Francisco José de Oliveira Restivo

Professor Associado

Departamento de Engenharia Electrotécnica e de Computadores
Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

Processamento de Sinal

Problemas

Anos Lectivos 1992-94

Publica-se uma selecção de problemas propostos em aulas teórico-práticas, trabalhos para casa, provas de frequência e exames finais de Processamento de Sinal, devidamente classificados pelos vários capítulos da matéria da disciplina.

De alguns, são fornecidos tópicos para a sua solução.

1. Sinais e Sistemas Discretos

1.1. Enuncie, em termos da sua resposta impulsional h(n), condições necessárias e suficientes para um sistema discreto ser

a. Causal.

b. Estável.

1.2. Considere o sistema discreto

$$y(n) = x(n) + 3.$$

a. Diga, justificando, se o sistema é linear.

b. Diga, justificando, se o sistema é causal.

Solução:

a. O sistema não é linear.

Por exemplo, a resposta à entrada $\alpha x(n)$ é $\alpha x(n)+3 \neq \alpha(x(n)+3)$.

b. O sistema é causal.

1.3. Seja $H(e^{j\omega})$ a resposta em frequência de um sistema discreto com resposta impulsional h(n).

Determine, em função de $H(e^{j\omega})$, a resposta em frequência do sistema discreto com resposta impulsional $(-1)^n h(n)$ (lembre-se que $(-1)^n = e^{jn\pi}$).

Solução:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n h(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{jn\pi} h(n) e^{-j\omega n} = H(e^{j(\omega-\pi)})$$

1.4. Considere o sistema discreto

$$y(n) = 0.25x(n) + 0.5x(n-3) + 0.25x(n-6).$$

Determine

a. a sua resposta impulsional h(n).

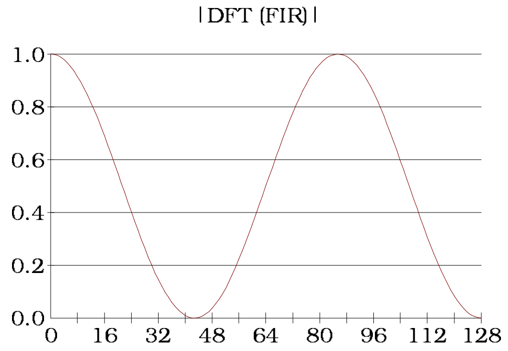
b. a sua resposta em frequência $H(e^{j\omega})$, e represente-a graficamente.

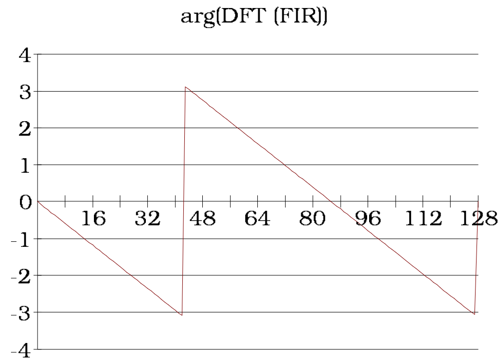
c. um sinal discreto não nulo x(n) que, aplicado à entrada do sistema dado, produza uma saída constantemente nula.

Solução:[1]

a. $0.25\delta(n)+0.5\delta(n-3)+0.25\delta(n-6)$

b. $H(e^{j\omega}) = 0.25 + 0.5e^{-3j\omega} + 0.25e^{-6j\omega} = (0.5 + 0.5\cos 3\omega)e^{-3j\omega}$





1.c. Um sinal com frequência $\frac{\pi}{3}$.

Por exemplo, $\cos(\frac{\pi}{3}n) = \ \ldots,\ 1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ -1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ -1,\ \ldots$

1.5. Considere o sistema discreto

$$y(n) = \frac{3x(n) + 2x(n-1) + x(n-2)}{6} \ .$$

a. Determine a sua resposta impulsional h(n).

b. Determine a resposta do sistema à entrada

$$x(n) = u(n) - u(n-4) \ .$$

Solução:

a. $h(n) = \frac{1}{2}\delta(n) + \frac{1}{3}\delta(n-1) + \frac{1}{6}\delta(n-2)$

b. $y(n) = \frac{1}{2}\delta(n) + \frac{5}{6}\delta(n-1) + \delta(n-2) + \delta(n-3) + \frac{1}{2}\delta(n-4) + \frac{1}{6}\delta(n-5)$

1.6. Considere o sistema discreto não recursivo

$$y(n) = 0.2x(n) + 0.6x(n-3) + 0.2x(n-6).$$

a. Determine a sua resposta impulsional h(n).

---

[1] a maior parte dos gráficos de respostas em frequência foi obtida com o programa DSP Machine, que as representa em 129 amostras no intervalo $[0,\pi]$

b. Determine e represente graficamente a sua resposta em frequência $H(e^{j\omega})$.

c. Determine a resposta do sistema à entrada

$$x(n) = u(n) - u(n-4).$$

1.7. Considere o sistema discreto

$$y(n) = \frac{x(n) + x(n-3)}{2} .$$

Determine

a. a sua resposta impulsional h(n);

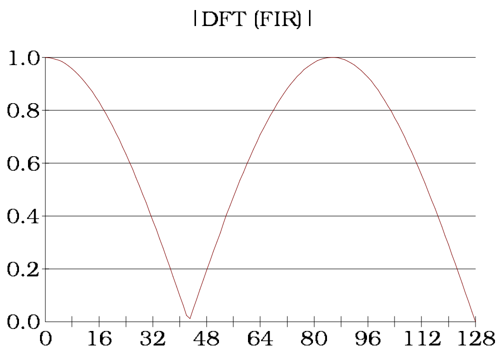
b. a sua resposta em frequência $H(e^{j\omega})$, e represente-a graficamente;

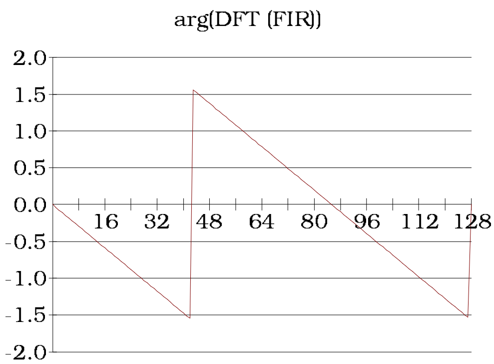
c. um sinal discreto x(n) que, aplicado à entrada do sistema dado, produza uma saída constantemente nula.

Solução:

$h(n)=0.5\delta(n)+0.5\delta(n-3)$

$H(e^{j\omega})=0.5+0.5e^{-3j\omega}=\cos(1.5\omega)e^{-1.5 j \omega}$





$x(n)=\text{sen}(n\pi /3)$, por exemplo

1.8. Considere o sistema discreto

$$y(n) = \frac{x(n) - x(n-4)}{2} .$$

Determine

a. a sua resposta impulsional h(n);

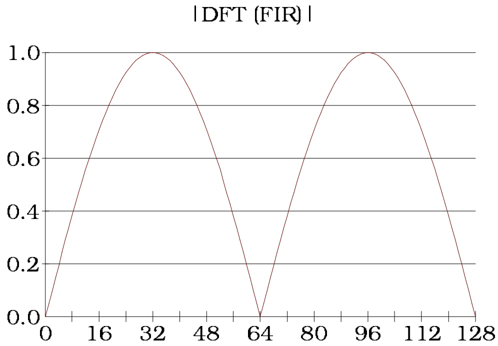
b. a sua resposta em frequência $H(e^{j\omega})$, e represente-a graficamente;

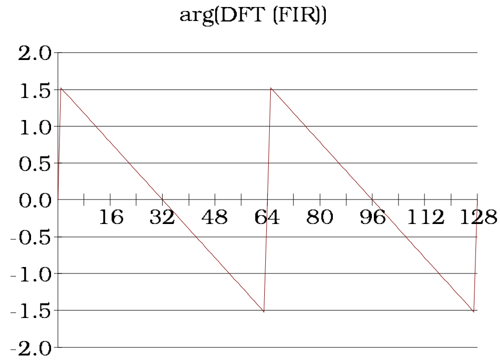
c. um sinal discreto x(n) que, aplicado à entrada do sistema dado, produza uma saída constantemente nula.

Solução:

a. $0.5\delta(n)-0.5\delta(n-4)$

b. $0.5 - 0.5e^{-4j\omega}(0.5e^{2j\omega} - 0.5e^{-2j\omega})e^{-2j\omega} = j\mathrm{sen}(2\omega)e^{-2j\omega} = \mathrm{sen}(2\omega)e^{j(\frac{\pi}{2}-2\omega)}$





c. Um sinal com frequència $\frac{\pi}{2}$. Por exemplo, $\mathrm{sen}(\frac{\pi}{2}n)$.

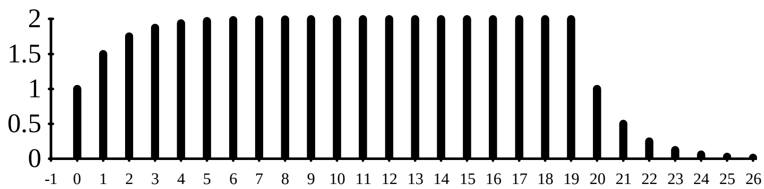
1.9. A resposta impulsional de um sistema discreto é

$$h(n) = 0.5^n u(n) .$$

Determine e represente graficamente a resposta do sistema à entrada

$$x(n) = u(n) - u(n-20) .$$

Solução:



1.10. Considere o sistema discreto

$$y(n) = x(n) + 0.5x(n - 4) .$$

a. Determine a resposta do sistema dado à entrada

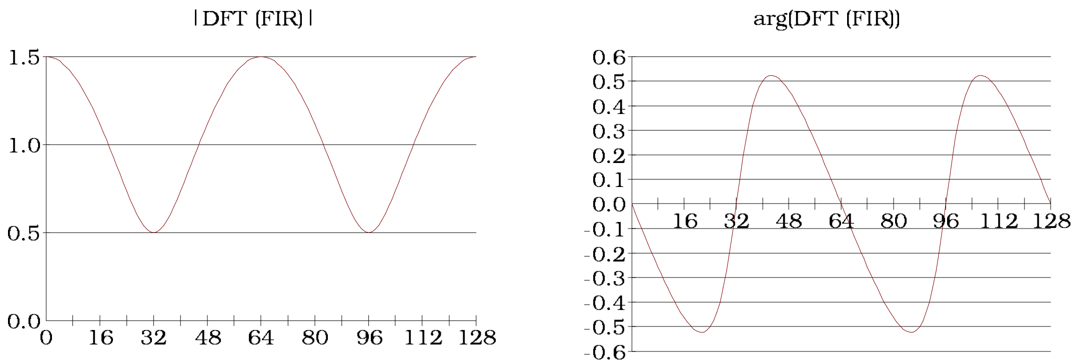
$$x(n) = u(n) - u(n-4) .$$

b. Determine a sua resposta em frequência $H(e^{j\omega})$.

c. Represente graficamente $H(e^{j\omega})$, em amplitude e fase.

