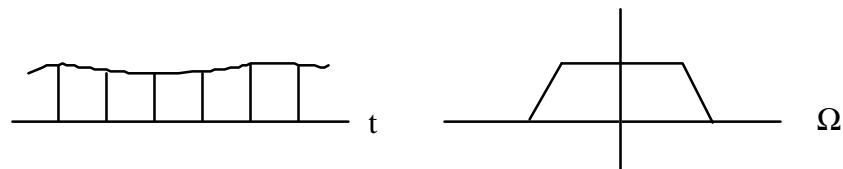


A situação dual desta pode ser encontrada na transformada de Fourier de um sinal discreto, anteriormente estudada,



$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

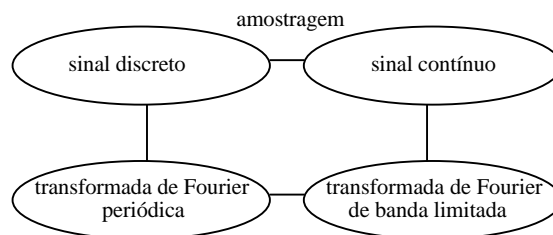
e na transformada de Fourier inversa de um sinal contínuo



$$x_c(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_c(j\Omega)e^{j\Omega t} d\Omega .$$

Realmente, no domínio das frequências, pode estabelecer-se uma correspondência biunívoca entre uma transformada de Fourier de banda limitada e uma transformada de Fourier periódica obtida por repetição daquela, desde que o período desta seja superior à largura de banda daquela, isto é, não haja *aliasing*.

No domínio dos tempos, desde que se considere um número suficiente de amostras, há igualmente uma correspondência biunívoca, sendo o sinal discreto original da segunda uma amostragem do sinal contínuo original da primeira.



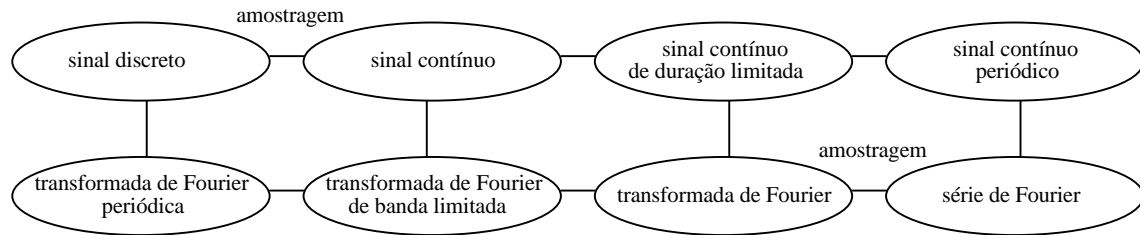
O desenvolvimento em série de Fourier de um sinal contínuo periódico

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{j\frac{2\pi}{T}kt}$$

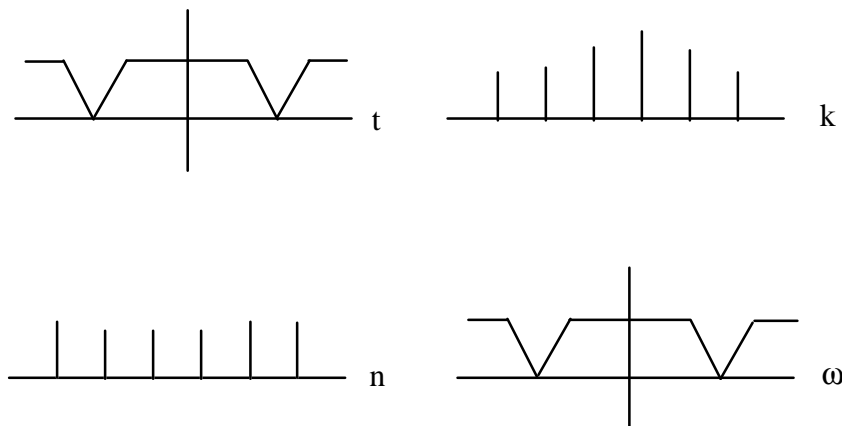
e a transformada de Fourier de um sinal discreto (que também é uma série de Fourier!)

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

são assim expressões intimamente ligadas, podendo em certas condições relacionar-se os respectivos componentes C_k e $x(n)$.



Um sinal contínuo periódico tem uma transformada de Fourier constituída por "riscas", os coeficientes C_k , e uma transformada de Fourier periódica tem como original um sinal constituído por "riscas", o sinal discreto $x(n)$.



É assim possível estabelecer uma relação entre estes dois sinais discretos, o sinal $x(n)$ e os coeficientes C_k , na condição de se verificarem as condições requeridas para a realização das amostragens nos domínios do tempo e da frequência, isto é, largura de banda $2\pi/\Delta t$ e duração $2\pi/\Delta\Omega$, em que Δt e $\Delta\Omega$ são os intervalos de amostragem respectivos.

Como

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{j\frac{2\pi}{T}kt}$$

amostrando $x_p(t)$ em N pontos igualmente espaçados de $\Delta t=T/N$, $n\Delta t = nT/N$, $n = 0 .. N-1$

$$x(n) = x_p\left(n\frac{T}{N}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

Como, por outro lado,

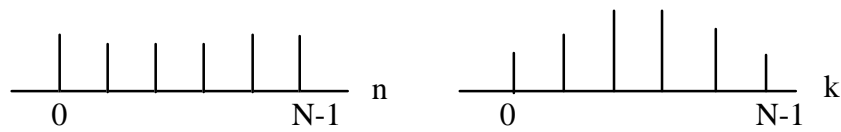
$$C_k = \frac{1}{T} X_p(j \frac{2k\pi}{T}), k = 0 \dots N-1$$

isto é, a menos do factor $1/T$, uma amostragem de $X_p(j\Omega)$ em N pontos igualmente espaçados de $\Delta\Omega=2\pi/T$

$$X_p(j\Omega) = \Delta t X(e^{j\Omega\Delta t}) = \Delta t \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j\Omega n\Delta t}$$

$$C_k = \frac{\Delta t}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} .$$

Estas relações são válidas se se verificarem as condições requeridas para a realização das amostragens nos domínios do tempo e da frequência, isto é, largura de banda $2N\pi/T$ e duração T , pelo que apenas N coeficientes C_k e N amostras $x(n)$ serão não nulos, tornando-se



$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} C_k e^{j \frac{2\pi}{N} kn}$$

$$C_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} .$$

5.2 DFS - Série de Fourier Discreta

Um sinal discreto periódico não tem transformada de Fourier.

Na realidade, escrevendo um sinal periódico de período N como

$$x_p(n) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x(n + rN) ,$$

em que $x(n)$ é um sinal discreto de comprimento limitado, isto é, tal que

$$n < 0 \text{ ou } n > N-1 \Rightarrow x(n) = 0 ,$$

verifica-se que a transformada em z de $x_p(n)$

$$X_p(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_p(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x(n + rN) z^{-n+rN-rN}$$

$$X_p(z) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} z^{-rN} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n + rN) z^{-n+rN} = X(z) \sum_{r=-\infty}^{+\infty} z^{-rN}$$

não converge em nenhum ponto do plano z (convergiria se o sinal periódico fosse limitado de um dos lados, mas mesmo neste caso continuaria a não existir transformada de Fourier devido aos polos de $X_p(z)$ sobre a circunferência unitária do plano z).

Um sinal discreto periódico, com período N , pode contudo ser desenvolvido em série de Fourier discreta, isto é, pode ser descrito como uma soma de sinais discretos sinusoidais complexos com período N ou um seu submúltiplo

$$x_p(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_p(k) e^{\frac{j2kn\pi}{N}}$$

(o factor N^{-1} é um simples factor de escala).

Como

$$e^{\frac{j2kn\pi}{N}} = e^{\frac{j2(k+N)n\pi}{N}},$$

só há efectivamente N sinais discretos sinusoidais complexos de período N diferentes, pelo que um sinal discreto periódico com período N pode ser desenvolvido numa série de Fourier discreta com apenas N termos diferentes

$$x_p(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_p(k) e^{\frac{j2kn\pi}{N}}$$

e os coeficientes $X_p(k)$ são dados na realidade por

$$X_p(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-\frac{j2kn\pi}{N}},$$

sendo útil notar que

$$X_p(k+N) = X_p(k),$$

isto é, que $X_p(k)$ é um sinal discreto periódico, com período N .

5.3 DFT - Transformada de Fourier Discreta

A transformada de Fourier discreta (DFT) de um sinal discreto $x(n)$ de comprimento N é uma amostragem da sua transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$ em N pontos igualmente espaçados do intervalo $[0, 2\pi[$

$$\omega_k = \frac{2k\pi}{N}, \quad k = 0 \dots N-1,$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\omega n},$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-\frac{j2kn\pi}{N}}, \quad k = 0 \dots N-1.$$

A relação inversa é

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{\frac{j2kn\pi}{N}}, \quad n = 0 \dots N-1.$$

como se pode verificar substituindo nesta expressão $X(k)$ pelo valor dado na expressão anterior

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{r=0}^{N-1} x(r) e^{-\frac{j2rk\pi}{N}} e^{\frac{j2kn\pi}{N}}, \quad n = 0 \dots N-1$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} x(r) \sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{j2(n-r)k\pi}{N}}, \quad n = 0 \dots N-1$$

e notando que o somatório em k vale

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{j2(n-r)k\pi}{N}} = \begin{cases} 0, & \text{se } r \neq n \\ N, & \text{se } r = n. \end{cases}$$

Normalmente, as expressões anteriores escrevem-se de uma forma mais compacta, introduzindo a notação

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}} = \cos \frac{2\pi}{N} - j \sin \frac{2\pi}{N}$$

e escrevendo-as na sua forma mais usual

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk}, \quad k = 0 \dots N-1$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-nk}, \quad n = 0 \dots N-1.$$

Comparando as respectivas expressões, pode verificar-se que a transformada de Fourier discreta de um sinal discreto $x(n)$ com comprimento N pode ser interpretada como a série de Fourier discreta do sinal discreto periódico com período N que se obtém repetindo periodicamente aquele sinal

$$x_p(n) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x(n + rN),$$

ou ainda, a menos do factor N , como a série de Fourier do sinal contínuo periódico com período T que se obtém por repetição do sinal de duração T e largura de banda $2N\pi/T$ cuja amostragem com período T/N é $x(n)$

$$X(k) = NC_k.$$

Exemplos

O sinal discreto de comprimento 4

$$x(n) = [1, 1, 1, 1]$$

tem DFT

$$X(k) = \sum_{n=0}^3 W_4^{nk}, \quad k = 0 \dots N-1$$

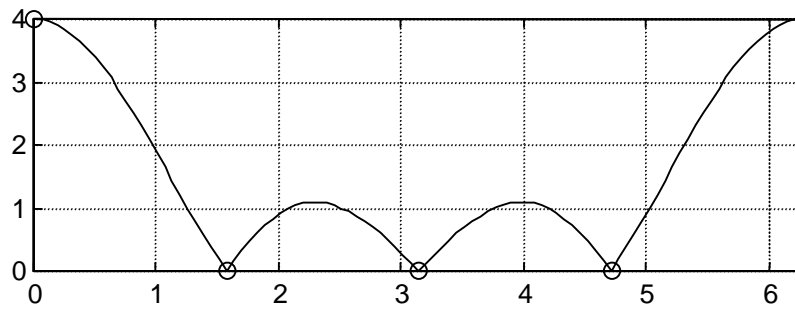
$$X(k) = [4, 0, 0, 0]$$

que é uma amostragem da transformada de Fourier

$$X(e^{j\omega}) = (2\cos(\omega/2) + 2\cos(3\omega/2))e^{-3j\omega/2}$$

do sinal discreto dado, nos pontos

$$\omega_k = \frac{2k\pi}{4}, \quad k = 0 \dots 3.$$



Se a transformada de Fourier tivesse sido amostrada em apenas 3 pontos

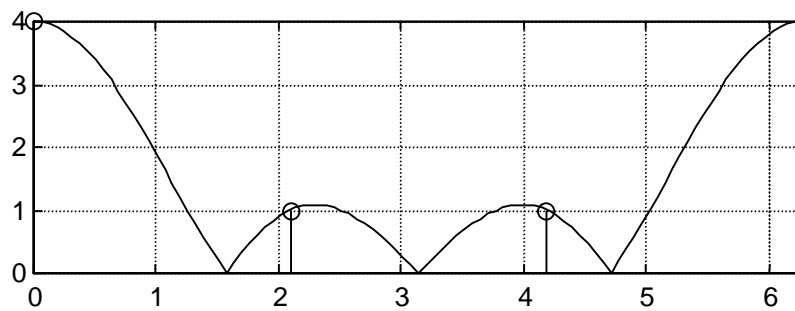
$$\omega_k = \frac{2k\pi}{3}, k = 0 .. 2$$

obteríamos

$$X(0) = 2 + 2 = 4$$

$$X(1) = (1 - 2)e^{-j\pi} = 1$$

$$X(2) = (-1 + 2)e^{-j2\pi} = 1$$



e, calculando a transformada de Fourier discreta inversa (iDFT) com comprimento 3,

$$x(0) = (4 + 1 + 1) / 3 = 2$$

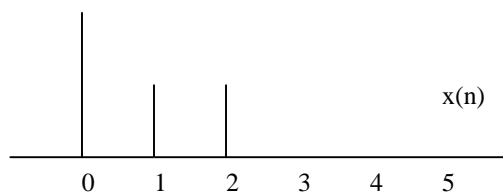
$$x(1) = (4 + W_3 + W_3^2) / 3 = (4 - 1/2 - 3/2j - 1/2 + 3/2j) / 3 = 1$$

$$x(2) = (4 + W_3^2 + W_3^4) / 3 = 1,$$

o que demonstra o fenómeno do *aliasing*. Na realidade, o sinal discreto original [1, 1, 1]

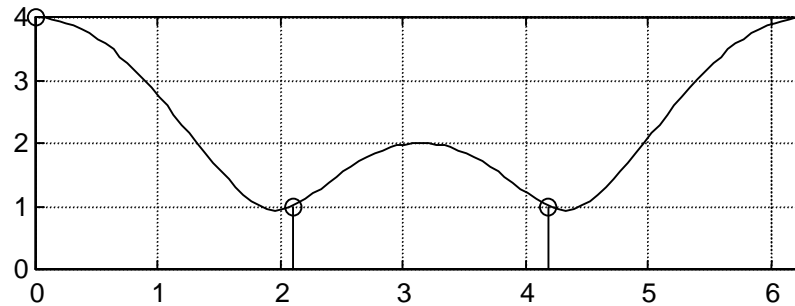


é recuperado como [2, 1, 1]



com o elemento $x(3)$ do sinal original adicionado a $x(0)$ no sinal obtido através da iDFT.

Como se mostra a seguir, a amostragem em 3 pontos da transformada de Fourier deste último sinal é exactamente $[4, 1, 1]$.



5.4 Propriedades da DFT

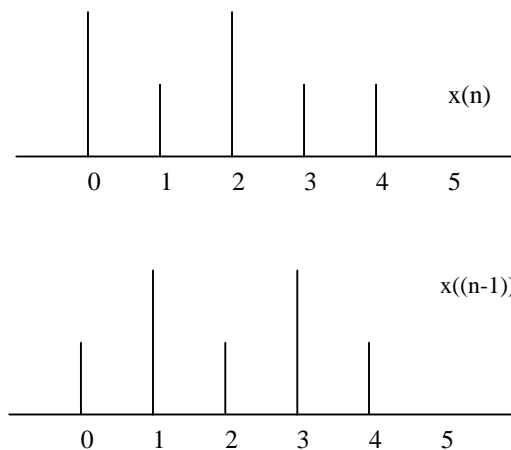
As propriedades da DFT reflectem a natureza periódica subjacente a estes sinais $x(n)$ e $X(k)$ de comprimento N . Um sinal discreto tem uma transformada de Fourier periódica; uma transformada de Fourier discreta terá como original um sinal periódico.

A DFT goza da propriedade da linearidade.

A DFT do sinal discreto deslocado de m , $x((n-m))$, é

$$W_N^{mk}X(k),$$

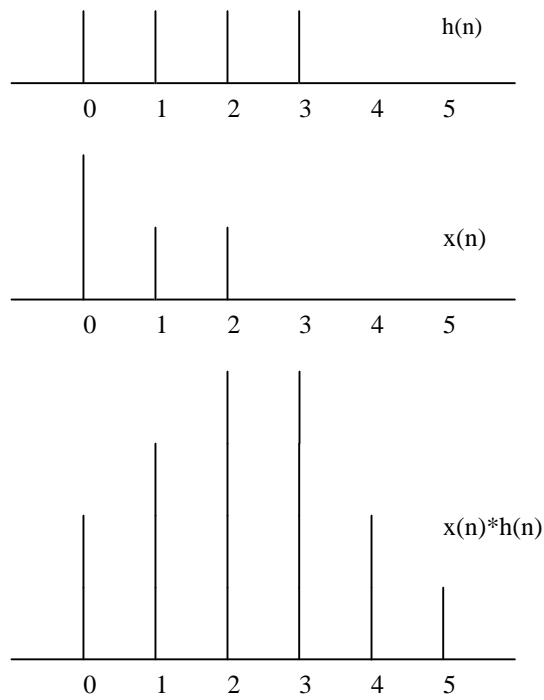
desde que o deslocamento se entenda como circular ou periódico, como se exemplifica a seguir para $N=5$ e $k=1$, e se simboliza com a notação $((\cdot))$,



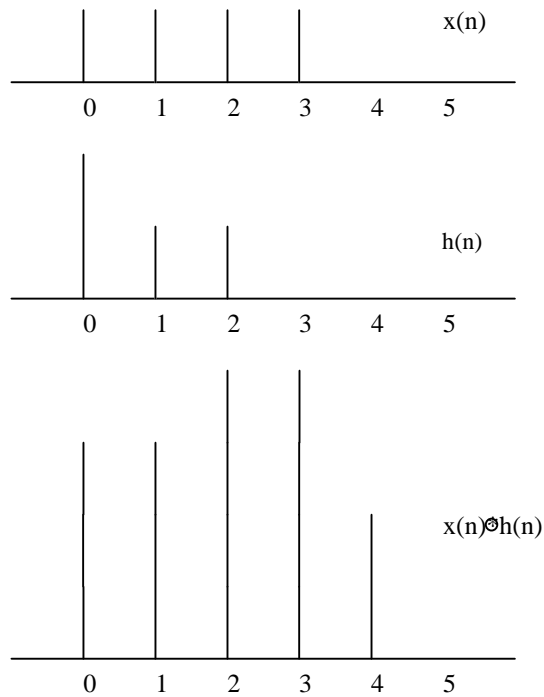
em que o elemento $x(N-1)$ após o deslocamento surge ocupando a posição de $x(0)$.

A DFT tem a propriedade da convolução circular ou periódica, isto é, o produto de duas DFT de comprimento N é a convolução circular ou periódica dos respectivos sinais discretos originais, entendida como um período da convolução de um deles por um período do outro.

Enquanto que na convolução linear



na convolução circular, com $N=5$,



A convolução circular introduz *aliasing* sempre que o comprimento do sinal discreto resultante da convolução excede o comprimento da DFT, como é o caso da figura.

Existe na DFT uma dualidade entre os domínios original e transformado, traduzido na similaridade das expressões da DFT e da iDFT.

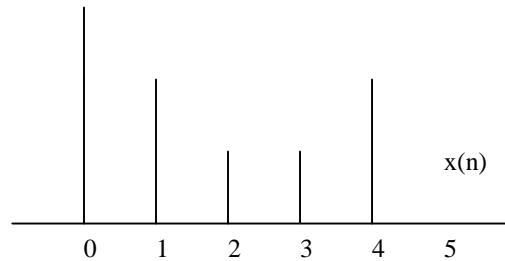
Se se registar em $X(k)$ um deslocamento circular de m , $X((k-m))$, o sinal discreto no domínio original será

$$W_N^{-nm}x(n),$$

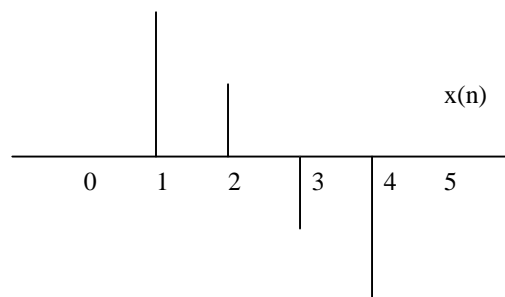
e se multiplicarem dois sinais discretos verifica-se a convolução circular das duas DFT.

Finalmente, as propriedades de simetria conhecidas devem ser interpretadas em termos da periodicidade subjacente à DFT.

O sinal discreto de comprimento 5



é par, e o sinal discreto, também de comprimento 5,



é ímpar, deste ponto de vista.

No caso geral, um sinal de comprimento N é par se

$$x(n) = x(N-n)$$

e é ímpar se

$$x(n) = -x(N-n).$$

5.5 Relação com a Transformada em z

A DFT de um sinal discreto com comprimento N é também uma amostragem da sua transformada em z , $X(z)$, em N pontos igualmente espaçados sobre a circunferência unitária do plano z

$$z_k = W_N^{-k}, \quad k = 0 \dots N-1.$$

A transformada em z , $X(z)$, pode ser recuperada dessa amostragem, $X(k)$.

Escrevendo

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk}, \quad n = 0 \dots N-1$$

obtem-se facilmente

$$X(z) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \sum_{n=0}^{N-1} (W_N^{-k} z^{-1})^n = \frac{1-z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{X(k)}{1-W_N^{-k} z^{-1}}$$

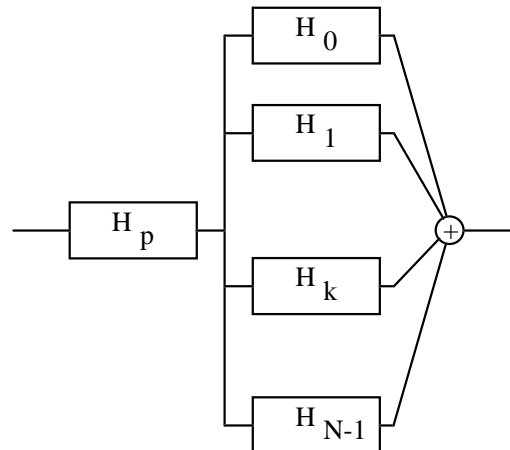
Esta expressão é a base de um método de projecto de filtros digitais designado por método da amostragem da função de transferência (FST - *Frequency Sampling Technique*).

Dada uma amostragem $H(k)$ de uma função de transferência $H(z)$, como

$$H(z) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) \sum_{n=0}^{N-1} (e^{j\frac{2\pi}{N}k} z^{-1})^n = \frac{1-z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}k} z^{-1}}$$

conclui-se que o sistema correspondente pode ser implementado pela associação em série de um sistema com função de transferência

$$H_p(z) = \frac{1-z^{-N}}{N}$$



com um sistema constituído pela associação em paralelo de N sistemas com função de transferência

$$H_k(z) = \frac{H(k)}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}k} z^{-1}}, \quad k = 0 \dots N-1.$$

5.6 Convolução Linear Utilizando a DFT

Os sistemas realizam a convolução linear, e a DFT a convolução circular. Cabe aos utilizadores utilizar a DFT em condições tais que as duas operações coincidam.

Se se pretender realizar a convolução linear de dois sinais discretos $x(n)$ e $h(n)$, de comprimentos L e M , respectivamente, o comprimento mínimo da DFT nas condições acima referidas é

$$L + M - 1.$$

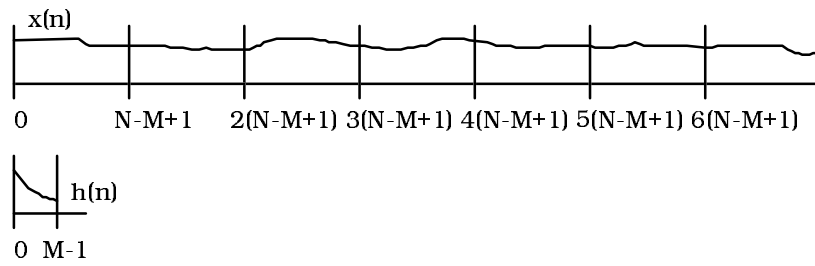
Um caso importante é aquele em que L é muito grande ou mesmo de valor indefinido (caso do processamento em tempo real), porque nesse caso não é possível realizar uma única DFT com este comprimento, e é necessário fraccionar $x(n)$.

5.6.1 Método *Overlap-Add*

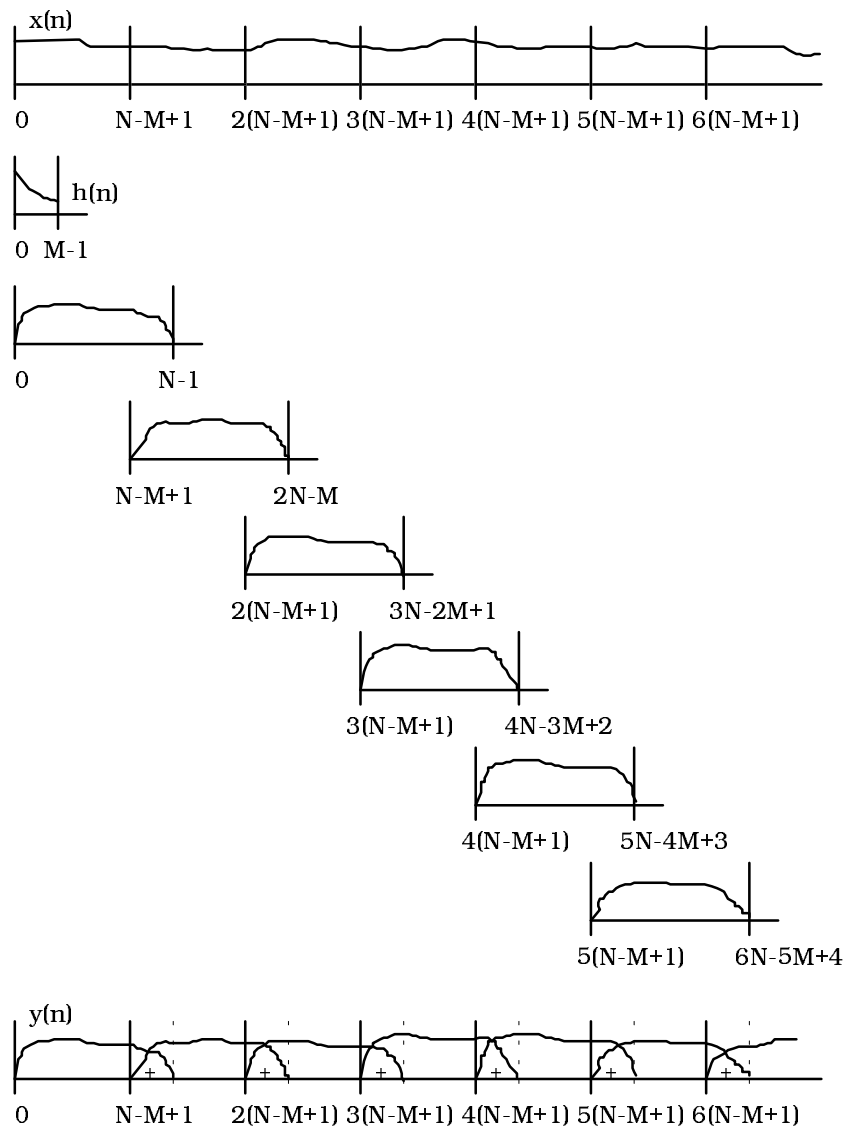
Um dos métodos que se pode utilizar é o método *overlap-add*, em que $x(n)$ é dividido em segmentos justapostos de comprimento

$$N - M + 1,$$

sendo N o comprimento da DFT utilizada,



e a convolução calculada segmento a segmento, adicionando-se os resultados.



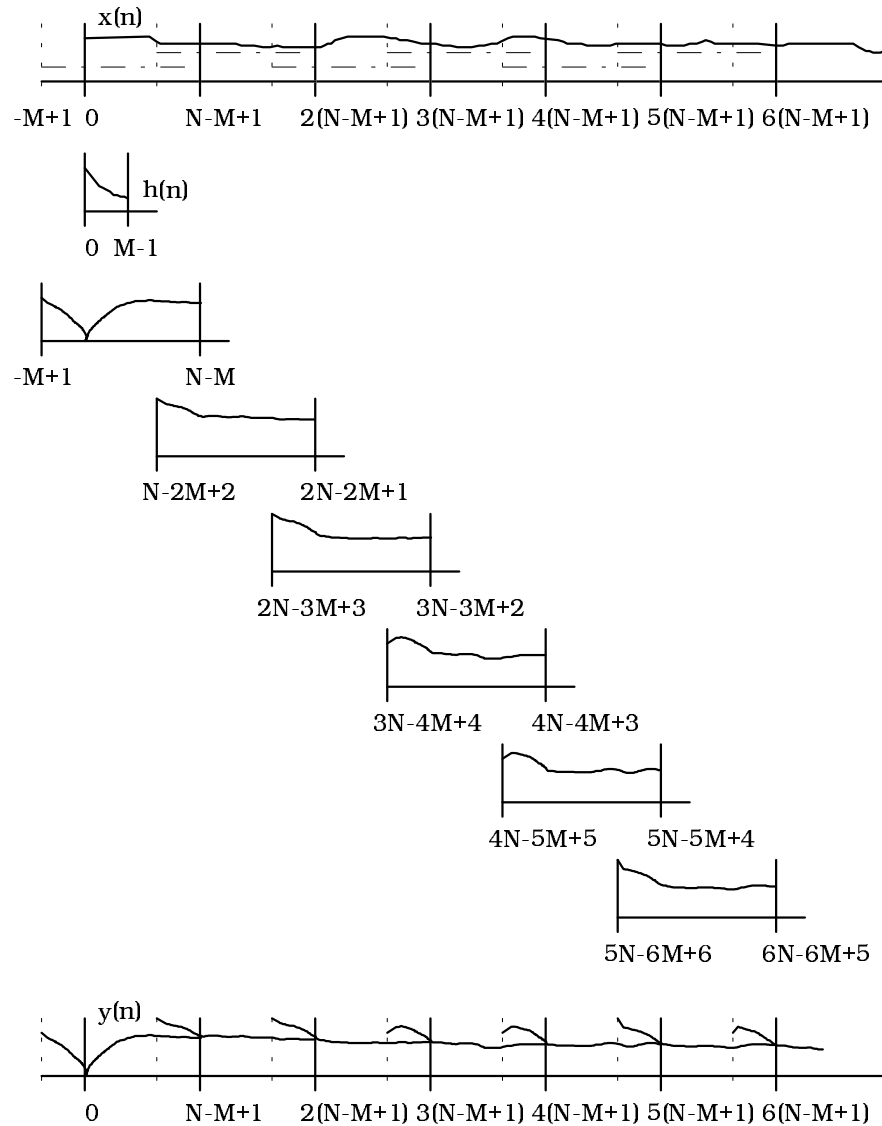
Como cada convolução parcial tem comprimento

$$N-M+1+M-1 = N,$$

os resultados parciais sobrepõem-se dois a dois em $M-1$ pontos, com o efeito de os resultados relativos aos últimos pontos de um segmento terem de aguardar pelos resultados relativos ao segmento seguinte para se realizar a adição.

5.6.2 Método *Overlap-Save*

Outro é o método *overlap-save*, em que, através da sobreposição dos segmentos de $x(n)$, de comprimento igual ao comprimento da DFT utilizada (repare-se no posicionamento do primeiro segmento, e nos $M-1$ zeros iniciais) se obtém resultados com *aliasing* nos primeiros $M-1$ elementos de cada segmento, mas cujas partes correctas se justapõem sem necessidade de qualquer adição suplementar.



A realização da convolução linear utilizando a DFT tem interesse porque existem algoritmos extremamente eficientes para o cálculo desta transformada.

5.7 FFT - Transformada Rápida de Fourier

A publicação por Cooley & Tukey, em 1965, do primeiro algoritmo para a computação rápida da DFT constituiu marco histórico para a evolução da disciplina de PDS, podendo a importância dos algoritmos FFT (*Fast Fourier Transform*) hoje avaliar-se pelo volume de bibliografia que desde então lhes tem sido dedicada.

Curiosamente, terá sido Gauss, o eminente matemático alemão Carl Friedrich Gauss, em 1805, o primeiro a descobrir um algoritmo similar à FFT, nos seus estudos de interpolação das órbitas de corpos celestes, precedendo mesmo a própria obra de Jean-Baptiste Joseph Fourier *Theorie Analytique de la Chaleur*, que foi publicada em 1822!

Outros ilustres matemáticos, como Runge, em 1903, Stumpff, em 1939, e Danielson e Lanczos, em 1942, descobriram métodos eficientes para o cálculo da DFT.

5.7.1 Decimação no Tempo

O algoritmo de C&T, ou de decimação no tempo, baseia-se no facto de resultar uma substancial redução no número das operações aritméticas requeridas para calcular uma DFT de comprimento N , par, se este cálculo se realizar em duas fases, uma primeira em que são calculadas duas DFT de comprimento $N/2$ e uma segunda em que estas são combinadas de modo a obter-se o resultado pretendido.

Seja $x(n)$ um sinal discreto de comprimento N , par, e sejam $g(n)$ e $h(n)$ dois sinais discretos de comprimento $N/2$ constituídos pelos elementos de ordem par e de ordem ímpar de $x(n)$, respectivamente

$$g(n) = x(2n)$$

$$h(n) = x(2n+1), n = 0 \dots N/2 - 1.$$

Então

$$X(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} g(n)W_N^{2nk} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n)W_N^{(2n+1)k}$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} g(n)W_{\frac{N}{2}}^{nk} + W_N^k \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n)W_{\frac{N}{2}}^{nk}$$

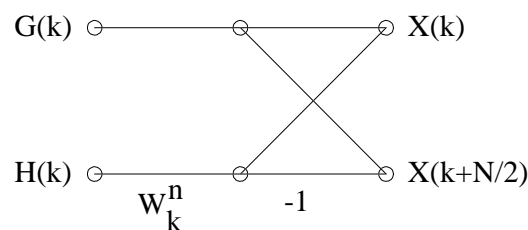
$$X(k) = G(k) + W_N^k H(k),$$

em que $G(k)$ e $H(k)$ são as DFT de comprimento $N/2$ de $g(n)$ e $h(n)$, respectivamente.