Solução:

$$H(e^{j\omega}) = 1 + 0.5e^{-j\omega}$$



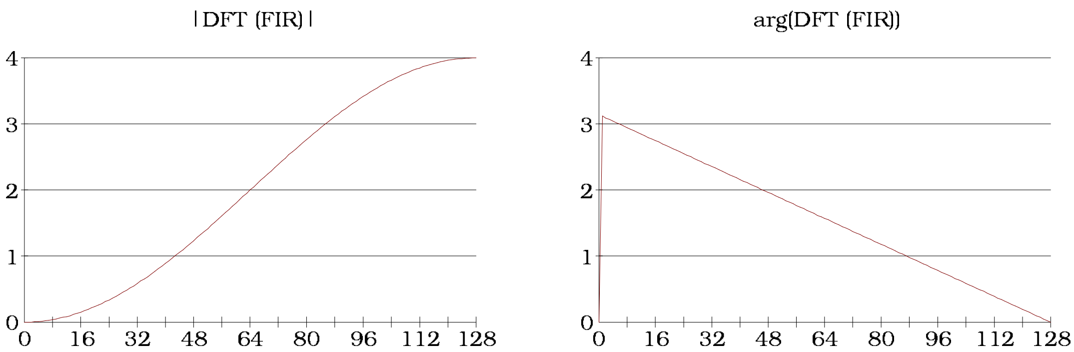
1.11. Considere o sistema discreto

$$y(n) = x(n) - 2x(n-1) + x(n-2) \ .$$

Determine e represente graficamente a sua resposta em frequência $H(e^{j\omega})$.

<u>Solução</u>:

$$H(e^{j\omega}) = 1 - 2e^{-j\omega} + e^{-2j\omega} = (e^{j\omega} - 2 + e^{-j\omega})e^{-j\omega} = (2\cos\omega - 2)e^{-j\omega}$$



1.12. Considere o sistema discreto causal

$$y(n) = x(n) + 0.5y(n-1) \ .$$

Determine a sua resposta impulsional h(n).

<u>Solução</u>:

$$h(n) = 0.5^n u(n) \ .$$

1.13. Considere o sistema discreto causal

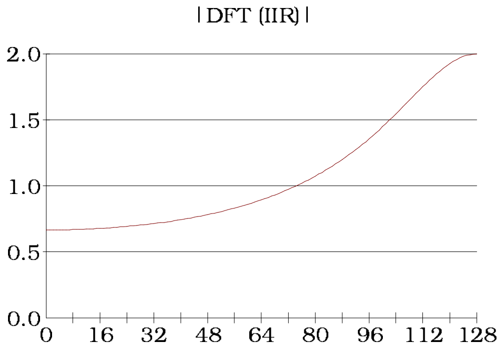
$$y(n) = x(n) - 0.5y(n-1) \ .$$

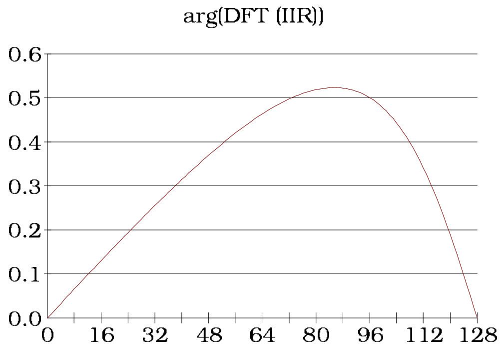
a. Verifique se o sistema é estável.

b. Determine a sua resposta em frequência $H(e^{j\omega})$.

c. Represente graficamente $\left|H(e^{j\omega})\right|$.

Solução:





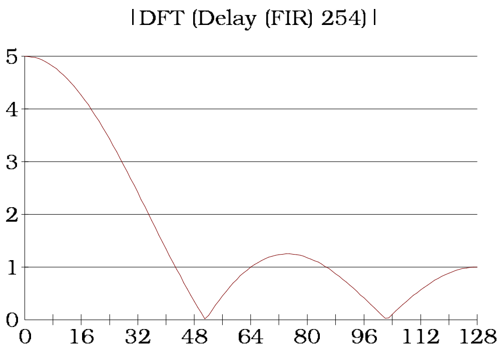
1.14. Considere o sistema discreto $y(n) = \sum_{k=n-2}^{n+2} x(k)$.

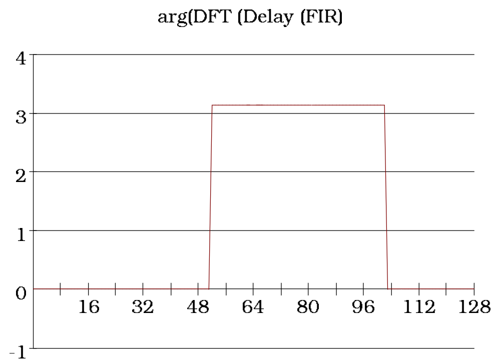
a. Determine a sua resposta impulsional h(n).

b. Determine a sua resposta em frequência $H(e^{j\omega})$.

c. Represente graficamente $H(e^{j\omega})$ em módulo e em fase.

Solução:





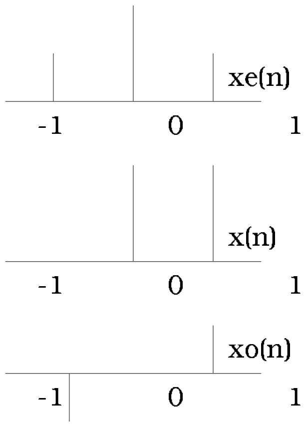
1.15. A parte real da transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$ de um sinal causal é

$$\mathrm{Re}\left[X(e^{j\omega})\right] = 1 + \cos\omega \ .$$

Determine a sua parte imaginária $\mathrm{Im}\left[X(e^{j\omega})\right]$.

Solução:

$$\mathrm{Re}\left[X(e^{j\omega})\right] \Rightarrow x_e(n) \Rightarrow x(n) \Rightarrow x_o(n) \Rightarrow \mathrm{Im}\left[X(e^{j\omega})\right]$$



$$\mathrm{Im}\left[X(e^{j\omega})\right] = -\mathrm{sen}\omega$$

1.16. Sejam x(n) e $X(e^{j\omega})$ um sinal discreto e a sua transformada de Fourier. Determine, em função de $X(e^{j\omega})$, a transformada de Fourier de cada um dos sinais discretos seguintes.

a. $g(n) = \begin{cases} x(\frac{n}{2}) \text{ , se n par} \\ 0 \text{ , se n impar} \end{cases}$

b. g(n)=x(2n)

c. $g(n)=x^2(n)$.

2. Amostragem de Sinais Contínuos

2.1. Enuncie em que condições um sinal contínuo $x_a(t)$ pode ser representado por um sinal discreto x(n) obtido por amostragem daquele.

2.2. Da amostragem a 1000 Hz de um determinado sinal contínuo $x_c(t)$ resultou o sinal discreto

$$x(n) = \cos(\frac{\pi}{4} n) .$$

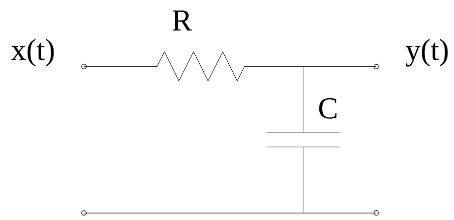
Determine dois possíveis sinais contínuos satisfazendo a esta condição, um deles correspondendo à amostragem sem *aliasing*.

<u>Solução</u>:

$x(n) = x_c(nT)$ e $\cos(\frac{\pi}{4} n) = \cos(\frac{\pi}{4T} nT)$, donde $x_c(t)=\cos(250\pi t)$

um sinal amostrado com *aliasing*: $\cos((250\pi+2\pi.1000)t)=\cos(2250\pi t)$

2.3. Considere o filtro passa-baixo RC elementar



a. Determine e represente graficamente a sua resposta em frequência $H_c(j\Omega)$.

b. Determine a sua resposta impulsional $h_c(t)$.

c. Determine e represente graficamente a resposta em frequência do sistema discreto cuja resposta impulsional é

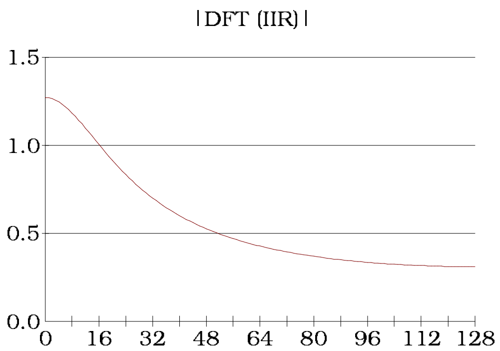
$$h(n)=Th_c(nT) \ ,$$

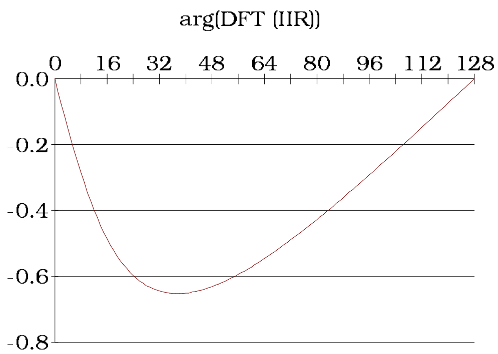
para T=RC/2 e para T=RC/20.