Atendendo à periodicidade de $G(k)$ e de $H(k)$,

$$X(k+N/2) = G(k) - W_N^k H(k),$$

resultando destas duas expressões que é possível obter dois elementos de $X(k)$ a partir de um elemento de $G(k)$ e de um elemento de $H(k)$, com uma única multiplicação e com duas adições complexas, e com uma apreciável redução no número das operações aritméticas requeridas



Por exemplo, se $N=1024$, o cálculo directo da DFT requiere

1024*1024 multiplicações

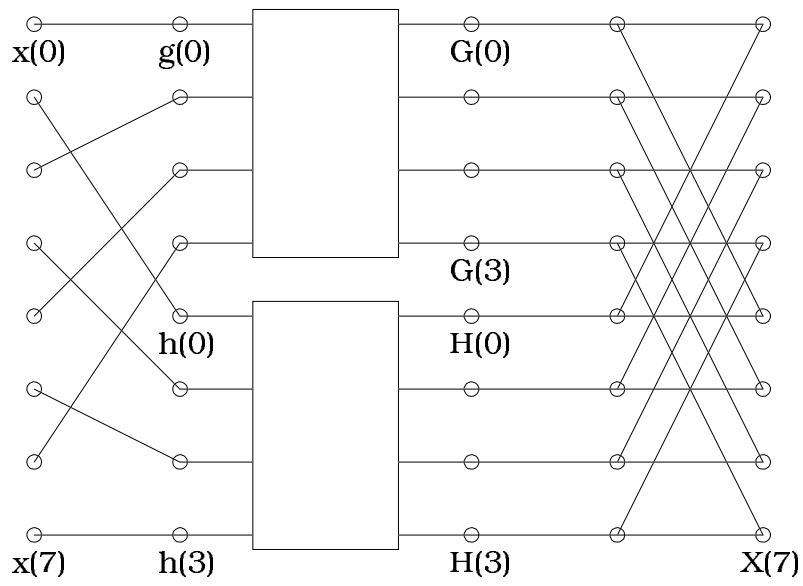
1024*1023 adições

enquanto que o cálculo pelo método descrito requiere

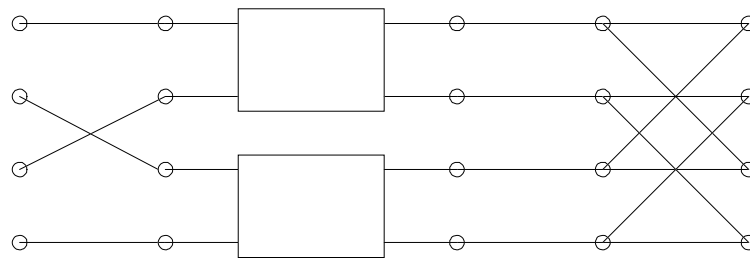
2*512*512+512 multiplicações

2*512*511+2*512 adições.

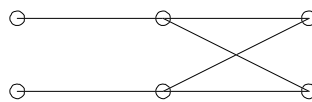
Se $N/2$ ainda for par, este método pode ser novamente aplicado ao cálculo de $G(k)$ e de $H(k)$, e assim sucessivamente até as DFT a calcular serem triviais, como a seguir se exemplifica com o cálculo de uma DFT de comprimento 8



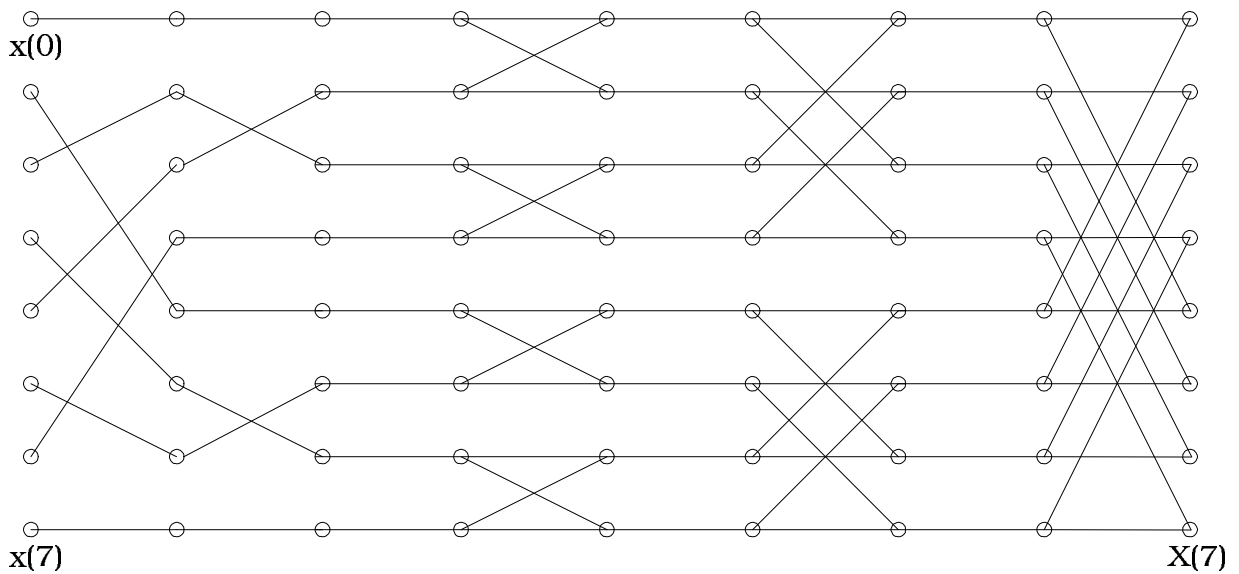
onde é necessário agora "encaixar" duas DFT de comprimento 4



e em cada uma destas duas de comprimento 2 (triviais)



com o resultado final



Este algoritmo pode considerar-se dividido em duas partes, uma primeira em que os elementos de $x(n)$ são arranjados segundo uma determinada ordem e uma segunda em que os cálculos são efectivamente realizados.

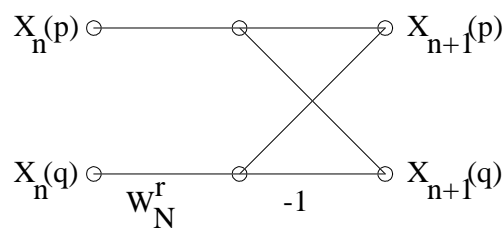
A reordenação inicial dos elementos de $x(n)$ é habitualmente designada por *bit-reverse*, uma vez que a posição que o elemento de ordem n vai ocupar se pode obter escrevendo n na base 2 com $\log_2 N$ bits e lendo o número binário obtido na ordem inversa dos bits, como aliás se deduz facilmente notando que um último bit 0 corresponde a um elemento de ordem par e um último bit 1 corresponde a um elemento de ordem ímpar.

A computação consiste na realização sistemática de um conjunto de cálculos habitualmente designados por *butterfly*, que correspondem às duas equações que inicialmente deduzimos

$$X(k) = G(k) + W_N^k H(k)$$

$$X(k+N/2) = G(k) - W_N^k H(k)$$

e que se podem representar no caso geral por um gráfico de fluência com forma que lembra uma borboleta ...



A estrutura do algoritmo aponta para a sua realização andar a andar, num total de $\log_2 N$ andares e de $N/2$ *butterflies* por andar.

O cálculo pode ser todo realizado *in place*, incluindo o *bit-reverse*, isto é, sobre uma única estrutura de dados, os quais vão sendo substituídos dois a dois pelos vários resultados intermédios e pelos resultados finais.

Normalmente utilizam-se três contadores, um contador de andar, que controla o progresso do cálculo da esquerda para a direita, um contador de grupo, resultante do facto de em cada andar as borboletas a realizar estarem agrupadas em conjuntos afins, e um contador de borboleta:

```

procedure FastFourierTransform;
begin
  BitReverse;
  Andar := 1;
  repeat
    Grupo := 0;
    repeat
      Borboleta := 0;
      repeat
        CalcularIndices;
        CalcularBorboleta;
        Borboleta := Borboleta + 1;
      until Borboleta = Andar;
      Grupo := Grupo + 1;
    until Grupo = ComprFFT div (2 * Andar);
    Andar := 2 * Andar;
  until Andar = ComprFFT;
end;

```

A operação *bit-reverse* pode ser realizada de diferentes modos. Habitualmente, recorre-se à implementação de um contador em *bit-reverse* em simultâneo com um contador em ordem natural, no exemplo as variáveis *j* e *i*, inicializados em $N/2$ e 1, tendo-se o cuidado de não trocar duas vezes os elementos do *array*:

```

procedure BitReverse;
begin
  j := ComprFFT div 2;
  for i := 1 to ComprFFT - 2 do
    begin
      if i <= j then
        begin
          t := x[j];
          x[j] := x[i];
          x[i] := t;
        end;
      k := ComprFFT div 2;
      while j >= k do
        begin
          j := j - k;
          k := k div 2;
        end;
      j := j + k;
    end;
  end;
end;

```

O cálculo de $i+1$ em *bit-reverse* dado i em *bit-reverse*, isto é, j , toma em consideração o que acontece, em termos de "carry", no cálculo em binário de $i+1$: começando pela direita, todos os "uns" até ao primeiro "zero" passam a "zero", e aquele "zero" passa a "um".

$$\begin{array}{cccccccccc}
 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & (863) \\
 & & & & & & & & & +1 & \\
 \hline
 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (864)
 \end{array}$$

Assim, $j+1$ calcula-se a partir de j subtraindo uma determinada potência de 2 por cada "um" que passou a "zero" e somando uma potência de 2 pelo "zero" que passou a "um".

$$\begin{array}{cccccccccc}
 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & (1003) \\
 -512 & -256 & -128 & -64 & -32 & +16 & & & & & \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & (27)
 \end{array}$$

Os índices necessários ao cálculo de uma borboleta são três, dois relativos aos dois elementos que intervêm na borboleta e um terceiro relativo ao factor W_N^r , e que pode ser um apontador para uma tabela de senos e cossenos:

```

procedure CalcularIndices;
begin
  IndUm := 2 * Andar * Grupo + Borboleta;
  IndDois := IndUm + Andar;
  IndTab := Borboleta * ComprFFT div (2 * Andar);
end;

```

Uma borboleta realiza-se com três operações com números complexos e com o recurso a uma variável temporária:

```

procedure CalcularBorboleta;
begin
  Mult(x[IndDois], w[IndTab], t);
  Sub(x[IndUm], t, x[IndDois]);
  Add(t, x[IndUm], x[IndUm]);
end;

```

O número total de multiplicações e de adições complexas requerido pelo algoritmo para a realização de uma DFT de comprimento **1024** é

n.and.	n.but.	mult./but.	ad./but.	tot.mult.	tot.ad.
10	512	1	2	5120	10240

5.7.2 Decimação na Frequência

Outro algoritmo, proposto por Sande & Tukey, e conhecido por decimação na frequência, segue nas suas linhas gerais este que acabamos de descrever.

Consideremos a DFT de um sinal discreto com comprimento N , par,

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk}$$

Os termos de ordem par desta DFT

$$X(2k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{2nk}, \quad k = 0 \dots \frac{N}{2} - 1$$

$$X(2k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(n)W_N^{2nk} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(n + \frac{N}{2})W_N^{2nk}, \quad k = 0 \dots \frac{N}{2} - 1$$

$$X(2k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} (x(n) + x(n + \frac{N}{2}))W_{\frac{N}{2}}^{nk}, \quad k = 0 \dots \frac{N}{2} - 1$$

podem ser calculados como a DFT $G(k)$ do sinal discreto com comprimento $N/2$

$$g(n) = x(n) + x(n + N/2), \quad n = 0 \dots N/2 - 1,$$

e os termos de ordem ímpar

$$X(2k+1) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{2nk+n}, \quad k = 0 \dots \frac{N}{2} - 1$$

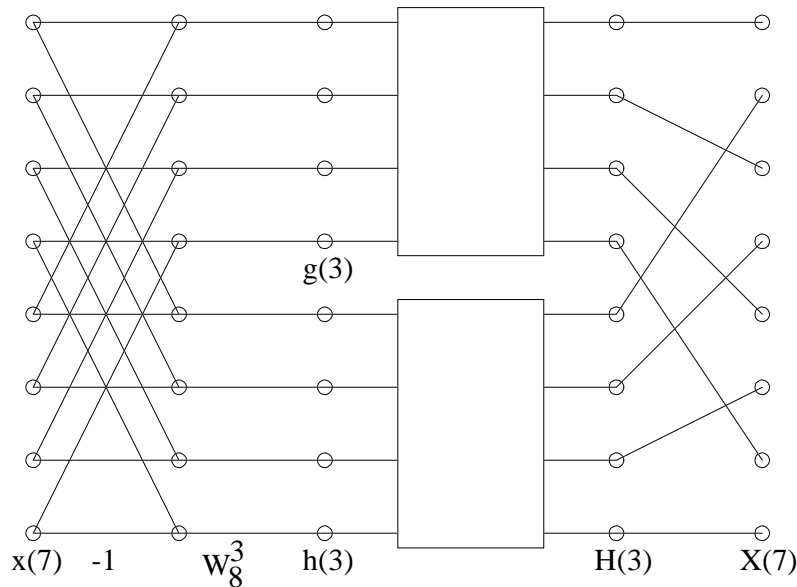
$$X(2k + 1) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(n)W_N^n W_N^{2nk} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(n + \frac{N}{2})W_N^{n+\frac{N}{2}} W_N^{2nk}, k = 0 .. \frac{N}{2} - 1$$

$$X(2k + 1) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} (x(n) - x(n + \frac{N}{2}))W_N^n W_N^{nk}, k = 0 .. \frac{N}{2} - 1$$

podem ser calculados como a DFT H(k) do sinal discreto com comprimento N/2

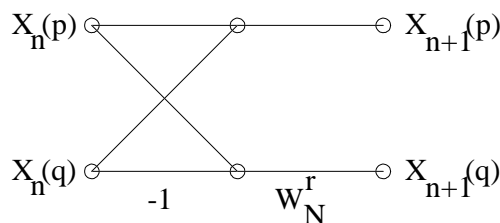
$$h(n) = (x(n) - x(n + N / 2))W_N^n, n = 0 .. N / 2 - 1 ,$$

resultando destas duas expressões que é possível obter dois elementos de X(k) a partir de um elemento de G(k) e de um elemento de H(k), com uma única multiplicação e com duas adições complexas, e com uma apreciável redução no número das operações aritméticas requeridas



Se N/2 ainda for par, este método pode ser novamente aplicado ao cálculo de G(k) e de H(k), e assim sucessivamente até as DFT a calcular serem triviais.

A estrutura do algoritmo aponta para a sua realização andar a andar, num total de log₂N andares e de N/2 butterflies por andar, cada uma das quais do tipo



Os dois algoritmos que acabamos de referir admitem muitas variações, as quais têm em comum o facto de não ser possível uma realização *in place* sem uma operação de *bit-reverse*, ou sobre o sinal de entrada ou sobre o sinal de saída.

5.7.3 Raiz 4

Os algoritmos que estudámos dizem-se de raiz 2, por se basearem na decomposição do sinal de entrada em dois, com metade do comprimento cada.

Algoritmos equivalentes raiz 4, que se baseiam na decomposição do sinal de entrada em quatro, com um quarto do comprimento cada, são mais favoráveis do ponto de vista do número de multiplicações requeridas.

Refere-se apenas o caso da decimação no tempo.

Se o sinal discreto $x(n)$ tiver comprimento N múltiplo de 4, é possível formar os sinais com comprimento $N/4$

$$x_i(n) = x(4n + i), \quad n = 0 \dots N/4 - 1, \quad i = 0 \dots 3$$

de tal modo que

$$X(k) = \sum_{i=0}^3 \sum_{n=0}^{N/4-1} x_i(n) W_N^{(4n+i)k}$$

$$X(k) = \sum_{i=0}^3 W_N^{ik} \sum_{n=0}^{N/4-1} x_i(n) W_N^{4nk}$$

$$X(k) = \sum_{i=0}^3 W_N^{ik} X_i(k)$$

donde resulta a *butterfly* raiz 4, decimação no tempo,

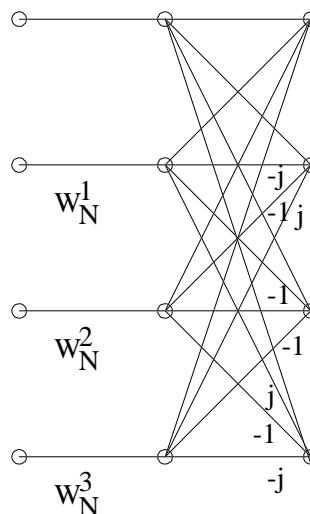
$$X(k) = X_0(k) + W_N^k X_1(k) + W_N^{2k} X_2(k) + W_N^{3k} X_3(k)$$

$$X(k+N/4) = X_0(k) - jW_N^k X_1(k) - W_N^{2k} X_2(k) + jW_N^{3k} X_3(k)$$

$$X(k+2N/4) = X_0(k) - W_N^k X_1(k) + W_N^{2k} X_2(k) - W_N^{3k} X_3(k)$$

$$X(k+3N/4) = X_0(k) + jW_N^k X_1(k) - W_N^{2k} X_2(k) - jW_N^{3k} X_3(k)$$

que se calcula com 3 multiplicações e 12 "adições" complexas (com as multiplicações por j imbuídas nas adições).