Solução:

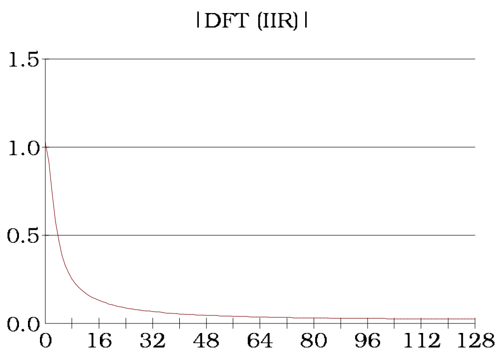
$$H(e^{j\omega}) = \frac{\frac{T}{RC}}{1-e^{-\frac{T}{RC}}e^{-j\omega}}$$

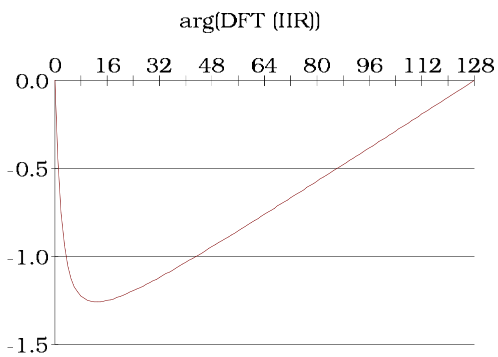
$$T = \frac{RC}{2} \Rightarrow H(e^{j\omega}) = \frac{0.5}{1-0.607e^{-j\omega}}$$





$$T = \frac{RC}{2} \Rightarrow H(e^{j\omega}) = \frac{0.05}{1-0.951e^{-j\omega}}$$





2.4. Considere os sinais $x_1(t)$ e $x_2(t)$ tais que

$$|\Omega| > \Omega_1 \Rightarrow X_1(j\Omega) = 0$$

$$|\Omega| > \Omega_2 \Rightarrow X_2(j\Omega) = 0 \; (\Omega_2 > \Omega_1) .$$

Determine a frequência de amostragem mínima necessária para representar x(t) exactamente, nos casos

a. $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$

b. $x(t) = x_1(t) \times x_2(t)$

c. $x(t) = x_1(t) * x_2(t)$.

Solução:

a. $2\Omega_2$

b. $2(\Omega_1+\Omega_2)$

c. $2\Omega_1$

2.5. Considere o sinal contínuo de banda limitada

$$x_C(t) = \mathrm{senc}^2(10t).$$

a. Determine a frequência mínima de amostragem deste sinal que não introduz *aliasing*.

b. Supondo que este sinal é amostrado a uma frequência 0.75x a frequência referida na alínea anterior, mostre como seria a transformada de Fourier do sinal discreto x(n) resultante.

Solução:

lembrando das aulas que

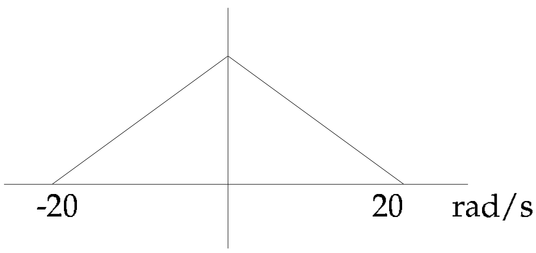
$$\frac{\omega_c}{\pi}\mathrm{senc}(\omega_c t) \Leftrightarrow u(\omega+\omega_c) - u(\omega-\omega_c)$$

$$\mathrm{senc}(10t) \Leftrightarrow \frac{\pi}{10}(u(\omega+10) - u(\omega-10))$$

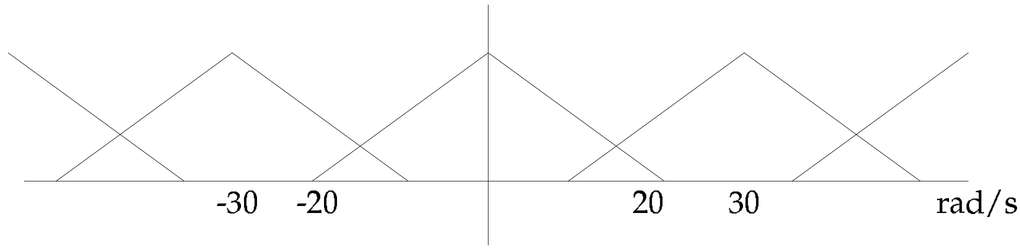
e utilizando a propriedade da convolução

$$f_1(t).f_2(t) \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi}F_1(\omega)*F_2(\omega)$$

obtem-se a transformada de Fourier do sinal dado



a frequência mínima pedida é 40 rad/s; se se amostrar a 30 rad/s, ocorre *aliasing*



2.6. Explique como se realiza a interpolação digital (isto é, a elevação da frequência de amostragem um número inteiro de vezes, L).

3. Transformada em z

3.1. Enuncie, em termos da sua função de transferência, condições necessárias e suficientes para um sistema discreto ser

a. Causal.

b. Estável.

3.2. Defina sistema causal, e enuncie condições necessárias e suficientes para um sistema ser causal, em termos da sua resposta impulsional h(n), e em termos da sua função de transferência H(z).

Solução:

$x_1(n)=x_2(n),\ n<n_1 \Rightarrow y_1(n)=y_2(n),\ n<n_1$

$n<0 \Rightarrow h(n)=0$

RdC de H(z): $|z|>\alpha$

3.3. Um sistema discreto linear e invariante tem resposta impulsional h(n) não nula no intervalo $[N_1, N_2]$ e nula fora desse intervalo.

a. Pode afirmar-se que existe sempre transformada de Fourier de h(n)? Justifique.

b. Como pode caracterizar a região de convergência da transformada em z de h(n), H(z), se

i. $N_1 < N_2 < 0$

ii. $0 < N_1 < N_2$.

3.4. Considere o sistema discreto causal

$$y(n) = x(n) + 1.4y(n-1) - 0.48y(n-2)\ .$$

a. Determine a sua resposta impulsional.

b. Represente graficamente a amplitude da sua resposta em frequência $|H(e^{j\omega})|$.

Solução: [2]

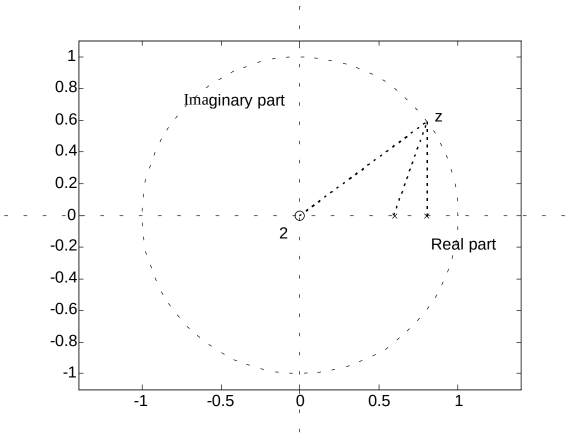
$$H(z) = \frac{1}{1-1.4z^{-1}+0.48z^{-2}} = \frac{z^2}{(z-0.6)(z-0.8)}, |z| > 0.8$$

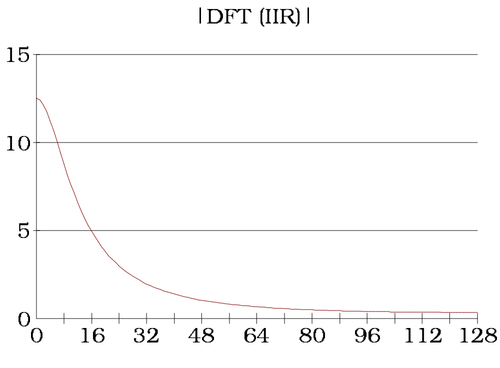
$$h(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint \frac{z^{n+1}}{(z-0.6)(z-0.8)}dz$$

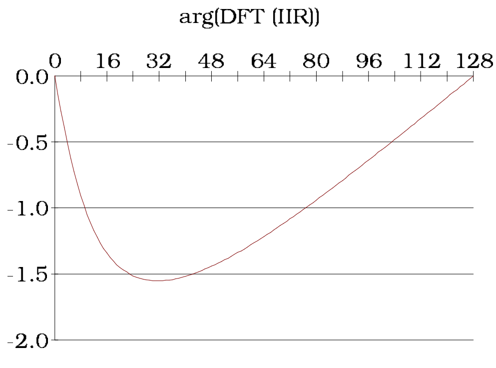
polos: em 0.6, 0.8 e 0 (n<-1); n<0 $\Rightarrow$ h(n)=0 (sistema causal)

$$n > 0 \Rightarrow h(n) = \left(\frac{0.6^{n+1}}{0.6-0.8} + \frac{0.8^{n+1}}{0.8-0.6}\right)$$

$$h(n) = 5(0.8^{n+1} - 0.6^{n+1})u(n)$$







3.5. Seja x(n) um sinal discreto de comprimento N, isto é, tal que

n < 0 ou n > N-1 $\Rightarrow$ x(n) = 0

e X(z) a sua transformada em z.

[2] os gráficos do plano z foram obtido com a função `zplane` do programa Matlab 4.2, Signal Processing Toolbox

a. Diga qual é a região de convergência de X(z).

b. Calcule a transformada em z, G(z), do sinal discreto de comprimento 2N

$$g(n) = \begin{cases} x(n)\ , \text{ se } 0 \le n \le N-1 \\ 0\ , \text{ se } N \le n \le 2N-1 \end{cases}.$$

Solução:

a. É todo o plano z, excepto z=0.

b. É a mesma: G(z)=X(z).

3.6. Suponha que H(z) é a função de transferência de um sistema discreto e h(n) a respectiva resposta impulsional.

Determine, em função de h(n), a resposta impulsional do sistema discreto com função de transferência

a. H(-z)

b. $H(z^2)$.

3.7. Determine a região de convergência e a resposta impulsional do sistema discreto com função de transferência

$$H(z) = \frac{1-z^{-1}}{1-2z^{-1}+0.75z^{-2}}$$

de tal modo que

a. o sistema seja causal

b. o sistema seja estável.

3.8. Determine a região de convergência e a resposta impulsional do sistema discreto com função de transferência

$$H(z) = \frac{1-z^{-1}}{1-2z^{-1}+0.75z^{-2}}$$

de tal modo que i) o sistema seja causal e ii) o sistema seja estável.

Solução:

Os polos estão em 0.5 e 1.5.

A região de convergência de H(z) é i) $|z| > 1.5$ e ii) $0.5 < |z| < 1.5$.

A resposta impulsional é, de

$$H(z) = \frac{0.5}{1-0.5z^{-1}} + \frac{0.5}{1-1.5z^{-1}}$$

para i)

$$h(n) = \frac{0.5^n + 1.5^n}{2} u(n)$$

e para ii)

$$h(n) = \frac{0.5^n}{2} u(n) - \frac{1.5^n}{2} u(-n-1) .$$

3.9. Considere o sistema discreto causal H definido pela equação às diferenças

$$y(n) = 2x(n) + 0.7y(n-1) - 0.1y(n-2) \ .$$

a. Determine a sua função de transferência H(z).

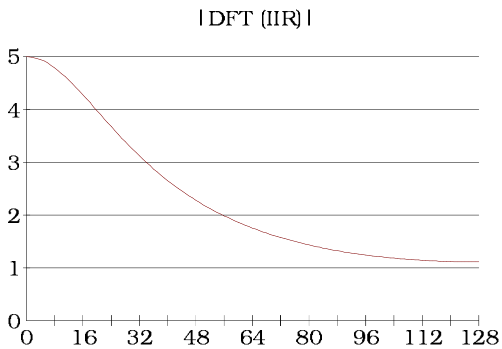
b. Represente graficamente, de um modo aproximado, a amplitude da sua resposta em frequência $|H(e^{j\omega})|$.

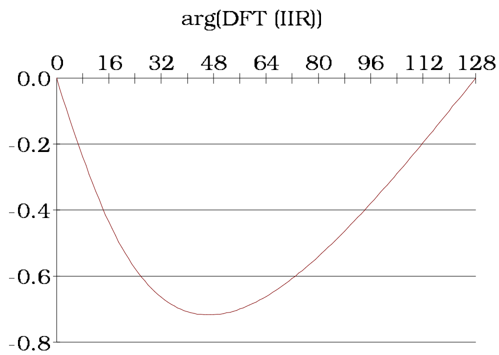
b. Calcule a sua resposta impulsional h(n).

d. Determine que efeito teria em $H(e^{j\omega})$ a substituição de x(n) por x(n-1) na equação às diferenças dada..

Solução:

$$H(z) = \frac{2}{1 - 0.7z^{-1} + 0.1z^{-2}} = \frac{2}{(1 - 0.2z^{-1})(1 - 0.5z^{-1})} \ , \ |z| > 0.5$$





3.10. Considere o sistema discreto causal com função de transferência

$$H(z) = \frac{1 - z^{-2}}{1 - 0.8\sqrt{2}z^{-1} + 0.64z^{-2}} \ .$$

a. Localize, no plano z, os polos e zeros deste sistema e a regiâo de convergência de H(z).

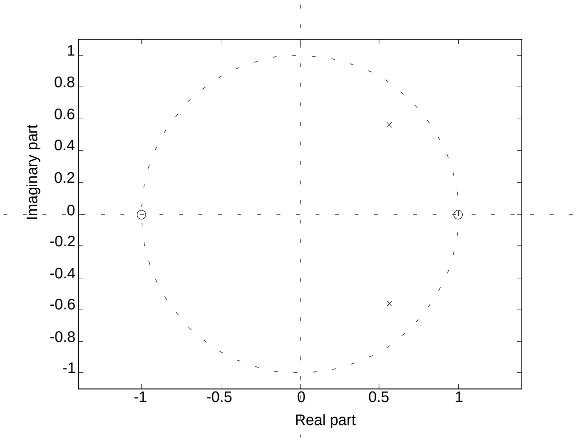
b. Determine a resposta impulsional do sistema..

c. Faça um esboço da amplitude da sua resposta em frequência.

Solução:

a. $\dfrac{0.8\sqrt{2} \pm \sqrt{1.28 - 2.56}}{2} = 0.8\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} \pm j\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, donde polos em $0.8\,e^{\pm j\frac{\pi}{4}}$; zeros em ± 1

$|z|>0.8$, por o sistema ser causal.



b. $h(n) = \dfrac{1}{2\pi}\oint_C \dfrac{(z^2 - 1)z^{n-1}}{(z-\alpha)(z-\alpha^*)}dz$, com $\alpha = 0.8e^{\pm j\frac{\pi}{4}}$

para n>0, há dois polos no interior de C e

$$h(n) = \frac{\alpha^{n+1} - \alpha^{n-1}}{\alpha - \alpha^*} + \frac{\alpha^{*n+1} - \alpha^{*n-1}}{\alpha^* - \alpha} = \frac{(\alpha - \alpha^{-1})\alpha^n - (\alpha - \alpha^{-1})^* \alpha^{*n}}{\alpha - \alpha^*}$$

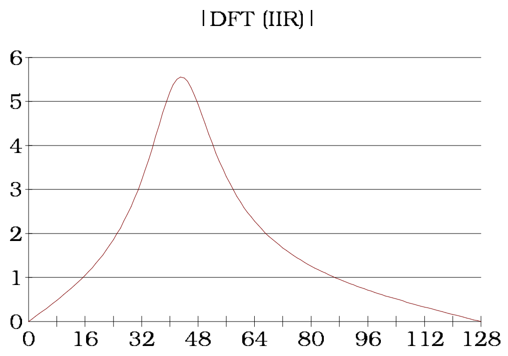
$$h(n) = \frac{2\,\mathrm{Im}\left[(\alpha - \alpha^{-1})\alpha^n\right]}{2\,\mathrm{Im}[\alpha]} = 0.8^{n-2}(-0.36\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{4}n) + 1.64\cos(\frac{\pi}{4}n))$$

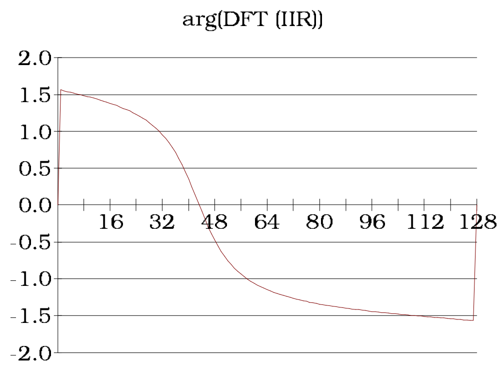
$$h(n) = 0.8^{n-2}\sqrt{0.36^2 + 1.64^2}\,\cos(\frac{\pi}{4}n - \tan^{-1}(\frac{0.36}{1.64}))\,;$$

para n=0 há um terceiro polo z=0 e

$$h(0) = 0.8^{-2}\sqrt{0.36^2 + 1.64^2}\,\cos(-\tan^{-1}(\frac{0.36}{1.64})) - \frac{1}{0.64} = \frac{1.64 - 1}{0.64} = 1\,.$$

c.





3.11. A função de transferência de um sistema discreto causal é

$$H(z) = \frac{0.375}{z^2 - 0.75z + 0.125}$$

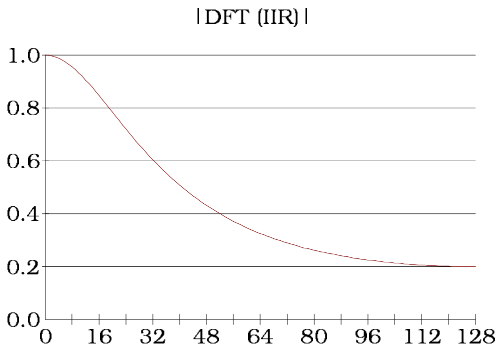
a. Escreva a equação às diferenças que realiza este sistema.

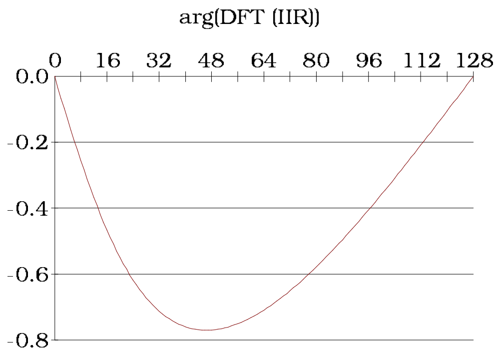
b. Verifique se o sistema é estável.

c. Determine a sua resposta impulsional h(n).

d. Represente graficamente, de uma maneira aproximada, a amplitude da sua resposta em frequência.

<u>Solução</u>:





3.12. Considere o sistema discreto com função de transferência

$$H(z) = \frac{z^3 + z^2 + z + 1}{z^4}.$$

a. Escreva a equação às diferenças que relaciona a saída com a entrada do sistema.

b. O sistema é do tipo FIR ou IIR? Justifique.

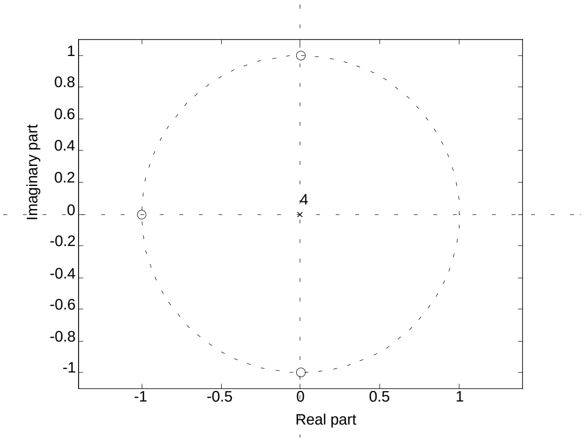
c. Faça o diagrama de polos e zeros de H(z).

d. Associou-se em série com H(z) um outro sistema discreto G(z) com função de transferência

$$G(z) = \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}}.$$

Determine a resposta impulsional do sistema resultante da associação referida.