Comparando os dois algoritmos para $N = 1024$, por exemplo,

	n.and.	n.but.	mult./but.	ad./but.	tot.mult.	tot.ad.
raiz 2	10	512	1	2	5120	10240
raiz 4	5	256	3	12	3840	15360

Nos casos em que o tempo necessário para o cálculo de uma multiplicação é muito superior ao tempo necessário para o cálculo de uma soma, os algoritmos raiz 4 são mais interessantes que os raiz 2.

5.7.4 Raiz Dupla

Algoritmos designados *split radix* ou raiz dupla, são ainda mais favoráveis do ponto de vista do número de multiplicações, e baseiam-se no uso simultâneo das raízes 2 e 4.

Refere-se mais uma vez apenas o caso da decimação no tempo.

Se o sinal discreto $x(n)$ tiver comprimento N múltiplo de 4, é possível escrever

$$X(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n)W_N^{2nk} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1} x(4n+1)W_N^{(4n+1)k} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1} x(4n+3)W_N^{(4n+3)k}$$

e, designando por $G(k)$, $H_0(k)$ e $H_1(k)$, respectivamente, as DFT de comprimento $N/2$, $N/4$ e $N/4$ de $x(2n)$, $x(4n+1)$ e $x(4n+3)$,

$$X(k) = G(k) + W_N^k H_0(k) + W_N^{3k} H_1(k).$$

Atendendo à periodicidade destas DFT

$$X(k + N/4) = G(k + N/4) - jW_N^k H_0(k) + jW_N^{3k} H_1(k)$$

$$X(k + N/2) = G(k) - W_N^k H_0(k) - W_N^{3k} H_1(k)$$

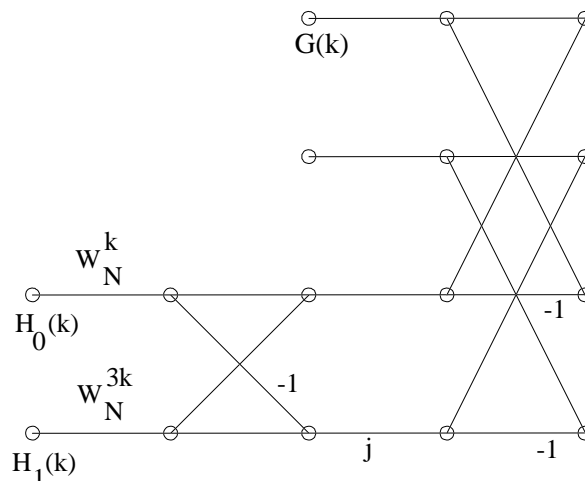
$$X(k + 3N/4) = G(k + N/4) + jW_N^k H_0(k) - jW_N^{3k} H_1(k)$$

o que quer dizer que é possível calcular quatro valores de uma DFT de comprimento N a partir de dois valores de uma DFT de comprimento $N/2$ e de um valor de cada uma de duas DFT de comprimento $N/4$.

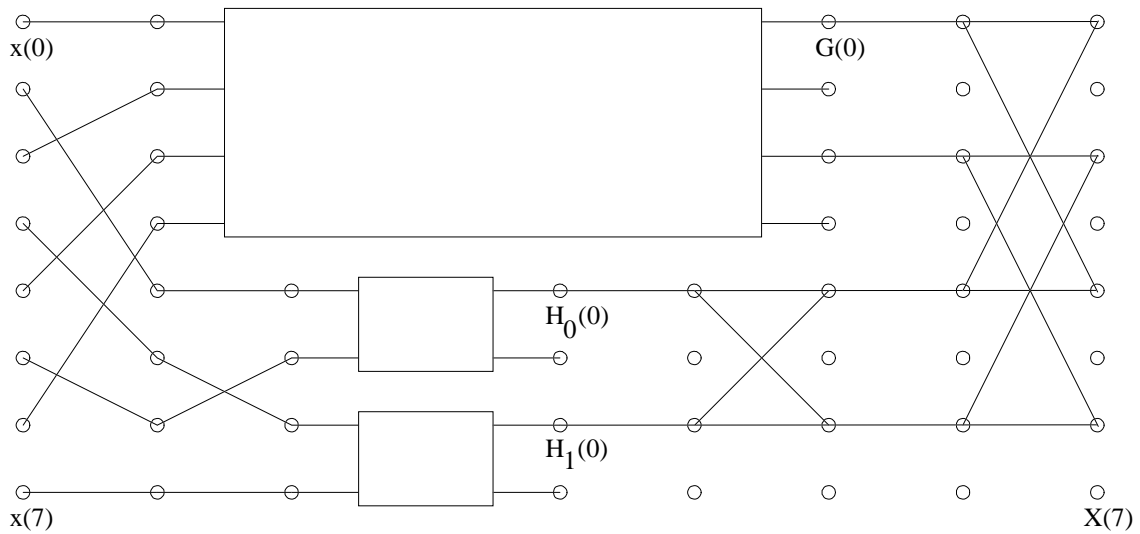
A *butterfly* respectiva requiere duas multiplicações e seis adições complexas, desde que se calcule em primeiro lugar

$$W_N^k H_0(k) + W_N^{3k} H_1(k)$$

$$W_N^k H_0(k) - W_N^{3k} H_1(k) ,$$



Para N=8, temos a situação seguinte, em que se representa apenas o cálculo de X(0), X(2), X(4) e X(6), para melhor visibilidade



A DFT de comprimento 4 pode ser calculada pelo mesmo método, isto é, a partir de uma DFT de comprimento 2 e de duas de comprimento 1, o que quer dizer que no total teríamos 3 *butterflies* de raiz dupla, isto é, 6 multiplicações e 18 adições, e três *butterflies* de raiz 2.

Comparando, para N=8,

	n.but.	mult./but.	ad./but.	tot.mult.	tot.ad.
raiz 2	12	1	2	12	24
raiz 4	2+4	3/1	12/2	10	32
raiz dupla	3+3	2/1	6/2	9	24

Se observarmos que uma DFT de comprimento $N=2^n$ pode ser substituída por uma DFT de comprimento 2^{n-1} , duas DFT de comprimento 2^{n-2} e 2^{n-2} *butterflies* de raiz dupla, é simples concluir que, para o algoritmo completo, o número total de *butterflies* de raiz dupla a realizar é dado pela relação recursiva

$$b(2) = 1$$

$$b(3) = 2$$

$$b(n) = b(n-1) + 2b(n-2) + 2^{n-2}, n \geq 4$$

e que o número total de DFT de comprimento 2 a realizar é dado pela relação recursiva

$$d(1) = 1$$

$$d(2) = 1$$

$$d(n) = d(n-1) + 2d(n-2), n \geq 3$$

Resolvendo estas relações, encontra-se

$$b(n) = \frac{(3n-2)2^{n-1} + (-1)^n}{9}, n \geq 4$$

$$d(n) = \frac{2^n - (-1)^n}{3}, n \geq 3$$

donde resulta que o número total de multiplicações complexas a realizar é

$$m(n) = 2b(n) = \frac{n2^n}{3} - \frac{2(2^{n-1} - (-1)^n)}{9}, n \geq 4$$

tendendo para 2/3 do número de multiplicações correspondente aos algoritmos de raiz 2 quando n cresce, e que o número de adições complexas a realizar é

$$a(n) = 6b(n) + 2d(n) = n2^n, n \geq 4,$$

isto é, exactamente o número de adições correspondente aos algoritmos de raiz 2.

Para n=1024, ter-se-ia

	n.but.	mult./but.	ad./but.	tot.mult.	tot.ad.
raiz 2	5120	1	2	5120	10240
raiz 4	1280	3	12	3840	15360
raiz dupla	1593+341	2/0 ^(a)	6/2	3186	10240

^(a) são DFT de comprimento 2

5.8 Transformada de Fourier Discreta Inversa

As expressões da transformada de Fourier discreta e da transformada de Fourier discreta inversa diferem apenas de um factor N^{-1} e de um sinal no expoente nk.

Um programa para o cálculo da DFT pode ser usado com simples adaptações no cálculo da iDFT.

Uma possibilidade consiste em notar que

$$x((-n)) = N^{-1} \text{DFT}[X(k)],$$

e que x(n) se obtém de x((-n)) de modo "circular".

Assim, a iDFT pode ser calculada utilizando o programa de cálculo da DFT com os coeficientes X(k), dividindo os resultados obtidos por N, e reordenando-os trocando de posições os elementos de ordem n e N-n, para n = 1 .. N/2-1.

Alternativamente,

$$x(n) = N^{-1} (\text{DFT}[X^*(k)])^*,$$

como se conclui de

$$N^{-1} (\text{DFT}[X^*(k)])^* = N^{-1} \left(\sum_{k=0}^{N-1} X^*(k) W_N^{nk} \right)^*$$

$$N^{-1} (\text{DFT}[X^*(k)])^* = N^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk}.$$

Este segundo método, que consiste em utilizar o programa de cálculo da DFT com os conjugados dos coeficientes X(k), dividir os resultados obtidos por N e calcular os seus conjugados, dispensa a reordenação exigida pelo método anterior.

Finalmente, pode utilizar-se a relação

$$x_I(n) + jx_R(n) = N^{-1} \text{DFT}[X_I(k) + jX_R(k)],$$

como resulta de

$$N^{-1} \text{DFT}[X_I(k) + jX_R(k)] = N^{-1} \text{DFT}[jX^*(k)]$$

$$N^{-1} \text{DFT}[X_I(k) + jX_R(k)] = jN^{-1} \left(\sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk} \right)^*$$

$$N^{-1}\text{DFT}[X_I(k) + jX_R(k)] = j\tilde{x} * (n) .$$

Este último método é particularmente interessante quando a entrada e a saída das partes real e imaginária dos dados e resultados se faz separadamente.

Basta utilizar o programa de cálculo da DFT com os coeficientes $X(k)$ com as suas partes real e imaginária trocadas, dividir os resultados obtidos por N , e trocar as suas partes real e imaginária.

5.9 Transformada de Fourier Discreta de Sinais Reais

A transformada de Fourier discreta de um sinal discreto real tem parte real par e parte imaginária ímpar, o que quer dizer que a utilização directa de um programa para o cálculo da DFT neste caso conduz a um duplo cálculo dos mesmos valores.

Sejam $g(n)$ e $h(n)$ dois sinais discretos reais de comprimento N .

Construindo o sinal discreto

$$x(n) = g(n) + jh(n)$$

e calculando a sua DFT

$$X(k) = X_R(k) + jX_I(k) = G(k) + jH(k) ,$$

é simples concluir que

$$G(k) = \frac{X_R(k) + X_R((-k)) + j(X_I(k) - X_I((-k)))}{2}$$

$$H(k) = \frac{X_I(k) + X_I((-k)) - j(X_R(k) - X_R((-k)))}{2} ,$$

o que mostra que é possível calcular simultaneamente as DFT de dois sinais reais com comprimento N , considerando um como a parte real e outro como a parte imaginária de um sinal complexo, e utilizando as simetrias das DFT pretendidas.

Quando se pretende calcular apenas a DFT de um sinal discreto real $x(n)$ com comprimento N , é possível utilizar uma só vez um programa para o cálculo de uma DFT de comprimento $N/2$.

Para isso, basta construir os sinais discretos reais de comprimento $N/2$

$$g(n) = x(2n)$$

$$h(n) = x(2n+1) ,$$

calcular simultaneamente as suas DFT como se viu atrás

$$w(n) = g(n) + jh(n)$$

$$G(k) = \frac{W_R(k) + W_R((-k)) + j(W_I(k) - W_I((-k)))}{2}$$

$$H(k) = \frac{W_I(k) + W_I((-k)) - j(W_R(k) - W_R((-k)))}{2} ,$$

e recuperar $X(k)$ como se se tratasse do último andar do algoritmo C&T que estudamos

$$X(k) = G(k) + W_N^k H(k)$$

$$X(k+N/2) = G(k) - W_N^k H(k) .$$

O cálculo da DFT de dois sinais reais de comprimento N , pelo primeiro método, requiere, para além do cálculo de uma DFT de comprimento N , $4N$ adições e $2N$ multiplicações por $1/2$.

O cálculo da DFT de um sinal real de comprimento N , pelo segundo método, requiere, para além do cálculo de uma DFT de comprimento $N/2$, $4xN/2$ adições e $2xN/2$ multiplicações por $1/2$, e ainda $N/2$ borboletas.

Em ambos os casos, poder-se-ia ainda tirar partido de certas simetrias dos resultados.

Comparando, para N=1024, e em termos de operações reais

	tot.mult.	tot.ad.
1º mét.	(5120x4+2x1024)/2=11264	(10240x2+5120x2+4x1024)/2=17408
2º mét.	2304x4+2x512+256x4=11264	4608x2+2304x2+4x256+256x2=15360

5.10 CZT - Chirp Z Transform.

O interesse da DFT, quer no domínio da análise espectral do sinal quer no cálculo da convolução, advém em grande parte da existência de algoritmos rápidos para a sua computação.

A DFT e os algoritmos FFT clássicos não dão resposta contudo a alguns problemas práticos, um dos quais é resolvido pela CZT.

Na DFT, dois valores consecutivos de X(k) referem-se a frequências espaçadas de Ω_a/N , em que Ω_a é a frequência angular de amostragem. Se se pretender diminuir este espaçamento, será assim necessário aumentar proporcionalmente o comprimento N da transformada, normalmente à custa da extensão com zeros do sinal x(n), mesmo que se pretenda este aumento de resolução da transformada apenas numa pequena gama de frequências (zoom da DFT).

Imaginemos que pretendíamos calcular o valor de M amostras da transformada em z, X(z), de um sinal discreto x(n) com comprimento N, em M pontos

$$z_k = AW^{-k}, k = 0, \dots, M-1,$$

em que A e W são dois complexos

$$A = A_0 e^{j\theta}$$

$$W = W_0 e^{j\phi}.$$

Nestas condições, o ponto z_0 está em A e os restantes estão separados angularmente de ϕ e dispostos sobre uma espiral de raio crescente ou decrescente conforme $|W_0|$ é maior ou menor que um (pode ser um arco da circunferencia unitária, por exemplo).

Substituindo em

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)z^{-n}$$

obtem-se

$$X(z_k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)(AW^{-k})^{-n}$$

e tendo em conta que

$$2nk = -(n-k)^2 + n^2 + k^2,$$

$$X(z_k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)A^{-n} W^{\frac{n^2}{2}} W^{-\frac{(n-k)^2}{2}} W^{\frac{k^2}{2}},$$

que podemos interpretar como um conjunto de três operações sucessivas

multiplicação termo a termo de x(n) por $A^{-n} W^{\frac{n^2}{2}}$

$$f(n) = A^{-n} W^{\frac{n^2}{2}} x(n) ,$$

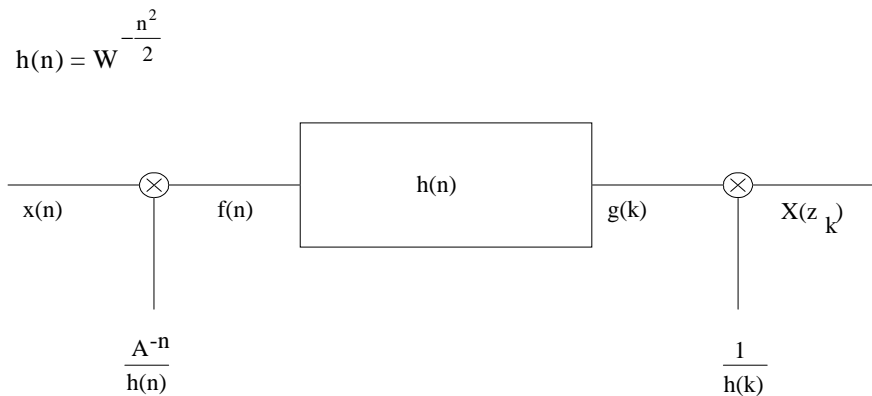
convolução do resultado obtido $f(n)$ com $W^{-\frac{n^2}{2}}$

$$g(n) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) W^{-(n-k)^2} ,$$

ou, trocando os índices n e k ,

$$g(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) W^{-(n-k)^2} ,$$

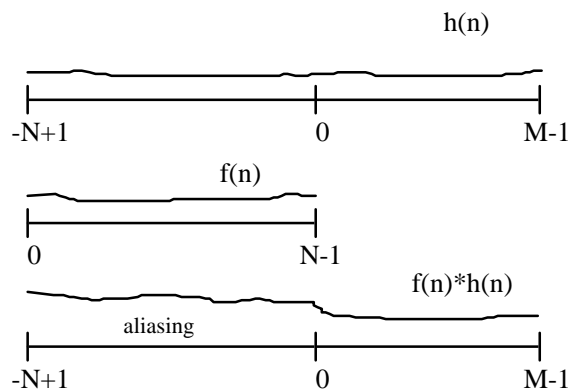
e finalmente multiplicação termo a termo do resultado obtido $g(k)$ por $W^{\frac{k^2}{2}}$, como se ilustra na figura a seguir, em que



Os valores $X(z_k)$ obtêm-se na saída deste sistema, podendo a convolução envolvida ser calculada recorrendo à propriedade da convolução da DFT.

Neste caso, é necessário atender cuidadosamente não só ao facto de esta propriedade ser circular mas também ao facto de $h(n)$ ser um sinal discreto definido entre $-\infty$ e $+\infty$.

As DFT devem ser de comprimento $N+M-1$ e os sinais alinhados de modo tal que os M valores pretendidos da convolução estejam isentos de *aliasing* (como no método *overlap-save* anteriormente estudado)



Uma das possíveis aplicações da CZT diz respeito ao estudo da transformada em z , $X(z)$, ao longo de uma linha traçada no plano z , por exemplo um arco da circunferência unitária (*zoom* da DFT) ou uma linha na vizinhança de um polo de $X(z)$.

Com a emergência de microprocessadores de sinal especializados na convolução, a CZT está a encontrar uma nova aplicação que é o cálculo da DFT com base na convolução, o que se consegue fazendo

$$z_k = e^{-j\frac{2k\pi}{N}}, k = 0 \dots N-1 .$$

6. Filtros Digitais

6.1 Introdução

Os filtros digitais são um dos grandes campos de aplicação de Processamento Digital de Sinal.

Projectar um filtro digital é determinar um algoritmo que satisfaça as especificações pretendidas; realizar um filtro digital é implementar esse algoritmo, seja em *software* ou em *hardware*, atendendo às implicações do uso de precisão finita na representação dos coeficientes e dos sinais de entrada e de saída e na realização das operações aritméticas respectivas.

Os filtros digitais do tipo FIR

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)x(n-k)$$

não têm contrapartida no mundo analógico, na medida em que implementam directamente um sistema discreto a partir da sua resposta impulsional $h(n)$, finita.

Estes filtros podem ser realizados com fase exactamente linear, correspondente a um atraso fixo da saída relativamente à entrada, permitindo que no seu projecto a atenção do projectista se concentre na resposta em amplitude, e, além disso, são garantidamente estáveis quando implementados não recursivamente.

Os filtros digitais do tipo FIR são também muito usados na realização de sistemas adaptativos.

Os filtros digitais do tipo IIR

$$y(n) = \sum_{k=1}^{N-1} b_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{N-1} a_k x(n-k)$$

podem ser facilmente relacionados com filtros analógicos e são normalmente menos exigentes em termos do número de operações necessárias para realizar uma determinada resposta em frequência.

Há contudo situações, como por exemplo a decimação e a interpolação, em que esta vantagem é apenas aparente.

Os parâmetros do projecto de um filtro digital são normalmente os limites das bandas de passagem e de rejeição e o *ripple* máximo admitido em cada uma destas bandas.

6.2 Projecto de Filtros Digitais do Tipo FIR.

Uma das grandes vantagens dos filtros digitais do tipo FIR é a possibilidade de serem realizados com fase exactamente linear.

Pode demonstrar-se que a condição necessária e suficiente para um filtro FIR ser de fase linear é

$$h(n) = \begin{cases} \pm h(N-1-n), & \text{se } 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{se não.} \end{cases}$$

6.2.1 Classificação.

Os filtros digitais do tipo FIR costumam ser classificados de acordo com o sinal desta simetria e com o facto do seu comprimento ser par ou ímpar:

	Comprimento ímpar	Comprimento par
Simetria +	Tipo I	Tipo II
Simetria -	Tipo III	Tipo IV

6.2.1.1 Tipo I.

Quando a simetria é positiva e N é ímpar,

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n}$$

pode escrever-se, agrupando os termos iguais de $h(n)$,

$$H(e^{j\omega}) = h\left(\frac{N-1}{2}\right)e^{-j\omega\frac{N-1}{2}} + \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(n)(e^{-j\omega n} + e^{-j\omega(N-1-n)})$$

donde, como

$$e^{-j\omega n} + e^{-j\omega(N-1-n)} = 2 \cos\left(\omega\left(\frac{N-1}{2} - n\right)\right) e^{-j\omega\frac{N-1}{2}},$$

$$H(e^{j\omega}) = A(\omega)e^{-j\omega\frac{N-1}{2}},$$

com

$$A(\omega) = h\left(\frac{N-1}{2}\right) + 2 \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(n) \cos\left(\omega\left(\frac{N-1}{2} - n\right)\right)$$

ou, de uma forma ainda mais compacta,

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} a(n) \cos(\omega n) e^{-j\omega\frac{N-1}{2}}$$

com

$$a(0) = h\left(\frac{N-1}{2}\right)$$

$$a(n) = 2h\left(\frac{N-1}{2} - n\right), \text{ se } 1 \leq n \leq \frac{N-1}{2},$$

isto é, a amplitude da resposta em frequência é uma soma de cossenos, com termo contínuo.

6.2.1.2 Tipo II.

Quando a simetria é positiva e N é par

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n)(e^{-j\omega n} + e^{-j\omega(N-1-n)})$$

e então

$$H(e^{j\omega}) = A(\omega)e^{-j\omega\frac{N-1}{2}},$$

com

$$A(\omega) = 2 \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} h(n) \cos(\omega(\frac{N-1}{2} - n))$$

ou, de uma forma mais compacta,

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} b(n) \cos(\omega(n - \frac{1}{2}))e^{-j\omega\frac{N-1}{2}}$$

com

$$b(n) = 2h(\frac{N}{2} - n), \text{ se } 1 \leq n \leq \frac{N}{2}.$$

Note-se que

$$\omega = \pi \Rightarrow H(e^{j\omega}) = 0,$$

pele que este tipo de filtro FIR não pode ser utilizado como passa alto, por exemplo.

6.2.1.3 Tipo III.

Quando a simetria é negativa e N é ímpar, o que implica que

$$h(\frac{N-1}{2}) = 0,$$

como

$$e^{-j\omega n} - e^{-j\omega(N-1-n)} = 2j \operatorname{sen}(\omega(\frac{N-1}{2} - n))e^{-j\omega\frac{N-1}{2}},$$

$$H(e^{j\omega}) = jB(\omega)e^{-j\omega\frac{N-1}{2}},$$

com

$$B(\omega) = 2 \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(n) \operatorname{sen}(\omega(\frac{N-1}{2} - n))$$

ou, de uma forma ainda mais compacta,

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} c(n) \operatorname{sen}(\omega n) e^{j(\frac{\pi}{2} - \omega\frac{N-1}{2})}$$

com

$$c(n) = 2h(\frac{N-1}{2} - n), \text{ se } 1 \leq n \leq \frac{N-1}{2}.$$

Note-se que

$$\omega = 0 \text{ ou } \omega = \pi \Rightarrow H(e^{j\omega}) = 0,$$

pelo que este tipo de filtro FIR é adequado para a realização de diferenciadores digitais ou de filtros de Hilbert.

6.2.1.4 Tipo IV.

Quando a simetria é negativa e N é par,

$$H(e^{j\omega}) = jB(\omega)e^{-j\omega\frac{N-1}{2}},$$

com

$$B(\omega) = 2 \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n) \text{sen}\left(\omega\left(\frac{N-1}{2} - n\right)\right)$$

ou, de uma forma ainda mais compacta,

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} d(n) \text{sen}\left(\omega\left(n - \frac{1}{2}\right)\right) e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \omega\frac{N-1}{2}\right)}$$

com

$$d(n) = 2h\left(\frac{N}{2} - n\right), \text{ se } 1 \leq n \leq \frac{N}{2}.$$

Como

$$\omega = 0 \Rightarrow H(e^{j\omega}) = 0,$$

este tipo de filtros tem também particular interesse para a realização de diferenciadores digitais ou de filtros de Hilbert.

6.2.2 Relações entre os Zeros dos Filtros FIR com Fase Linear.

Sabemos que se os coeficientes de um sistema discreto forem reais, os seus polos e zeros complexos ocorrem sempre em conjunto com os respectivos conjugados.

Se o sistema for de fase linear verifica-se uma outra propriedade: se z_k for um zero do sistema, z_k^{-1} também o é.

Na realidade, se

$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n) z_k^{-n} = 0$$

então

$$\pm \sum_{n=0}^{N-1} h(N-1-n) z_k^{-n} = 0$$

e, pela mudança de variável

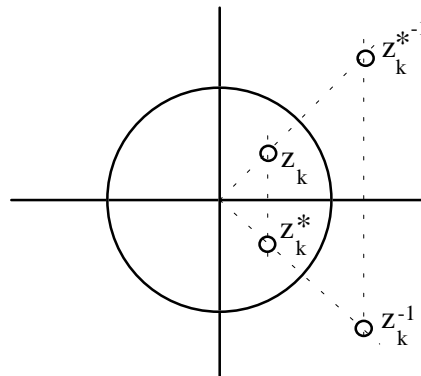
$$n \Rightarrow N-1-n,$$

$$\pm \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z_k^{-(N-1-n)} = 0$$

ou seja, o que demonstra a afirmação,

$$\pm z^{-N+1} \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z_k^n = 0 .$$

Os zeros de um filtro do tipo FIR com fase linear ocorrem normalmente em grupos de quatro, z_k, z_k^*, z_k^{-1} e z_k^{*-1} , que podem ser de dois ou de um em certos casos particulares.



Na realização de um filtro deste tipo pela associação em série de sistemas de pequena ordem, estes grupos de zeros devem naturalmente ser incluídos no mesmo sistema, a fim de se poder tirar partido da simetria dos coeficientes.

6.2.3 Métodos de Projecto.

Os métodos básicos para o projecto de filtros digitais do tipo FIR são

- método da janela
- método da amostragem da função de transferência
- projecto óptimo (algoritmo de Remez).

6.2.3.1 Método da Janela.

A partir da especificação de uma determinada resposta em frequência $H_d(e^{j\omega})$, real e par, é possível determinar a resposta impulsional $h_d(n)$ de um sistema discreto com essa resposta em frequência

$$h_n(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{-ej\omega})e^{j\omega n} d\omega .$$

Esta resposta impulsional é normalmente de comprimento infinito, real e par, e torna-se necessário truncá-la, utilizando uma janela $w(n)$, isto é, um sinal discreto de comprimento limitado, N , obedecendo às condições, supondo N ímpar,

$$w(n) = w(-n)$$

$$n < -\frac{N-1}{2} \text{ ou } n > \frac{N-1}{2} \Rightarrow w(n) = 0 ,$$

isto é, tal que

$$h(n) = w(n)h_d(n)$$

tem comprimento finito.

A resposta em frequência $H(e^{j\omega})$ do sistema resultante é dada pela convolução da transformada de Fourier de $w(n)$ com $H_d(e^{j\omega})$

$$H(e^{j\omega}) = W(e^{j\omega}) * H_d(e^{j\omega}) .$$

A janela mais óbvia, a janela rectangular

$$w_R(n) = u\left(n + \frac{N-1}{2}\right) - u\left(n - \frac{N+1}{2}\right),$$

tem o inconveniente de introduzir um grande *overshoot* nas discontinuidades de $H_d(e^{j\omega})$, problema geralmente conhecido como fenómeno de Gibbs, usando-se normalmente outras janelas, tais como a janela de Hanning

$$w_N(n) = \left(0.5 + 0.5\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)\right)w_R(n),$$

a janela de Hamming

$$w_M(n) = \left(0.54 + 0.46\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)\right)w_R(n),$$

as janelas de Kaiser, de Dolph-Chebyshev, de Blackman, etc..

Eventualmente, pode ainda ser necessário tornar o sistema resultante causal, o que se pode realizar através da introdução de um atraso $\frac{N-1}{2}$.

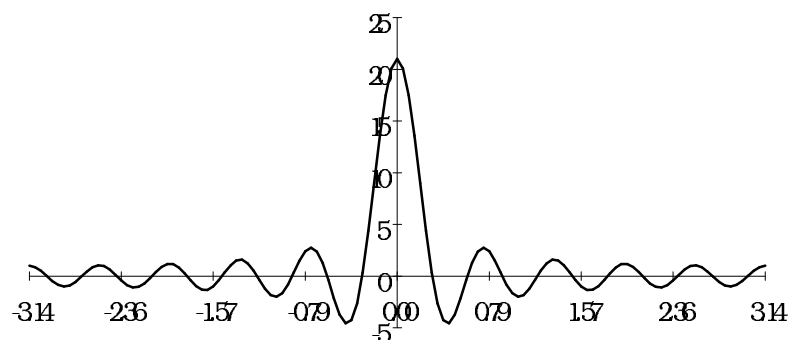
6.2.3.1.1 Janela Rectangular.

A transformada de Fourier da janela rectangular é

$$H_R(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} e^{-j\omega n} = \frac{1 - e^{-j\omega N}}{1 - e^{-j\omega}} e^{j\omega \frac{N-1}{2}}$$

$$H_R(e^{j\omega}) = \frac{\text{sen}\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

que se exemplifica a seguir, para $N = 21$.



O lobo principal, entre $-2\pi/N$ e $2\pi/N$, manifesta-se essencialmente nas bandas de transição do filtro que está a ser projectado, efeito que pode ser contornado por uma escolha conveniente do comprimento N .

O conjunto de lobos de menor amplitude e largura $2\pi/N$ manifesta-se, quer nas bandas de passagem quer nas bandas de bloqueio, pela introdução de um *ripple*, cuja amplitude não depende do comprimento do filtro!

6.2.3.1.2 Janela de Hamming generalizada.

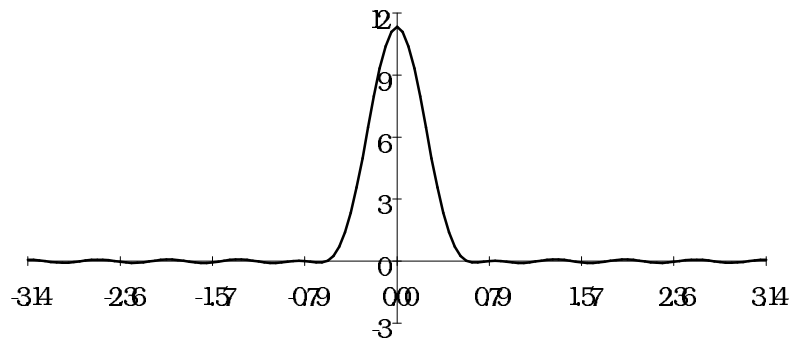
A janela de Hanning e a janela de Hamming são casos particulares da janela de Hamming generalizada

$$w_H(n) = (\alpha + (1-\alpha)\cos(\frac{2\pi n}{N-1}))w_R(n),$$

cuja transformada de Fourier é

$$W_H(e^{j\omega}) = \alpha W_R(e^{j\omega}) + \frac{1-\alpha}{2} (W_R(e^{j(\omega-\frac{2\pi}{N-1})}) + W_R(e^{j(\omega+\frac{2\pi}{N-1})}))$$

Representa-se a seguir a transformada de Fourier da janela de Hamming para N = 21 (neste caso, α = 0.54).



O lobo principal situa-se agora entre $-4\pi/N$ e $4\pi/N$, o que quer dizer que esta janela tem um efeito mais negativo sobre as bandas de transição do filtro que está a ser projectado, introduzindo em compensação um *ripple* bastante menor nas bandas de passagem e de bloqueio.

6.2.3.1.3 Janela de Blackman.

A janela de Blackman

$$w_B(n) = (0.42 + 0.5\cos(\frac{2\pi n}{N-1}) + 0.08\cos(\frac{4\pi n}{N-1}))w_R(n),$$

apresenta uma transformada de Fourier com um lobo principal entre $-6\pi/N$ e $6\pi/N$, mas tem a vantagem de introduzir um ainda menor *ripple* nas bandas de passagem e de bloqueio do filtro que está a ser projectado.

O quadro a seguir, extraído da referência [6], quantifica alguns destes aspectos

janela	max lobo lateral	transição	max <i>ripple</i> band bloq
rectang	-13 dB	0.9 $2\pi/N$	-21 dB
Hanning	-31 dB	3.1 $2\pi/N$	-44 dB
Hamming	-41 dB	3.3 $2\pi/N$	-53 dB
Blackman	-57 dB	5.5 $2\pi/N$	-74 dB

6.2.3.2 Método da Amostragem da Função de Transferência.

Como sabemos, dada uma amostragem

$$H(k), k = 0 .. N-1$$

de uma determinada função de transferência, a função

$$H(z) = \frac{1-z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1-W_N^{-k}z^{-1}}$$

satisfaz a essa amostragem, e pode ser realizada pela associação em série de um filtro digital do tipo FIR

$$H_p(z) = \frac{1 - z^{-N}}{N}$$

com N zeros em

$$z_k = W_N^{-k}, k = 0 \dots N-1,$$

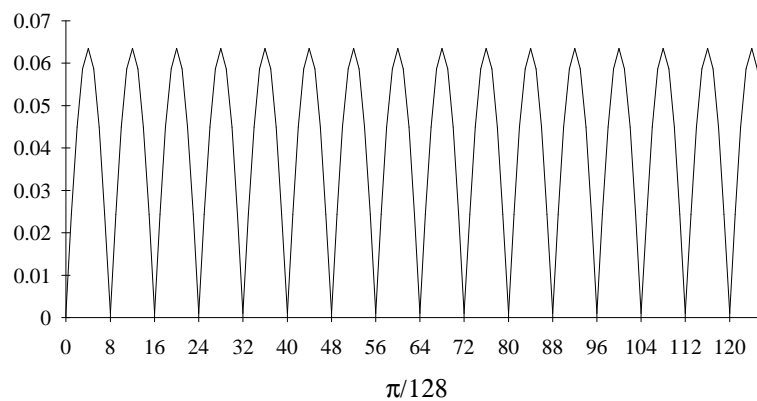
com N filtros digitais do tipo IIR, dispostos em paralelo,

$$H_k(z) = \frac{H(k)}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}k} z^{-1}}, k = 0 \dots N-1,$$

cada um dos quais com um polo em W_N^{-k} .