<u>Solução</u>:



3.13. Considere o sistema discreto causal com função de transferência

$$H(z) = \frac{1 - z^{-2}}{1 - 0.9z^{-1} + 0.81z^{-2}} .$$

a. Localize, no plano z, os polos e zeros deste sistema.

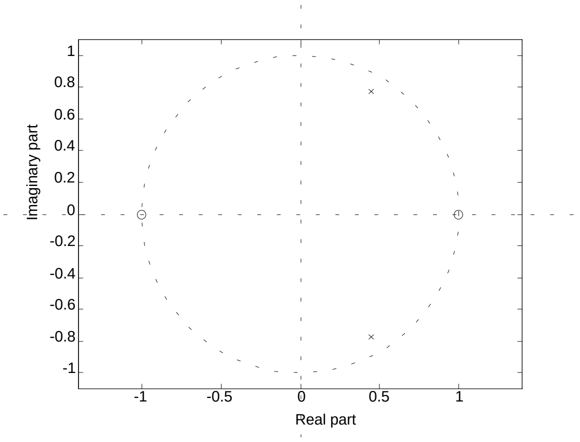
b. Determine, justificando, a região de convergência da sua função de transferência.

c. Determine a sua resposta impulsional h(n).

d. Faça um esboço da amplitude da sua resposta em frequência.

<u>Solução</u>:

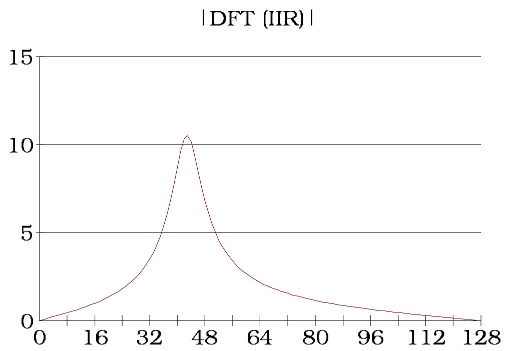
polos: $0.9e^{\pm j\frac{\pi}{3}}$; zeros: ±1

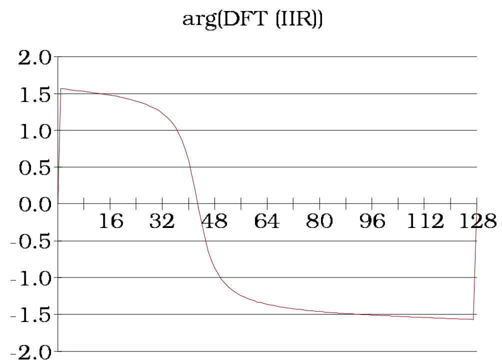


RdC: |z|>0.9, por ser causal

$$h(n) = \frac{1}{2\pi}\oint_C \frac{(1 - z^{-2})z^{n-1}}{1 - 0.9z^{-1} + 0.81z^{-2}}dz = \frac{1}{2\pi}\oint_C \frac{z^{n-1}(z^2 - 1)}{(z - 0.9e^{j\frac{\pi}{3}})(z - 0.9e^{-j\frac{\pi}{3}})}dz$$

polos: 0 (n = 0), $0.9e^{\pm j\frac{\pi}{3}}$ (α e α^*) $\therefore h(n) = -\frac{\delta(n)}{0.81} + 0.19.0.9^n \text{sen}(\frac{n\pi}{3})u(n)$





3.14. Os dois sistemas discretos seguintes são muitas vezes usados para a simulação do diferenciador ideal $H_a(j\Omega)=j\Omega$

$$y(n) = \frac{x(n) - x(n-1)}{T}$$

$$y(n) = \frac{2x(n) - 2(x(n-1)}{T} - y(n-1).$$

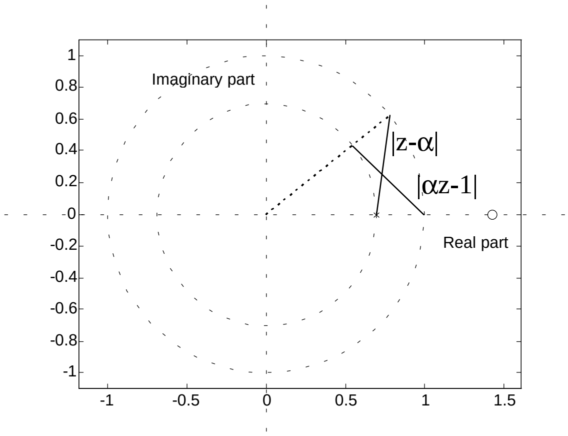
a. Determine as respectivas funções de transferência.

b. Represente graficamente as respostas em frequência correspondentes, e compare-as com a do diferenciador analógico ideal.

3.15. Mostre que o sistema discreto com função de transferência

$$H(z) = \alpha \frac{z - \alpha^{-1}}{z - \alpha}$$

é do tipo passa tudo (*all pass*), isto é, $|H(e^{j\omega})|=1$. Tente usar um método gráfico!



3.16. Considere um sistema discreto de primeira ordem, com um polo em α e um zero em $(\alpha^*)^{-1}$, $\alpha \in C$,

$$H(z) = -\alpha \frac{z-(\alpha^*)^{-1}}{z-\alpha}.$$

a. Mostre que este sistema é do tipo passa-tudo, isto é, que $|H(e^{j\omega})|=1$.

b. Determine como varia a fase de $H(e^{j\omega})$ com α, $\alpha \in R$

Solução:

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{|-ae^{j\phi}e^{j\omega} + ae^{j\phi}a^{-1}e^{j\phi}|}{|e^{j\omega} - ae^{j\phi}|}, \ \alpha = ae^{j\phi}$$

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{|-ae^{j\omega} + e^{j\phi}|}{|e^{j\omega} - ae^{j\phi}|}, \ \alpha = ae^{j\phi}$$

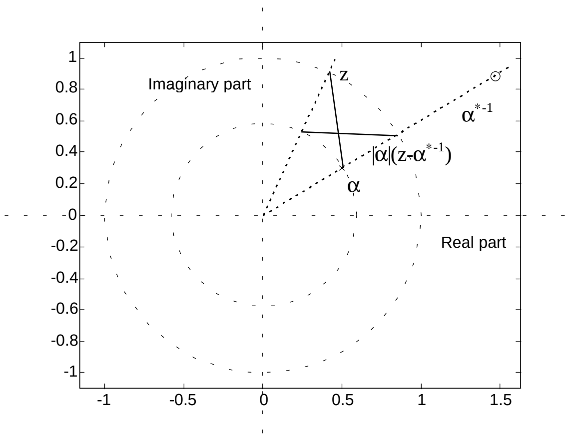
$$|H(e^{j\omega})| = \frac{|-a\cos\omega - aj\mathrm{sen}\omega + +\cos\phi + j\mathrm{sen}\phi|}{|\cos\omega + j\mathrm{sen}\omega - a\cos\phi - ja\mathrm{sen}\phi|}$$

$$|H(e^{j\omega})|^2 = \frac{(-a\cos\omega + \cos\phi)^2 + (-a\mathrm{sen}\omega + \mathrm{sen}\phi)^2}{(\cos\omega - a\cos\phi)^2 + (\mathrm{sen}\omega - a\mathrm{sen}\phi)^2}$$

$$|H(e^{j\omega})|^2 = \frac{a^1 + 1 - 2a\cos\omega\cos\phi - 2a\mathrm{sen}\omega\mathrm{sen}\phi}{1 + a^2 - 2a\cos\omega\cos\phi - 2a\mathrm{sen}\omega\mathrm{sen}\phi}$$

$$|H(e^{j\omega})|^2 = 1 \ .$$

Um estudo gráfico simples teria permitido chegar mais rapidamente a esta conclusão,



pois, como ressalta da figura,

$$|\alpha|.|e^{j\omega} - \alpha^{*-1}| = |e^{j\omega} - \alpha| \ .$$

Em termos de fase, e para $\alpha \in R$

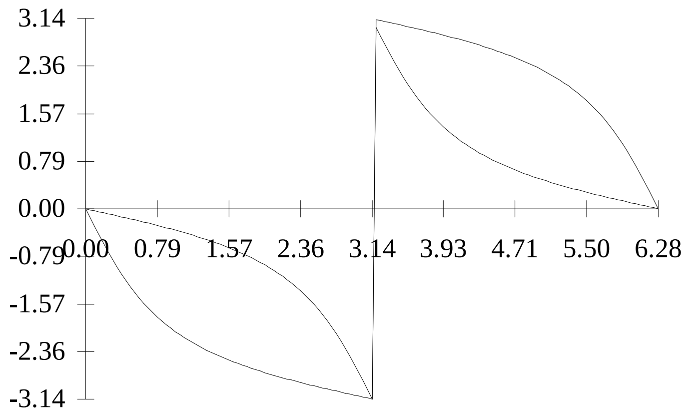
$$\arg(H(e^{j\omega})) = \frac{\arg(-\alpha\cos\omega - j\alpha\mathrm{sen}\omega + 1)}{\arg(\cos\omega + j\mathrm{sen}\omega - \alpha)}$$

$$\arg(H(e^{j\omega})) = \text{arctg}\frac{-\alpha\,\text{sen}\omega}{-\alpha\cos\omega + 1} - \text{arctg}\frac{\text{sen}\omega}{\cos\omega - \alpha}$$

$$\text{tg}\left[\arg(H(e^{j\omega}))\right] = \frac{1 - \left(\frac{-\alpha\cos\omega + 1}{-\alpha\,\text{sen}\omega}\right)\left(\frac{\text{sen}\omega}{\cos\omega - \alpha}\right)}{\frac{-\alpha\cos\omega + 1}{-\alpha\,\text{sen}\omega} + \frac{\text{sen}\omega}{\cos\omega - \alpha}}$$

$$\arg(H(e^{j\omega})) = \text{arctg}\frac{(1-\alpha^2)\,\text{sen}\omega}{2\alpha - (1+\alpha^2)\cos\omega}$$

Graficamente, para $\alpha = \pm 0.5$,



3.17. Considere o sistema discreto causal com função de transferência

$$H(z) = \frac{z(z+0.8)}{(z-\alpha)(z-\alpha^*)}\ ,\ \alpha = 0.8e^{j\frac{\pi}{6}}\ .$$

a. Verifique se o sistema é estável.

b. Calcule a sua resposta impulsional h(n).

c. Represente graficamente, de um modo aproximado, a amplitude da sua resposta em frequência.

d. Determine a equação às diferenças que realiza o sistema.

3.18. Considere o sistema discreto causal com função de transferência

$$H(z) = \frac{-0.05}{1 - 2.05z^{-1} + z^{-2}}$$

a. Verifique se o sistema é estável.

b. Determine a sua resposta impulsional h(n).

c. Determine a sua resposta ao degrau unitário d(n).

3.19. Considere um sistema discreto causal com dois polos em $\pm 0.8e^{j\frac{\pi}{4}}$ e um zero em 0.

a. Determine a equação às diferenças que rege o funcionamento do sistema.

b. Determine a sua resposta impulsional.

c. Represente graficamente a amplitude da sua resposta em frequência $|H(e^{j\omega})|$.

Solução:

a.
$$H(z) = \frac{Az}{(z-\alpha)(z-\alpha^*)}, |z| > 0.8, \alpha = 0.8e^{j\frac{\pi}{4}}$$

$$H(z) = \frac{Az^{-1}}{1-0.8\sqrt{2}z^{-1} + 0.64z^{-2}}, |z| > 0.8$$

$$y(n) = Ax(n-1) + 0.8\sqrt{2}y(n-1) - 0.64y(n-2)$$

b.
$$h(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint \frac{Az^n}{(z-\alpha)(z-\alpha^*)}dz$$

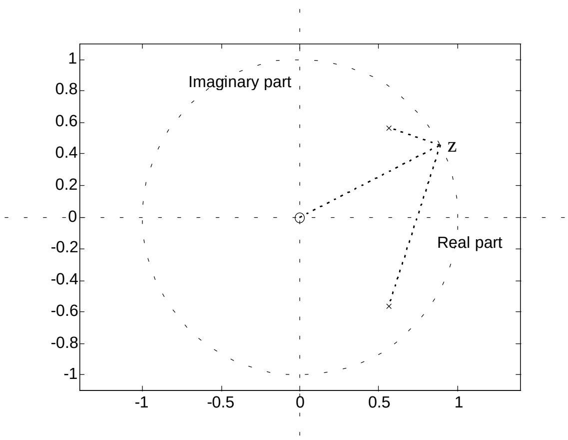
polos: em α, α^* e 0 (n<0); n<0 $\Rightarrow$ h(n)=0 (sistema causal)

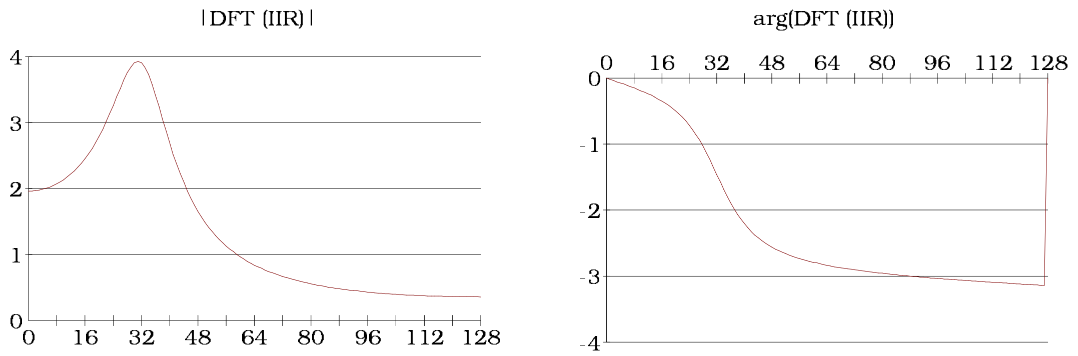
$$n \geq 0 \Rightarrow h(n) = \left(\frac{A\alpha^n}{\alpha-\alpha^*} + \frac{A\alpha^{*n}}{\alpha^*-\alpha}\right)$$

$$h(n) = A\sqrt{2}\,0.8^{n-1}\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}n\right)u(n)$$

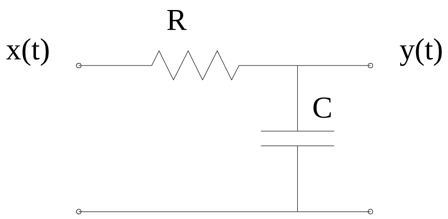
c. o gráfico é intuitivo, estando representado para A=1; podem calcular-se facilmente alguns valores particulares, tais como

$$H(e^{j0}) = \frac{1}{(1-0.4\sqrt{2})^2 + (0.4\sqrt{2})^2} = 1.966$$





3.20. Considere o filtro passa-baixo RC elementar



a. Determine a sua resposta $d_C(t)$ ao degrau unitário u(t).

b. Determine e represente graficamente a resposta em frequência do sistema discreto cuja resposta d(n) ao degrau unitário u(n) é

$$d(n)=d_C(nT) ,$$

para T=RC/2 e para T=RC/20.

<u>Solução</u>:

$$d_c(t) = (1-e^{-\frac{t}{RC}})u(t)$$

Á entrada u(n) corresponde a saída

$$d(n) = u(n) - e^{-\frac{nT}{RC}}u(n);$$

calculando as respectivas transformadas em z

$$U(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}, |z|>1$$

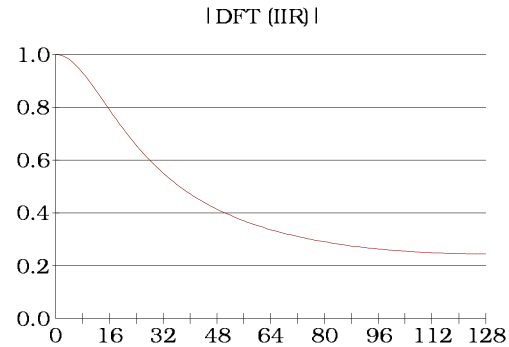
$$D(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-\frac{T}{RC}}z^{-1}}, |z|>1$$

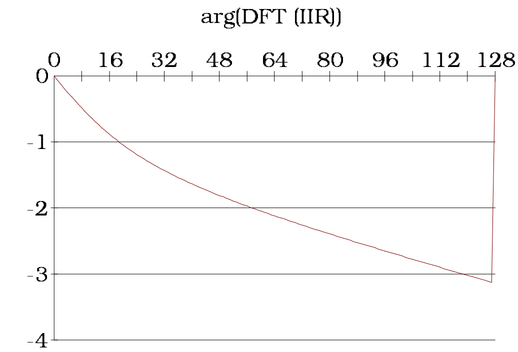
obtem-se

$$H(z) = \frac{D(z)}{U(z)} = \frac{\dfrac{1}{1-z^{-1}} - \dfrac{1}{1-e^{-\frac{T}{RC}}z^{-1}}}{\dfrac{1}{1-z^{-1}}}$$

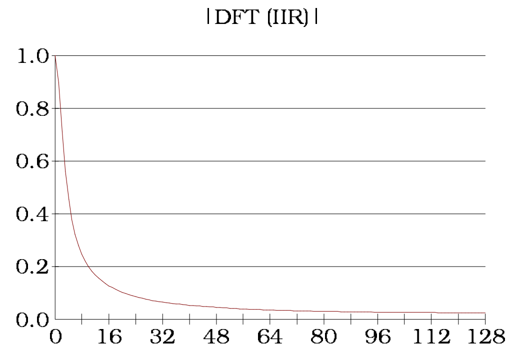
$$H(z) = 1 - \frac{1-z^{-1}}{1-e^{-\frac{T}{RC}}z^{-1}} = \frac{(1-e^{-\frac{T}{RC}})z^{-1}}{1-e^{-\frac{T}{RC}}z^{-1}}, |z| > e^{-\frac{T}{RC}};$$

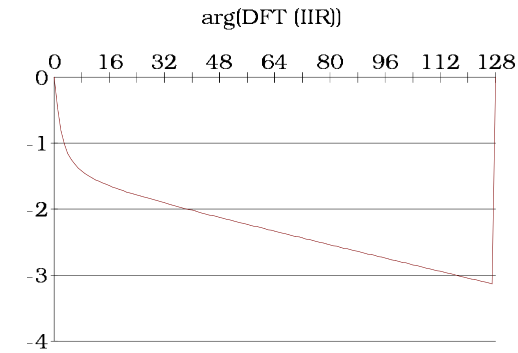
graficamente, para T=RC/2,





e para T=RC/20





3.21. Seja x(n) um sinal discreto e X(z) a sua transformada em z.

a. Determine, em função de x(n), o sinal discreto cuja transformada em z é $X(z^N)$, em que N é um inteiro positivo.

b. Determine o sinal causal g(n) cuja transformada em z é $G(z) = \dfrac{z^3}{z^3 - 1}$ (pode utilizar o resultado obtido na alínea a.).

4. Transformada de Fourier Discreta (DFT)

4.1. Seja x(n) um sinal discreto com duração limitada ao intervalo [0, N-1].

a. Mostre como poderia obter a DFT de x(n), X(k), a partir da sua transformada em z, X(z).

b. Mostre igualmente como poderia obter a transformada em z de x(n), a partir da sua DFT.

4.2. Suponha que um sinal contínuo $x_c(t)$ é amostrado a 10.24 kHz.

Determine que comprimento de DFT deve utilizar para poder calcular o seu espectro com uma resolução (na frequência) de 20 Hz.