O filtro digital resultante é do tipo FIR, como resultado do cancelamento destes polos pelos zeros do primeiro elemento.

O sistema H_p , filtro em pente, caracteriza-se por apresentar N zeros igualmente espaçados sobre a circunferência unitária do plano z. Para N=32, por exemplo, a sua resposta em frequência é



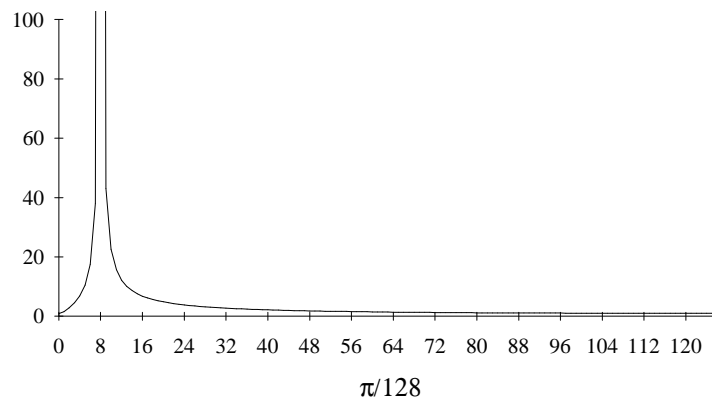
Os sistemas H_k , filtros de banda, apresentam um polo cada um, coincidente com um dos zeros de H_p .

Uma vez que os sistemas H_k e H_{N-k} têm polos conjugados e que num sistema com resposta impulsional real $H(k) = H(N-k)$, se se associarem estes dois sistemas obtém-se um sistema de segunda ordem cuja função de transferência tem coeficientes reais

$$H_k(z) + H_{N-k}(z) = \frac{H(k)}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}k} z^{-1}} + \frac{H(k)}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}(N-k)} z^{-1}}.$$

$$H_k(z) + H_{N-k}(z) = \frac{2H(k) - 2H(k) \cos\left(\frac{2\pi}{N}k\right) z^{-1}}{1 - 2 \cos\left(\frac{2\pi}{N}k\right) z^{-1} + z^{-2}}.$$

A resposta em frequência da associação em paralelo de H_1 e H_{31} , para N=32, seria



Um dos principais problemas deste método de síntese de filtros resulta da absoluta necessidade de os polos dos filtros de banda cancelarem os zeros do filtro em pente, o que pode ser difícil de garantir numa implementação em que os cálculos são realizados com precisão finita.

A solução habitualmente adoptada consiste em localizar esses polos e zeros sobre uma circunferência de raio r inferior, mas aproximadamente igual, a 1, de tal modo que mesmo que não coincidam se possam considerar a igual distância da circunferência unitária.

Esta operação corresponde à mudança de variável

$$z \Rightarrow \frac{z}{r}$$

donde resulta

$$H_p(z) = \frac{1 - r^N z^{-N}}{N}$$

$$H_k(z) = \frac{H(k)}{1 - r e^{j\frac{2\pi}{N}k} z^{-1}}, k = 0, \dots, N-1.$$

$$H_k(z) + H_{N-k}(z) = \frac{2H(k) - 2rH(k) \cos\left(\frac{2\pi}{N}k\right)z^{-1}}{1 - 2r \cos\left(\frac{2\pi}{N}k\right)z^{-1} + r^2 z^{-2}}.$$

Exemplo

Pretende-se remover a componente com frequência 150 Hz do sinal

$$x_a(t) = \sin(2\pi \cdot 50t) + 0.5 \sin(2\pi \cdot 150t).$$

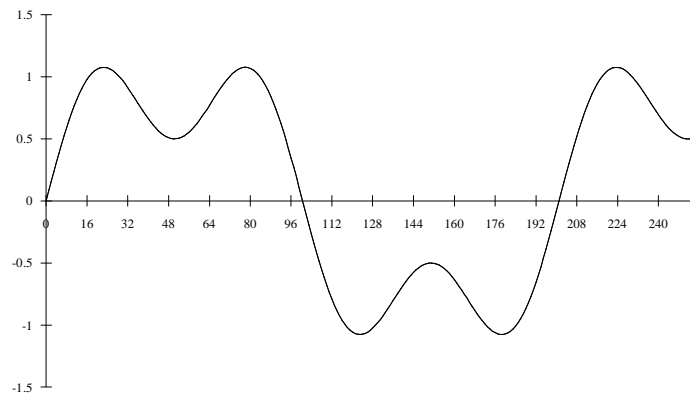
Utilizando um filtro de comprimento 32, com

$$H(k) = 0, \text{ excepto}$$

$$H(0) = H(1) = H(2) = H(30) = H(31) = 1,$$

obter-se-á o efeito desejado.

O sinal de entrada é amostrado a 1600 Hz



O filtro pente é implementado pela equação

$$v(n) = \frac{x(n) - r^N x(n-N)}{N}$$

e os filtros H_0 , H_1+H_{31} e H_2+H_{30} são implementados respectivamente pelas equações

$$y_0(n) = v(n) + r y_0(n-1)$$

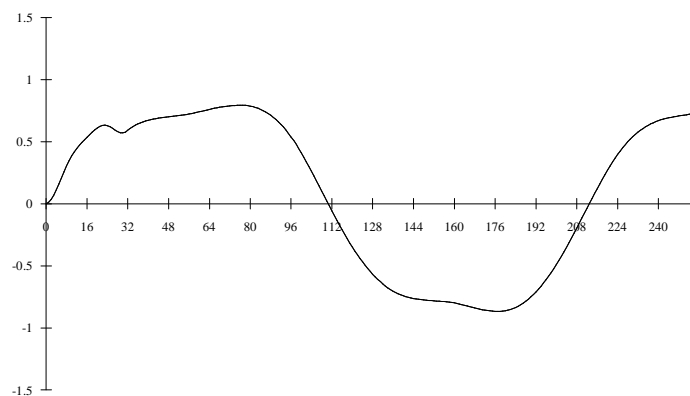
$$y_1(n) = 2v(n) - 2r \cos\left(\frac{\pi}{16}\right)v(n-1) + 2r \cos\left(\frac{\pi}{16}\right)y_1(n-1) - r^2 y_1(n-2)$$

$$y_2(n) = 2v(n) - 2r \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)v(n-1) + 2r \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)y_2(n-1) - r^2 y_2(n-2)$$

sendo finalmente

$$y(n) = y_0(n) + y_1(n) + y_2(n).$$

Calculando, com $N=32$ e $r=0.999$, obtem-se



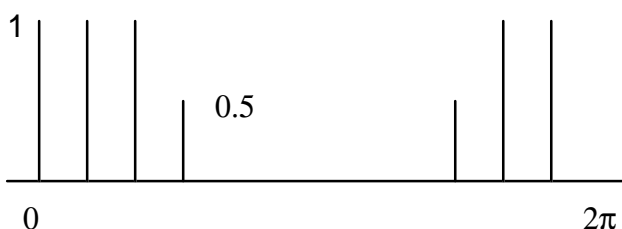
Há aqui evidentemente um fenómeno transitório e verifica-se também o efeito do comprimento do filtro na descontinuidade para $n=32$.

Outro problema sério associado a este método consiste em controlar o andamento da função de transferência entre os pontos de amostragem.

Na prática, é usual, por exemplo no projecto de um filtro passa baixo, não usar apenas amostras nas bandas de passagem e de bloqueio



mas definir também amostras na banda de transição



de modo a obrigar a função de transferência resultante a passar por esses pontos.

Os valores destas amostras intermédias é normalmente determinado através de um critério de optimização adequado.

6.2.3.3 Projecto Optimo.

Um filtro óptimo será aquele que explora ao máximo o *ripple* admitido nas bandas de passagem e de rejeição, com o objectivo de apresentar o comprimento mínimo possível.

Estes filtros são projectados em computador, normalmente através de técnicas iterativas baseadas no algoritmo de Remez.

O projectista tem de decidir a priori o tipo de filtro FIR a optimizar.

6.3 Projecto de Filtros Digitais do Tipo IIR.

Os filtros digitais do tipo IIR são normalmente projectados tomando como ponto de partida um filtro analógico, que é transformado num filtro digital por um dos seguintes dois métodos principais

- método da invariância da resposta impulsional
- método da transformação bilinear.

Tira-se assim partido do conhecimento que actualmente há sobre vários tipos de filtros analógicos, como os de Butterworth, de Chebyshev e elípticos.

6.3.1 Método da Invariância da Resposta Impulsional.

Não é possível reproduzir completamente num filtro digital um determinado filtro analógico (basta pensar que a resposta em frequência do filtro digital é necessariamente periódica), mas é possível garantir que certas características são respeitadas na transformação.

O método da invariância da resposta impulsional consiste exactamente em impor que a resposta impulsional do filtro digital é uma amostragem da resposta impulsional do filtro analógico

$$h(n) = T h_a(nT) ,$$

com o factor T a garantir que a amplitude da resposta em frequência dos dois filtros é a mesma, a menos da ocorrência de *aliasing*

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} H_a\left(\frac{j(\omega + 2r\pi)}{T}\right)$$

Quando a função de transferência do filtro analógico apresenta apenas polos simples

$$H_s(s) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{A_k}{s - s_k}$$

a função de transferência do filtro digital é

$$H(z) = T \sum_{k=0}^{N-1} \frac{A_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}}$$

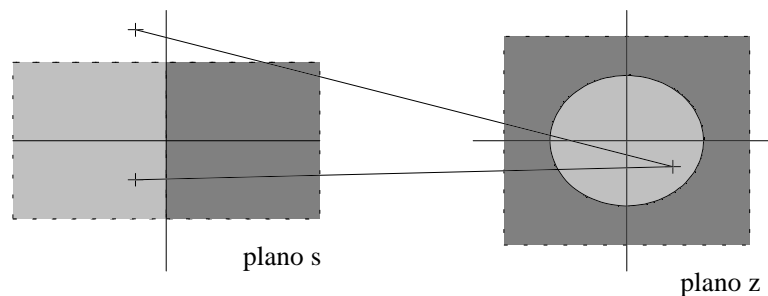
verificando-se que este método corresponde a um mapa dos polos de $H_a(s)$ do plano s sobre o plano z

$$z_k = e^{s_k T}.$$

Este mapa não é biunívoco, pois todos os polos

$$s_k + 2jr\pi T^{-1}, \text{ r inteiro}$$

vão recair sobre o mesmo polo z_k



Na realidade, trata-se de mais uma manifestação do *aliasing* inerente à amostragem, sendo certo que o maior problema deste método de projecto de filtros digitais do tipo IIR é a possibilidade de ocorrência de *aliasing*.

De acordo com este mapa, o eixo $j\Omega$ do plano s recai sobre a circunferência unitária do plano z

$$z = e^{j\Omega T},$$

o que está de acordo com a relação já conhecida entre frequência analógica e frequência digital.

Pontos situados à esquerda do eixo $j\Omega$ do plano s recaem sobre o interior da circunferência unitária do plano z , o que garante que um sistema causal e estável dá origem a um sistema causal e estável.

Sintetizando, podemos dizer que o mapa

$$z = e^{sT}$$

estabelece um correspondência biunívoca entre uma "tira" do plano s paralela ao seu eixo real e com largura $2\pi/T$, por exemplo a limitada pelas rectas

$$\text{Im}(s) = j\pi T^{-1}$$

$$\text{Im}(s) = -j\pi T^{-1},$$

e todo o plano z , com o mapa inverso

$$s = T^{-1} \log(z).$$

O logaritmo principal de um número complexo é um número complexo com parte imaginária compreendida entre $-j\pi$ e $j\pi$.

6.3.2 Transformação Bilinear.

A transformação bilinear permite passar directamente da função de transferência do filtro analógico para a função de transferência do filtro digital, através da substituição

$$s \Rightarrow \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

que define um mapa biunívoco do plano s no plano z .

Resolvendo em ordem a z , tem-se

$$z = \frac{2+sT}{2-sT}$$

e pode facilmente observar-se que ao eixo $j\Omega$ do plano s corresponde a circunferência unitária do plano z

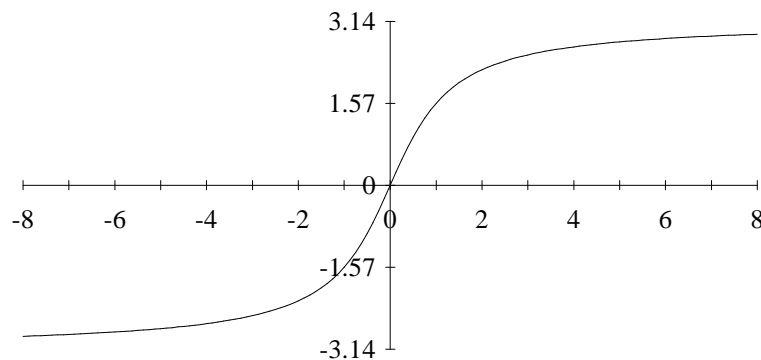
$$z = e^{j2\arctg\left(\frac{\Omega T}{2}\right)},$$

o que quer dizer que a resposta em frequência do filtro digital é uma cópia da resposta em frequência do filtro analógico, com a distorção resultante da compressão de todo o eixo $j\Omega$ numa revolução a essa circunferência, e que ao semiplano esquerdo do plano s corresponde o seu interior, o que quer dizer que um sistema contínuo causal e estável dá origem a um sistema discreto causal e estável.

A relação entre as frequências analógica e digital

$$\omega = 2\arctg\left(\frac{\Omega T}{2}\right),$$

não é linear e tem de ser tomada em conta ao projectar-se o filtro analógico de partida.



Exemplo

Consideremos que se pretende amostrar um sinal analógico a

$$f_a = 20 \text{ kHz}$$

e realizar uma filtragem digital passa-baixo com frequência de corte

$$f_c = 1 \text{ kHz}$$

com um filtro de 1ª ordem obtido a partir de um filtro analógico RC elementar.

Utilizando o método da invariância da resposta impulsional, devemos partir do filtro analógico

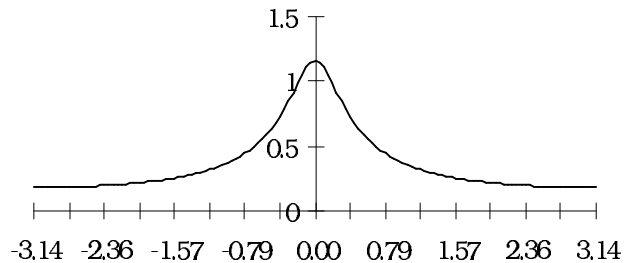
$$H_a(s) = \frac{2000\pi}{s + 2000\pi}$$

resultando o filtro digital

$$H(z) = \frac{0.1\pi}{1 - e^{-0.1\pi}z^{-1}}$$

$$y(n) = 0.314x(n) + 0.730y(n-1)$$

cuja amplitude resposta em frequência se representa a seguir



O efeito do *aliasing* é visível, para esta largura de banda.

Utilizando o método da transformação bilinear, é necessário em primeiro lugar determinar a frequência de corte Ω_c do filtro analógico a que depois da transformação corresponderá a frequência de corte do filtro digital

$$\omega_c = 0.1\pi,$$

$$\Omega_c = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega_c}{2} = 6335.4 \operatorname{rads}^{-1},$$

ligeiramente superior à frequência de corte $2000\pi \operatorname{rads}^{-1}$ utilizada anteriormente.

Assim, como

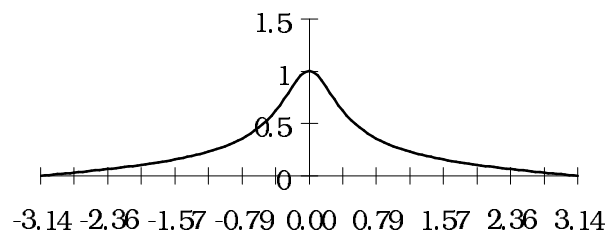
$$H_a(s) = \frac{6335.4}{s + 6335.4},$$

pela transformação bilinear

$$H(z) = \frac{0.137(1 + z^{-1})}{1 - 0.727z^{-1}}$$

$$y(n) = 0.137x(n) + 0.137x(n-1) + 0.727y(n-1),$$

cuja amplitude da resposta em frequência se representa graficamente a seguir



Neste caso, não ocorre *aliasing*. De notar também o efeito do zero em $z=-1$.

Normalmente, o filtro digital é especificado pelas suas bandas, de passagem, de transição e de bloqueio, e pelas atenuações que é necessário garantir, isto é, o filtro analógico não é dado.

Este problema resolve-se recorrendo em primeiro lugar ao projecto de um filtro analógico protótipo, utilizando uma das famílias tradicionais, Butterworth, Chebyshev, etc..

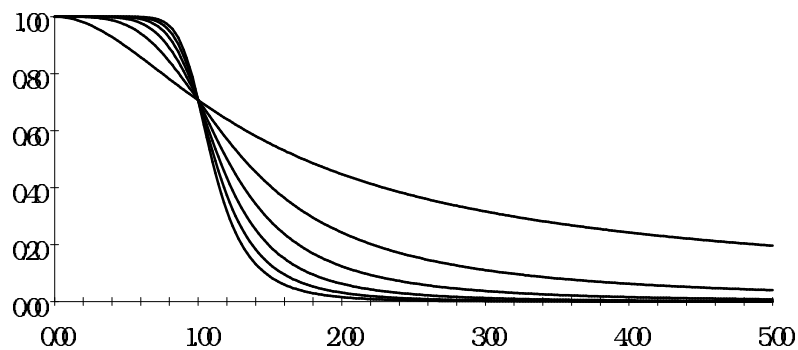
6.3.2.1 Filtros de Butterworth

Os filtros de Butterworth têm resposta em frequência

$$|H_a(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}},$$

em que Ω_c é a frequência angular de corte do filtro e N a sua ordem, e caracterizam-se por apresentarem uma resposta em frequência monotônica.

Graficamente, o andamento de $|H_a(\Omega)|$ tem a forma representada a seguir, para os filtros de ordem 1 a 6, e $\Omega_c = 1$.



Os polos de um filtro de Butterworth determinam-se resolvendo a equação

$$1 + \left(\frac{s}{j\Omega_c}\right)^{2N} = 0,$$

a qual admite $2N$ soluções igualmente espaçadas sobre uma circunferência de raio Ω_c e centrada na origem do plano s

$$\frac{s}{j\Omega_c} = \sqrt[2N]{-1}$$

$$s = j\Omega_c e^{-j\left(\frac{\pi}{2N} + k\frac{2\pi}{2N}\right)}, \quad k = 0 \dots 2N - 1$$

e retendo as soluções situadas no semi-plano esquerdo do plano s (N polos).

A função de transferência dos filtros de Butterworth é do tipo

$$H_a(s) = \frac{1}{1 + a_1 \frac{s}{j\Omega_c} + \dots + a_N \left(\frac{s}{j\Omega_c}\right)^N}$$

em que os coeficientes $a_1 \dots a_N$ têm os valores dados pela tabela seguinte

	a ₁	a ₂	a ₃	a ₄	a ₅	a ₆	a ₇	a ₈
B ₁	1							
B ₂	0.707	1						
B ₃	2	2	1					
B ₄	2.613	3.414	2.613	1				
B ₅	3.236	5.236	5.236	3.236	1			
B ₆	3.864	7.464	9.141	7.464	3.864	1		
B ₇	4.494	10.103	14.606	14.606	10.103	4.494	1	
B ₈	5.126	13.138	21.848	25.691	21.848	13.138	5.126	1

Os parâmetros Ω_c e N determinam-se em primeira aproximação pelos dados relativos ao limite superior da banda de passagem e ao limite inferior da banda de rejeição, expressos em termos da frequência analógica.

6.3.2.2 Filtros de Chebyshev

Os filtros de Chebyshev caracterizam-se por apresentarem *ripple* numa das bandas, passagem ou bloqueio, o que conduz em muitos casos, a soluções mais económicas em termos da ordem do filtro.

7. Baseiam-se nos polinómios de Chebyshev, os quais se podem definir recursivamente a partir de

$$T_{N+1}(x) = 2xT_N(x) - T_{N-1}(x)$$

com

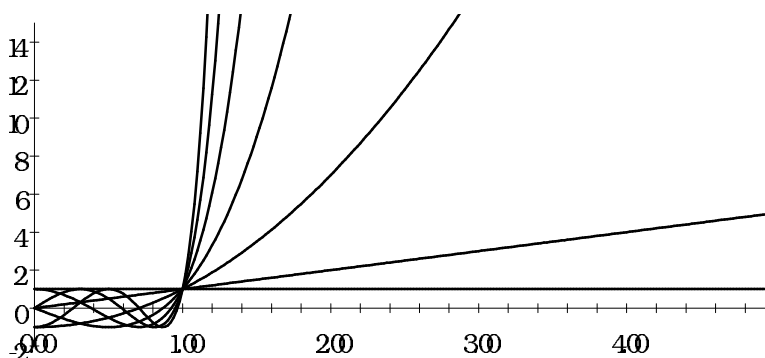
$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x,$$

ou então, de uma forma compacta, como

$$T_N(x) = \begin{cases} \cos(N\cos^{-1}(x)), & \text{se } |x| \leq 1 \\ \cosh(N\cosh^{-1}(x)), & \text{se não.} \end{cases}$$

Na figura seguinte, representam-se os polinómios de Chebyshev de ordem 0 a 6



Estes polinómios caracterizam-se por

$$T_N(1) = 1$$

$$T_N(-1) = \pm 1$$

$$|T_N(x)| \leq 1, |x| \leq 1$$

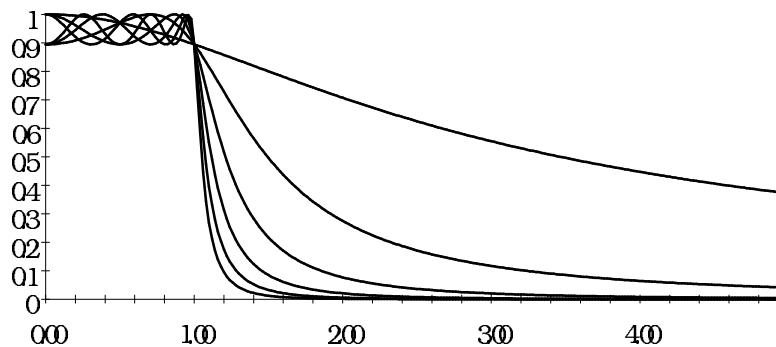
$$|T_N(x)| \geq 1, |x| \geq 1,$$

o que os torna apropriados para definir filtros passa-baixo.

Os filtros de Chebyshev do tipo I apresentam *ripple* na banda de passagem, e têm amplitude da resposta em frequência

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_N^2\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)},$$

representando-se a seguir os filtros deste tipo com ordem 1 a 6, $\Omega_c = 1$ e $\varepsilon = 0.5$



Os filtros de Chebyshev do tipo II apresentam *ripple* na banda de bloqueio, e têm amplitude da resposta em frequência

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \frac{T_N^2\left(\frac{\Omega_b}{\Omega_c}\right)}{T_N^2\left(\frac{\Omega_b}{\Omega}\right)}}.$$

Como se pode ver por exemplo na referência [5], não é difícil estabelecer as equações necessárias à determinação do polinómio de Chebyshev de ordem mínima que permite satisfazer uma determinada especificação, e, a partir daí, projectar o filtro digital.

Exemplo

Suponhamos que pretendemos projectar um filtro digital passa-baixo especificado pelo limite superior da banda de passagem

$$\omega_p = 0.1\pi \text{ rad}$$

e pela máxima atenuação admitida nesta banda

$$\delta = -0.3 \text{ dB},$$

e pelo limite inferior da banda de bloqueio

$$\omega_b = 0.3\pi \text{ rad}$$

e pela mínima atenuação exigida nesta banda

$$\varepsilon = -40 \text{ dB}.$$

No exemplo que estamos a considerar

$$|H_a(j0.1\pi T^{-1})|^2 = 10^{-0.03}$$

$$|H_a(j0.3\pi T^{-1})|^2 = 10^{-4}$$

sistema de equações que se pode escrever

$$(0.1\pi T^{-1}/\Omega_c)^{2N} = 0.0715$$

$$(0.3\pi T^{-1}/\Omega_c)^{2N} = 9999$$

donde

$$N = 5.39$$

$$\Omega_c = 0.401T^{-1}.$$

A ordem mínima do filtro de Butterworth que satisfaz as especificações é

$$N = 6,$$

o que permite uma certa margem de manobra relativamente a Ω_c , que pode variar entre um valor calculado a partir da primeira das duas equações anteriores, satisfazendo à justa a especificação na banda de passagem, e um valor calculado a partir da segunda dessas equações, satisfazendo à justa a especificação na banda de bloqueio

$$\Omega_c \geq 0.391T^{-1}$$

$$\Omega_c \leq 0.437T^{-1}.$$

Dependerá agora do método utilizado e do critério do projectista a fixação de Ω_c .

Deixamos por aqui este exemplo. Recomenda-se a leitura da referência [3] para o estudo detalhado de um problema semelhante a este. Note-se que não é necessário conhecer T para projectar completamente o filtro, pois, ao realizar a passagem ao domínio discreto, T intervém novamente, de modo tal que deixa de estar presente no resultado final.

6.4 Transformações no Domínio das Frequências.

6.4.1 Filtros Passa Tudo.

Um filtro digital com amplitude da resposta em frequência constante para todas as frequências diz-se um filtro passa tudo, e a sua principal aplicação consiste na modificação da fase de uma resposta em frequência sem alteração da respectiva amplitude.

O seu estudo permite-nos também compreender melhor como se pode projectar qualquer filtro digital tomando como ponto de partida um filtro passa baixo, através do uso de transformações no domínio das frequências.

Um sistema discreto com um polo em $\alpha \in \mathbb{C}$ e um zero em α^{*-1} tem estas características, isto é, se

$$H(z) = \frac{z - \alpha^{*-1}}{z - \alpha}$$

então

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{1}{|\alpha|}.$$

Na realidade,

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{|e^{j\omega} - a^{-1}e^{j\phi}|}{|e^{j\omega} - ae^{j\phi}|}, \alpha = ae^{j\phi}$$

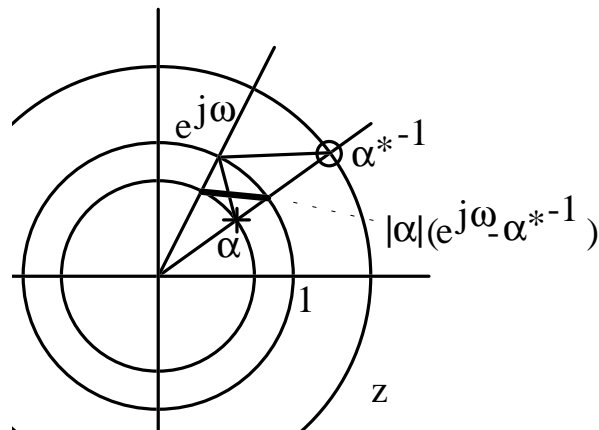
$$|H(e^{j\omega})| = \frac{|\cos \omega + j\text{sen} \omega - a^{-1} \cos \phi - ja^{-1} \text{sen} \phi|}{|\cos \omega + j\text{sen} \omega - a \cos \phi - j a \text{sen} \phi|}$$

$$|H(e^{j\omega})|^2 = \frac{(\cos \omega - a^{-1} \cos \phi)^2 + (\sin \omega - a^{-1} \sin \phi)^2}{(\cos \omega - a \cos \phi)^2 + (\sin \omega - a \sin \phi)^2}$$

$$|H(e^{j\omega})|^2 = \frac{1 + a^{-2} - 2a^{-1} \cos \omega \cos \phi - 2a^{-1} \sin \omega \sin \phi}{1 + a^2 - 2a \cos \omega \cos \phi - 2a \sin \omega \sin \phi}$$

$$|H(e^{j\omega})|^2 = \frac{1}{a^2} .$$

Um estudo gráfico simples teria permitido chegar mais rapidamente a esta conclusão,

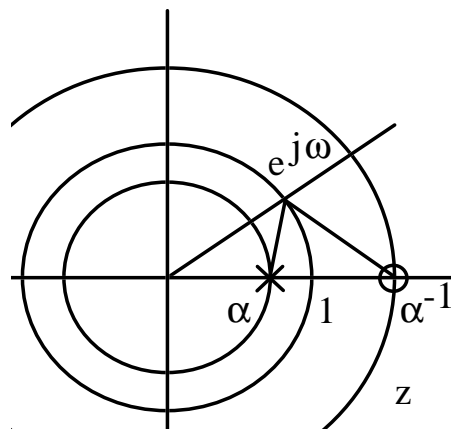


pois, como ressalta da figura,

$$|e^{j\omega} - \alpha| = |\alpha| \cdot |e^{j\omega} - \alpha*^{-1}| .$$

O modo como $\arg(H(e^{j\omega}))$ varia com ω também pode ser estudado analiticamente.

Vamos fazê-lo para o caso $\alpha \in \mathbb{R}$, uma vez que qualquer outro caso se resume a uma rotação de ϕ .



Assim,

$$\arg(H(e^{j\omega})) = \frac{\arg(\cos \omega + j \sin \omega - \frac{1}{\alpha})}{\arg(\cos \omega + j \sin \omega - \alpha)}$$

$$\arg(H(e^{j\omega})) = \arctg \frac{\text{sen}\omega}{\cos\omega - \frac{1}{\alpha}} - \arctg \frac{\text{sen}\omega}{\cos\omega - \alpha}$$

e, utilizando a identidade trigonométrica

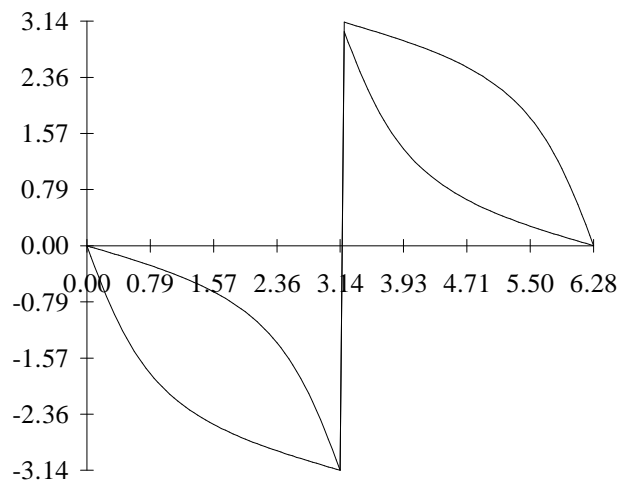
$$\text{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\text{tg}\alpha - \text{tg}\beta}{1 + \text{tg}\alpha\text{tg}\beta}$$

$$\text{tg}[\arg(H(e^{j\omega}))] = \frac{\frac{\text{sen}\omega}{\cos\omega - \frac{1}{\alpha}} - \frac{\text{sen}\omega}{\cos\omega - \alpha}}{1 + \frac{\text{sen}\omega}{\cos\omega - \frac{1}{\alpha}} \frac{\text{sen}\omega}{\cos\omega - \alpha}}$$

$$\text{tg}[\arg(H(e^{j\omega}))] = \frac{\text{sen}\omega(\cos\omega - \alpha) - \text{sen}\omega(\cos\omega - \frac{1}{\alpha})}{(\cos\omega - \frac{1}{\alpha})(\cos\omega - \alpha) + \text{sen}^2\omega}$$

$$\arg(H(e^{j\omega})) = \arctg \frac{(\frac{1}{\alpha} - \alpha)\text{sen}\omega}{2 - (\frac{1}{\alpha} + \alpha)\cos\omega}$$

Graficamente, para $\alpha = \pm 0.5$,



6.4.2 Transformações no Domínio das Frequências.

Uma transformação no domínio das frequências é uma mudança de variável do tipo

$$z^{-1} = G(Z^{-1}).$$

Dado o sistema discreto $H_1(z)$, esta mudança de variável transforma-o no sistema discreto

$$H_d(Z) = H_1(G^{-1}(Z^{-1})).$$

As condições a que deve satisfazer uma mudança de variável para ser adequada à conversão de um filtro digital do tipo passa baixo num filtro digital de outro tipo são as seguintes

$G(Z^{-1})$ deve ser uma função racional de Z^{-1} (ou de Z),

a mudança de variável deve mapear o interior da circunferência unitária do plano z no interior da circunferência unitária do plano Z ,

$$|G(Z^{-1})|=1.$$

Os sistemas discretos do tipo passa-tudo

$$H(z) = \pm \alpha \frac{z - \alpha^{*-1}}{z - \alpha} = \pm \frac{z - \alpha^{*-1}}{1 - \alpha z}$$

permitem deduzir mudanças de variável com as características anteriores

$$G(Z^{-1}) = \pm \frac{Z^{-1} - \alpha^{*-1}}{1 - \alpha Z^{-1}}$$

que, com uma escolha apropriada do parâmetro α , conduzem às transformações no domínio das frequências mais interessantes do ponto de vista do projecto de filtros digitais

passa baixo \Rightarrow passa baixo

passa baixo \Rightarrow passa alto

passa baixo \Rightarrow passa banda

passa baixo \Rightarrow tampão.