4.3. Considere um sinal discreto x(n) de comprimento N e a sua DFT X(k). Determine a DFT dos sinais discretos de comprimento 2N

a. $$y(n) = \begin{cases} x(\frac{n}{2}) \text{ , se n par} \\ 0 \text{ , se nao} \end{cases}$$

b. $$y(n) = \begin{cases} x(n) \text{ , se } 0 \le n \le N-1 \\ x(n-N) \text{ , se nao} \end{cases}$$

c. $$y(n) = \begin{cases} x(n) \text{ , se } 0 \le n \le N-1 \\ 0 \text{ , se nao} \end{cases}$$

Solução:

a. Y(k) = X(k) , k = 0, ..., 2N-1

b. $$Y(k) = \begin{cases} 2X(\frac{k}{2}) \text{ , se k par} \\ 0 \text{ , se nao} \end{cases}$$

c. $$Y(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_{2N}{}^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} X(r) W_N{}^{-nr} W_{2N}{}^{nk}$$

k par:

$$Y(2k) = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} X(r) \sum_{n=0}^{N-1} W_N{}^{n(k-r)}$$

e como o segundo somatório vale 0 se k-r≠0 e N se k-r=0

Y(2k) = X(k) ;

k impar:

$$Y(2k+1) = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} X(r) \sum_{n=0}^{N-1} W_N{}^{n(k-r)} W_{2N}{}^{n} = \frac{2}{N} \sum_{r=0}^{N-1} \frac{X(r)}{1 - W_N{}^{k-r+\frac{1}{2}}} \; .$$

(esta alínea, como qualquer das outras, resolve-se facilmente atendendo à relação entre a DFT e a transformada em z).

4.4. Considere o sinal discreto de comprimento 32

$$x(n) = \text{sen}(\frac{6\pi n}{32}) \ , \ n = 0..31 \ .$$

Determine a sua DFT X(k).

4.5. Determine a DFT dos seguintes sinais discretos de comprimento N

a. $x(n) = \text{sen}(\frac{2\pi}{N} n)$, n=0, .., N-1.

b. $x(n) = \text{sen}^2(\frac{2\pi}{N} n)$, n=0, .., N-1.

<u>Solução</u>:

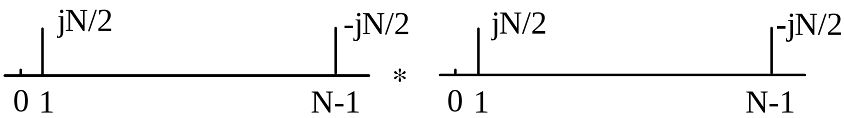
a. $\text{sen}(\frac{2\pi}{N} n) = \frac{1}{2j} e^{j\frac{2\pi}{N}n} - \frac{1}{2j} e^{-j\frac{2\pi}{N}n}$

como, por definição, $x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$ tem - se $X(1) = -X(N-1) = j\frac{N}{2}$

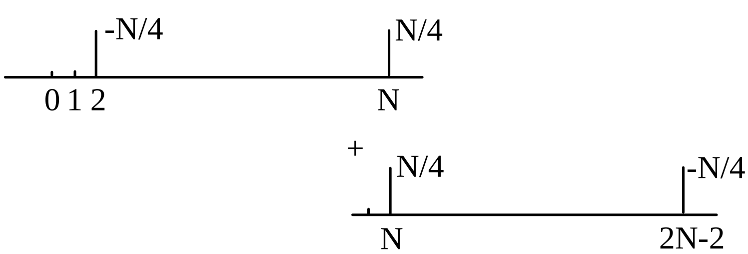
b. $\text{sen}^2(\frac{2\pi}{N} n) = (\frac{1}{2j} e^{j\frac{2\pi}{N}n} - \frac{1}{2j} e^{-j\frac{2\pi}{N}n})^2 = -\frac{1}{4} e^{j\frac{4\pi}{N}n} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} e^{-j\frac{4\pi}{N}n}$

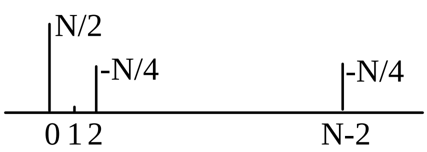
então $X(0) = \frac{N}{2}$, $X(2) = X(N-2) = -\frac{N}{4}$

como se poderia concluir, de outro modo, através da propriedade da convolução da DFT

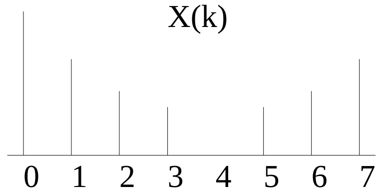


e, pelo método gráfico bem conhecido, e atendendo que é necessário dividir por N o resultado





4.6. Um sinal discreto x(n) de comprimento 8 tem DFT X(k) real e par.



a. Diga, justificando, se pode afirmar que o sinal x(n) é real e/ou par.

b. Represente graficamente a DFT do sinal discreto de comprimento 16

$y(n) = x(\frac{n}{2})$, se n par <u>ou</u> y(n) = 0, se n ímpar.

4.7. Calcule a DFT do sinal discreto

$$x(n) = 0.5(1 - \cos\frac{2\pi n}{N}) \ , \ n = 0..N-1 .$$

4.8. A transformada em z, X(z), do sinal discreto $x(n) = 3^{-n}u(n)$ é amostrada em oito pontos igualmente espaçados sobre a circunferência unitária do plano z

$$Y(k) = X(z)\Big|_{z = e^{jk\frac{2\pi}{8}}} \ , \quad k = 0, .., 7 .$$

Determine a transformada de Fourier discreta inversa de Y(k), k = 0, .., 7.

<u>Solução</u>:

há *aliasing* no domínio dos tempos;

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n} z^{-n}$$

$$Y(k) = \sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n} e^{-j\frac{2\pi}{8}nk} = \sum_{n=0}^{7}\sum_{r=0}^{\infty} 3^{-(8r+n)} e^{-j\frac{2\pi}{8}(8r+n)k} = \sum_{n=0}^{7}\sum_{r=0}^{\infty} 3^{-(8r+n)} e^{-j\frac{2\pi}{8}nk}$$

$$y(n) = \sum_{r=0}^{\infty} 3^{-(8r+n)} = \frac{1}{1-3^{-8}} 3^{-n}, \ n = 0, \ .., \ 7$$

4.9. Considere o sinal discreto $x(n)=2^{-n}u(n)$ e a sua transformada de Fourier $X(e^{jw})$.

Determine o sinal discreto y(n) de comprimento N cuja DFT é

$$Y(k) = X(e^{j\frac{2\pi}{N}k}), k = 0, \ldots, N-1.$$

<u>Solução</u>:

Verifica-se aqui o fenómeno do *aliasing*, e poderíamos escrever imediatamente o resultado ... Fazendo "as contas", temos

$$X(z) = \sum_{r=0}^{+\infty} 2^{-r} z^{-r} \ , \ |z| \ > \ \frac{1}{2}$$

$$Y(k) = \sum_{r=0}^{+\infty} 2^{-r} e^{-j\frac{2\pi rk}{N}}$$

$$y(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{r=0}^{+\infty} 2^{-r} e^{-j\frac{2\pi rk}{N}} \ W_N{}^{-nk} = \frac{1}{N}\sum_{r=0}^{+\infty} 2^{-r} \sum_{k=0}^{N-1} W_N{}^{(r-n)k}$$

e como o segundo somatório vale 0 se r-n≠0, N, 2N, ... e N se r-n=0, N, 2N, ...

$$y(n) = \sum_{r=0}^{+\infty} 2^{-n+rN} \ , \ n \ = \ 0. \ \ldots, \ N-1.$$

4.10. Considere um sinal contínuo periódico $x_a(t)$, de período T. Estabeleça (por exemplo, sem recorrer ao tratamento analítico da questão) a relação entre os coeficientes do desenvolvimento em série de Fourier de $x_a(t)$ e a DFT de comprimento N de uma amostragem de um período desse sinal em N pontos igualmente espaçados.

4.11. Sejam $X(e^{j\omega})$ a transformada de Fourier do sinal discreto x(n) = u(n) - u(n-8) e X(k) uma amostragem de $X(e^{j\omega})$ em 6 pontos igualmente espaçados no intervalo [0, 2π[

$X(k) = X(e^{j\omega})$, ω=kπ/3, k=0 .. 5.

Determine a iDFT de X(k).

Solução:

Ocorre aliasing: iDFT[x(k)]=(2, 2, 1, 1, 1, 1).

4.12. A DFT de um sinal discreto real de comprimento N pode ser calculada através de uma única DFT complexa de comprimento N/2.

Mostre que se um sinal discreto for real e par (ou real e ímpar), a sua DFT pode ser calculada através de uma única DFT complexa de comprimento N/4.

4.13. A DFT de um sinal discreto x(n), de comprimento N, é X(k). Determine, em função de X(k), a DFT do sinal discreto

$$y(n) = (0.5 - 0.5\cos(\frac{2n\pi}{N}))x(n) \ .$$

4.14. Suponha que se pretende calcular a DFT de um sinal discreto de comprimento N tal que

$x(n) = 0$ para $M \le n \le N-1$,

utilizando o algoritmo FFT decimação no tempo que estudou.

Mostre como se poderia modificar o algoritmo de modo a eliminar-se o cálculo de *butterflies* em que os dois elementos utilizados são 0 (chama-se a esta operação *pruning*).

4.15. Demonstre o teorema de Parseval para a DFT

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2 \ .$$

4.16. Suponha que se pretende calcular a convolução de um sinal discreto real, x(n), de comprimento 100 000, com um sinal discreto real, h(n), de comprimento 100, pelo método *overlap-save* e utilizando FFTs de comprimento 1024.

Determine quantas FFTs seria necessário realizar.

4.17. Pretende-se realizar a convolução discreta de dois sinais, x(n), de comprimento 4096, e h(n), de comprimento 128.

Determine o número de DFTs de comprimento 512 que é necessário realizar se usar

a. o método *overlap-add*

b. o método *overlap-save*.

4.18. Pretende-se filtrar um sinal discreto x(n), de comprimento indeterminado, com um filtro FIR, de comprimento 71, utilizando a convolução rápida, pelo método *overlap-add*.

Determine o comprimento N da FFT raiz 2 que minimiza o número de multiplicações a realizar por amostra à saída. Considere que N não pode exceder 2048 e que pode desprezar as multiplicações realizadas para o cálculo da DFT da resposta impulsional do filtro.

<u>Solução</u>:

Analisam-se os cinco comprimentos possíveis:

N	L	n.a	n.b	n.m	m/a
128	58	7	64	896	15.448
256	186	8	128	2048	11.011
512	442	9	256	4608	10.425
1024	954	10	512	10240	10.734
2048	1978	11	1024	22528	11.389

4.19. Diga como calcularia a DFT de um sinal complexo x(n) de comprimento 2N, utilizando um programa de computador para o cálculo da DFT de um sinal complexo de comprimento N.