Limitamo-nos aqui a escrever as transformações e as respectivas equações de projecto.

6.4.2.1 Passa Baixo em Passa Baixo.

A mudança de variável é

$$z^{-1} = \frac{Z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha Z^{-1}}$$

em que

$$\alpha = \frac{\sin \frac{\theta_p - \omega_p}{2}}{\sin \frac{\theta_p + \omega_p}{2}}$$

e θ_p e ω_p são as frequências de corte dos filtros original e pretendido, respectivamente.

6.4.2.2 Passa Baixo em Passa Alto.

A mudança de variável é

$$z^{-1} = -\frac{Z^{-1} + \alpha}{1 + \alpha Z^{-1}}$$

em que

$$\alpha = -\frac{\cos \frac{\omega_p + \theta_p}{2}}{\cos \frac{\omega_p - \theta_p}{2}}$$

e θ_p e ω_p são as frequências de corte dos filtros original e pretendido, respectivamente.

6.4.2.1 Passa Baixo em Passa Banda.

A mudança de variável é

$$z^{-1} = -\frac{Z^{-2} - \frac{2\alpha k}{k+1} Z^{-1} + \frac{k-1}{k+1}}{\frac{k-1}{k+1} Z^{-2} - \frac{2\alpha k}{k+1} Z^{-1} + 1}$$

em que

$$\alpha = \frac{\cos \frac{\omega_2 + \omega_1}{2}}{\cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}}$$

$$k = \cot g \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \operatorname{tg} \frac{\theta_p}{2}$$

e θ_p é a frequência de corte do filtro original e ω_1 e ω_2 são as frequências inferior e superior de corte do filtro pretendido, respectivamente.

6.4.2.2 Passa Baixo em Tampão.

A mudança de variável é

$$z^{-1} = \frac{Z^{-2} - \frac{2k}{1+k} Z^{-1} + \frac{1-k}{1+k}}{\frac{1-k}{1+k} Z^{-2} - \frac{2\alpha}{1+k} Z^{-1} + 1}$$

em que

$$\alpha = \frac{\cos \frac{\omega_2 + \omega_1}{2}}{\cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}}$$

$$k = \operatorname{tg} \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \operatorname{tg} \frac{\theta_p}{2}$$

e θ_p é a frequência de corte do filtro original e ω_1 e ω_2 são as frequências inferior e superior de corte do filtro pretendido, respectivamente.

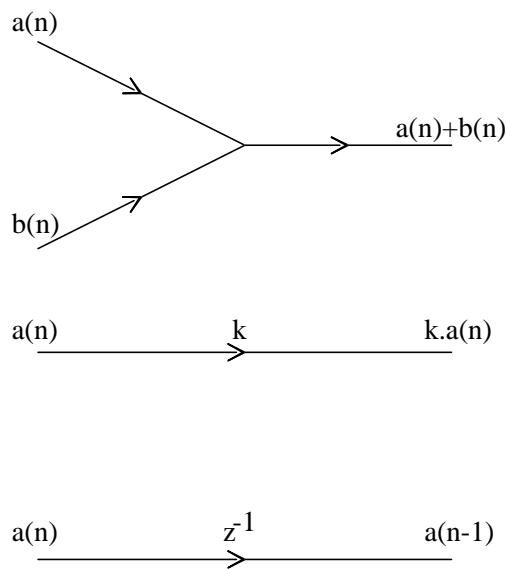
7. Realização de Sistemas Discretos

7.1 Gráficos de Fluência

Um sistema discreto realiza-se através da implementação do seu algoritmo, em hardware ou em software.

As operações envolvidas são basicamente três, a soma, a multiplicação por uma constante e o atraso.

Um modo simples de compreender o funcionamento dos algoritmos consiste na sua tradução em gráficos de fluência.

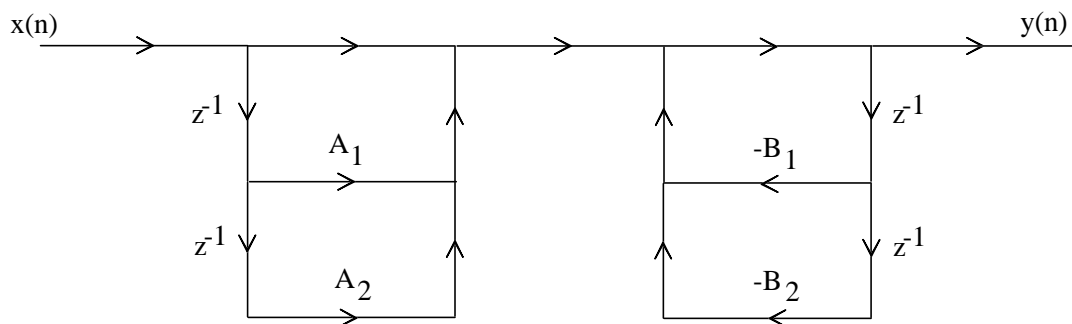


Exemplo

Consideremos o sistema discreto recursivo

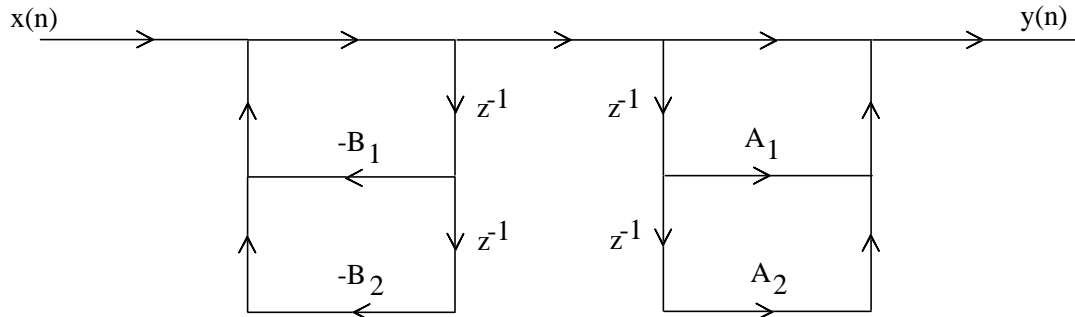
$$y(n) = x(n) + A_1x(n-1) + A_2x(n-2) + B_1y(n-1) + B_2y(n-2) .$$

O gráfico a seguir representa de uma maneira intuitiva o seu funcionamento.

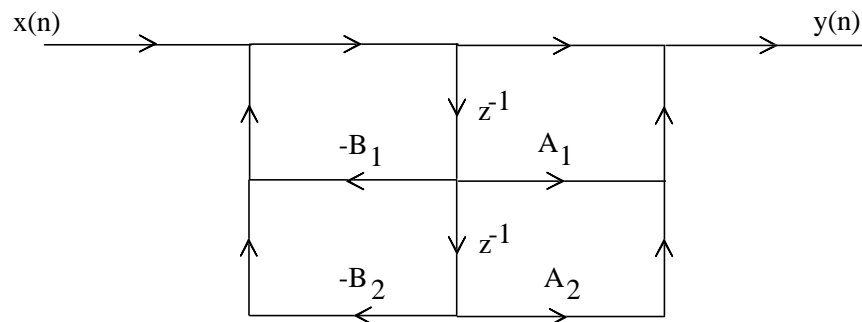


e permite, por manipulações simples, a descoberta de outros algoritmos mais vantajosos para a sua implementação.

Considerando o gráfico como uma associação em série de dois gráficos mais simples, e invertendo a sua ordem



vê-se imediatamente que é possível implementar o algoritmo com apenas dois atrasos, em vez dos quatro iniciais.



As equações respectivas são

$$v(n) = x(n) + B_1 v(n-1) + B_2 v(n-2)$$

$$y(n) = v(n) + A_1 v(n-1) + A_2 v(n-2)$$

em que $v(n)$ é o valor a memorizar (na realidade, uma variável de estado).

7.2 Formas Directas

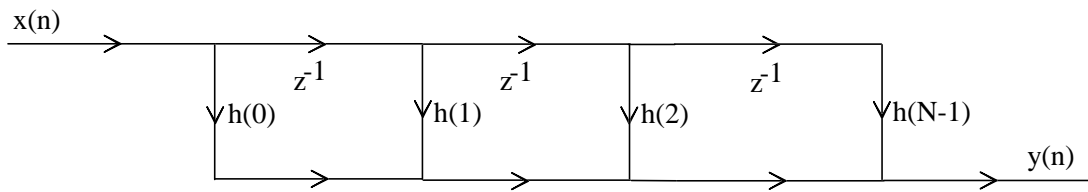
As formas directas são aquelas que derivam directamente dos algoritmos que descrevem os filtros digitais.

7.2.1 Filtros FIR

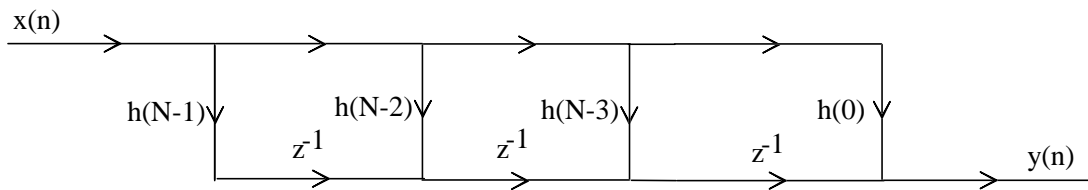
A equação geral de um filtro FIR causal é

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)x(n-k),$$

que é implementada directamente pelo gráfico de fluência



Uma operação simples sobre este gráfico, que consiste em inverter o sentido dos ramos e trocar a entrada com a saída, permite obter uma forma alternativa, de muita importância por exemplo em realizações com o microprocessador de sinal Inmos A100.

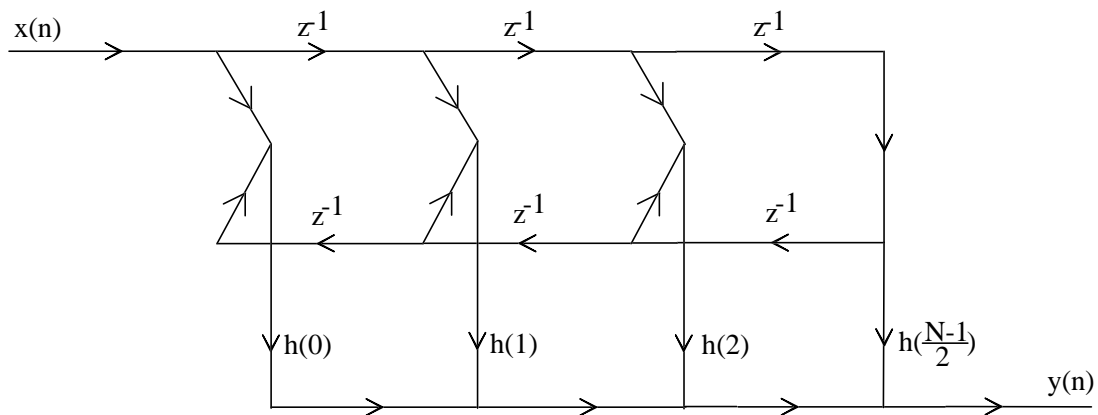


Os filtros do tipo FIR são muito usados na implementação de sistemas de fase linear.

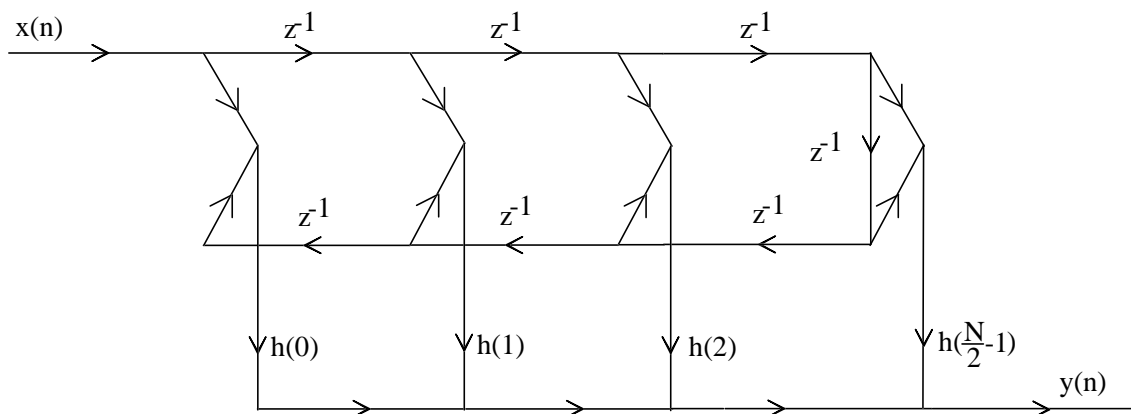
Neste caso,

$$h(n) = h(N-1-n), n = 0 \dots N-1$$

e esta simetria pode ser explorada na realização do filtro, reduzindo a metade o número de multiplicações, quer quando o comprimento N é ímpar



quer quando N é par

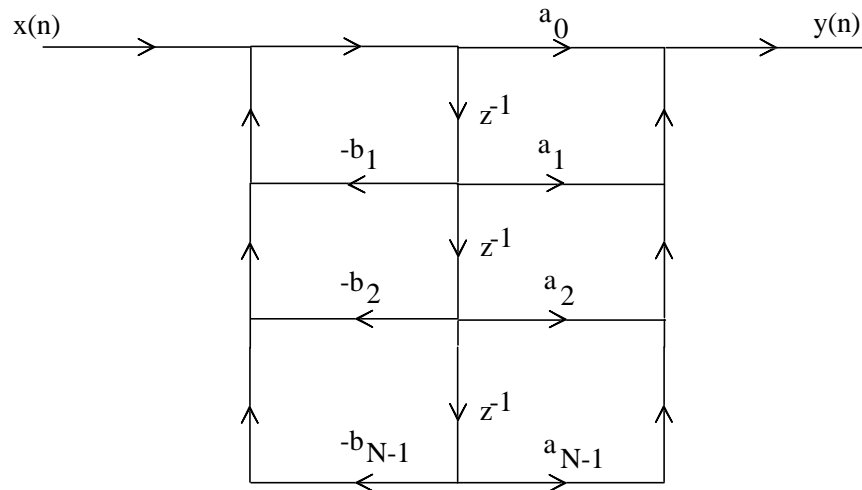


7.2.2 Filtros IIR

O algoritmo correspondente a um filtro digital do tipo IIR,

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k x(n-k) + \sum_{k=1}^{N-1} b_k y(n-k) ,$$

pode ser implementado por uma estrutura que é a generalização da do exemplo anterior, e que é conhecida por forma directa 2 ou por forma canónica.



7.3 Realizações Série e Paralelo

As propriedades da linearidade e da convolução da transformada em z mostram que à soma de funções de transferência corresponde a associação em paralelo e ao seu produto a associação em série.

A realização de um sistema complexo através da associação em paralelo ou em série de sistemas mais simples é muitas vezes conveniente, quer por razões de modularidade quer por razões associadas à diminuição dos erros causados pela quantificação dos coeficientes do sistema.

Uma regra elementar para a definição desses sistemas mais simples consiste em conservar no mesmo sistema pares de zeros ou de polos complexos conjugados, para assegurar que os respectivos coeficientes sejam números reais.

7.3.1 Filtros FIR

Nos filtros do tipo FIR recorre-se normalmente à sua realização pela associação em série de sistemas de primeira, segunda ou quarta ordem, correspondendo os primeiros à implementação de um zero em $z=\pm 1$

$$H(z) = 1 \pm z^{-1} ,$$

os de segunda ordem à implementação de um par de zeros reais em α e $1/\alpha$

$$H(z) = (1 - \alpha z^{-1})(1 - \alpha^{-1} z^{-1}) = 1 - (\alpha + \alpha^{-1})z^{-1} + z^{-2} ,$$

e os de quarta ordem à implementação de quatro zeros complexos em $\alpha, 1/\alpha, \alpha^*$ e $1/\alpha^*$

$$H(z) = (1 - (\alpha + \alpha^{-1})z^{-1} + z^{-2})(1 - (\alpha^* + \alpha^{*-1})z^{-1} + z^{-2})$$

$$H(z) = 1 - \gamma_1 z^{-1} + \gamma_2 z^{-2} - \gamma_1 z^{-3} + z^{-4}$$

com γ_1 e γ_2 reais e dados por

$$\gamma_1 = \alpha + \alpha^{-1} + \alpha^* + \alpha^{*-1}$$

$$\gamma_2 = (\alpha + \alpha^{-1})(\alpha^* + \alpha^{*-1}) + 2$$

que são as combinações de zeros que podem ocorrer nomeadamente em sistemas de fase linear, e que retêm a simetria dos coeficientes nestas decomposições.

Noutras situações, podem ainda ocorrer pares de zeros complexos conjugados, que podem ser implementados através de sistemas de segunda ordem.

7.3.2 Filtros IIR

Nos sistemas do tipo IIR, recorre-se normalmente à sua realização pela associação em série ou em paralelo de sistemas de primeira ou segunda ordem, correspondendo os primeiros à implementação de um polo real e os de segunda ordem à implementação de um par de polos reais ou complexos conjugados.