Solução:

por exemplo, pelo algoritmo de Cooley & Tukey:

```
for n=0 to N-1; g(n)=x(2n); h(n)=x(2n+1); next n
G(k)=DFT(g(n)); H(k)=DFT(h(n))
for k=0 to N-1; X(k)=G(k)+W^k_2N H(k); X(k+N)=G(k)-W^k_2N H(k); next k
```

5. Outras Transformadas Discretas

5.1. Desenvolva um programa de computador para

a. O algoritmo FFT de raiz dupla (*split radix*).

b. O algoritmo CZT (*chirp z-transform*).

Utilize a linguagem de programação que preferir.

Não se esqueça que deve desenvolver um interface com o utilizador que lhe permita testar o seu programa.

6. Filtros Digitais

6.1. Os filtros digitais podem ser do tipo recursivo ou não recursivo.

a. Distinga estes dois tipos.

b. Em que critérios se deve um projectista basear para optar por um determinado tipo de filtro, numa situação concreta.

6.2.

a. Defina filtro digital do tipo FIR.

b. Indique situações em que os filtros digitais do tipo FIR mostram ou podem mostrar vantagens sobre os filtros digitais do tipo IIR.

6.3.

a. Determine a resposta impulsional $h_H(n)$ de um filtro digital passa alto, ideal, com frequência de corte 0.8π.

b. A partir do filtro referido em a., projectou-se, pelo método da janela, utilizando a janela de Hamming, um filtro FIR, causal, de comprimento 64. Determine um valor aproximado da largura da banda de transição do filtro obtido.

6.4. Pretende-se projectar um filtro digital passa-banda, do tipo FIR, tal que

$$H(e^{j\Omega T}) \approx \begin{cases} 0 & |\Omega| < 400 \text{ rad / s} \\ 1 & 400 \le |\Omega| \le 600 \text{ rad / s} \\ 0 & 600 < |\Omega| \le 1000 \text{ rad / s} \end{cases}$$

para a frequência angular de amostragem $\Omega_s = \frac{2\pi}{T} = 2000 \text{ rad / s}$.

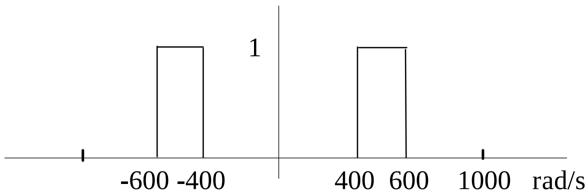
a. Determine a resposta impulsional do filtro analógico protótipo.

b. Determine os coeficientes do filtro digital, utilizando uma janela de Hanning de comprimento 7.

c. Faça um esboço da resposta em frequência do filtro digital.

Solução:

a.

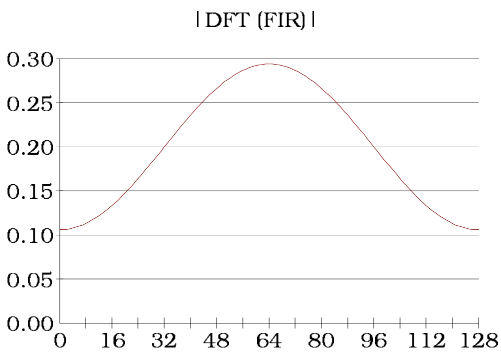


$$h_c(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H_c(j\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega = \frac{600}{\pi}\text{senc}(600t) - \frac{400}{\pi}\text{senc}(400t)$$

b. $h(n) = (0.6\text{senc}(0.6\pi n) - 0.4\text{senc}(0.4\pi n))w(n)$

n	0.6senc(0.6πn)	0.4senc(0.4πn)	$h_d(n)$	ω(n)	h(n)
-3	-0.062	-0.062	0.000	0.000	0.000
-2	-0.094	0.094	-0.187	0.250	-0.047
-1	0.303	0.303	0.000	0.750	0.000
0	0.600	0.400	0.200	1.000	0.200
1	0.303	0.303	0.000	0.750	0.000
2	-0.094	0.094	-0.187	0.250	-0.047
3	-0.062	-0.062	0.000	0.000	0.000

c. gráfico aproximado



6.5. O programa a seguir implementa um filtro digital

```
program filtro_digital;

var xn, xnm1, yn, ynm1 : integer;

procedure read_ad (var x : integer);
begin
{leitura de um conversor AD de 12 bit}
end;

procedure write_da (y : integer);
begin
{escrita num conversor DA de 12 bit}
end;

begin
     xnm1 := 0;
     ynm1 := 0;
     repeat
          read_ad (xn);
          yn := xn div 2 + xnm1 div 4 - ynm1 div 4;
          write_da (yn);
          xnm1 := xn;
          ynm1 := yn
     until false
end.
```

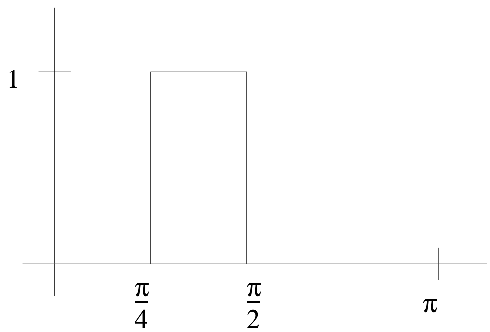
Determine a função de transferência do filtro.

Solução:

$$y(n) = \frac{1}{2}x(n) + \frac{1}{4}x(n-1) - \frac{1}{4}y(n-1) \Rightarrow H(z) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}z^{-1}}{1 + \frac{1}{4}z^{-1}}$$

6.6. Determine, pelo método da invariância da resposta ao degrau unitário, à frequência de amostragem f_S=10 kHz, um filtro digital passa-baixo, de primeira ordem, derivado de um filtro analógico do tipo RC com frequência superior de corte f_C=1 kHz .

6.7. Pretende-se projectar um filtro digital com a resposta em frequência indicada.



a. Determine a resposta impulsional $h_d(n)$ do filtro pretendido.

b. Utilizando uma janela de Hamming, projecte um filtro FIR, causal, de fase linear, com comprimento 5, que aproxime o filtro pretendido.

c. Represente graficamente a amplitude da resposta em frequência do filtro obtido.

6.8. Considere o filtro analógico passa baixo

$$H_a(s) = \frac{1}{1 + 0.08s} \quad .$$

a. Determine a frequência de corte Ω_c (atenuação igual a 3 dB) deste filtro.

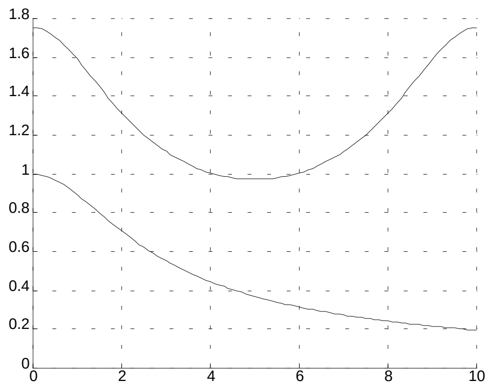
b. Determine o filtro digital que se obtem de $H_a(s)$ pelo método da invariância da resposta impulsional, para uma frequência de amostragem de 10 Hz.

c. Represente graficamente a amplitude da resposta em frequência deste filtro digital e a do filtro analógico original, e explique as eventuais diferenças entre ambas.

Solução:

$$H_a(s) = \frac{1}{1 + 0.08s} = \frac{12.5}{s + 12.5} \Rightarrow \Omega_c = 12.5 \text{ rad / s} \therefore F_c = 1.984 \text{ Hz}$$

$$H(z) = \frac{1.25}{1 - e^{-1.25} z^{-1}}$$



nota-se um acentuado efeito de *aliasing*.

6.9. Pretende-se projectar um filtro digital passa-baixo, usando o método da transformação bilinear, a partir de um filtro de Butterworth de 3ª ordem, de tal modo que à frequência de amostragem de 10 kHz a sua frequência superior de corte seja de 1 kHz.

a. Determine a frequência superior de corte do filtro analógico protótipo.

b. Localize, no plano z, os polos do filtro digital.

c. Determine a partir de que frequência a atenuação do filtro digital é melhor que 60 dB.

Solução:

de acordo com o enunciado

a. $$\Omega_c = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega_c}{2} = 20000 \operatorname{tg} \frac{\pi}{10} = 6498.4 \text{ rad / s}$$

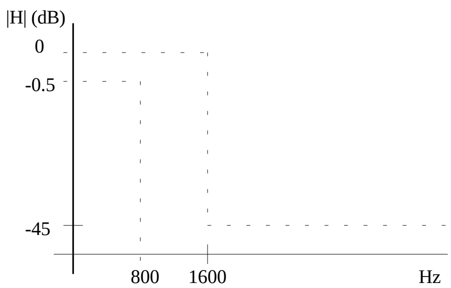
c. $$10\log\frac{1}{1+(\frac{\Omega}{6498.4})^6} < -60 \Rightarrow (\frac{\Omega}{6498.4})^6 > 999999 \Rightarrow \Omega = 64984$$

donde

$$\omega = 2\mathrm{tg}^{-1}\frac{\Omega T}{2} = 2.5445 \text{ rad}$$

6.10. Determine, pelo método da transformação bilinear, um filtro digital passa-baixo, de primeira ordem, derivado de um filtro analógico do tipo RC, e com frequência superior de corte f_C=500 Hz à frequência de amostragem f_S=10 kHz.

6.11. Pretende-se projectar um filtro digital passa baixo, com as características indicadas, para a frequência de amostragem F=4000 Hz, utilizando um filtro analógico do tipo Butterworth e a transformação bilinear.



a. Determine a ordem do filtro analógico que vai servir de base ao projecto.

b. Determine a localização dos seus polos e zeros no plano s.

6.12. Projecte um filtro digital passa baixo, do tipo Butterworth, utilizando a transformação bilinear, com as características indicadas a seguir, para uma frequência de amostragem F=5000 Hz.