Resolução do Trabalho n.º 1 de PDS – 2001/02

Trabalho 1

a. $H(z) = \dfrac{0.375}{z^2 - 0.75z + 0.125} = \dfrac{0.375z^{-2}}{1 - 0.75z^{-1} + 0.125z^{-2}}$

donde se tira

$$y(n) = 0.375x(n-2) + 0.75y(n-1) - 0.125y(n-2)\,.$$

b. Um sistema discreto causal e estável tem todos os seus pólos no interior da circunferência unitária do plano z.
Os pólos de H(z) – os zeros do denominador de H(z) – são **0.25** e **0.5**, ou seja, estão ambos no interior da circunferência unitária, logo o sistema é estável.

c. A Região de Convergência (RoC) deste sistema é o exterior de um círculo, pois o sistema é causal. Como os pólos do sistema são 0.25 e 0.5, e como estes limitam a RoC, vê-se que |z| > 0.5.

Pelo método das fracções simples, vem

$$H(z) = \frac{1.5}{z-0.5} - \frac{1.5}{z-0.25} = 1.5\left(\frac{1}{1-0.5z^{-1}} - \frac{1}{1-0.25z^{-1}}\right)z^{-1}$$

donde

$$h(n) = 1.5\,(0.5^{n-1} - 0.25^{n-1})\,u(n-1).$$

d. $H(e^{j\omega}) = \dfrac{0.375}{e^{j2\omega} - 0.75e^{j\omega} + 0.125}$

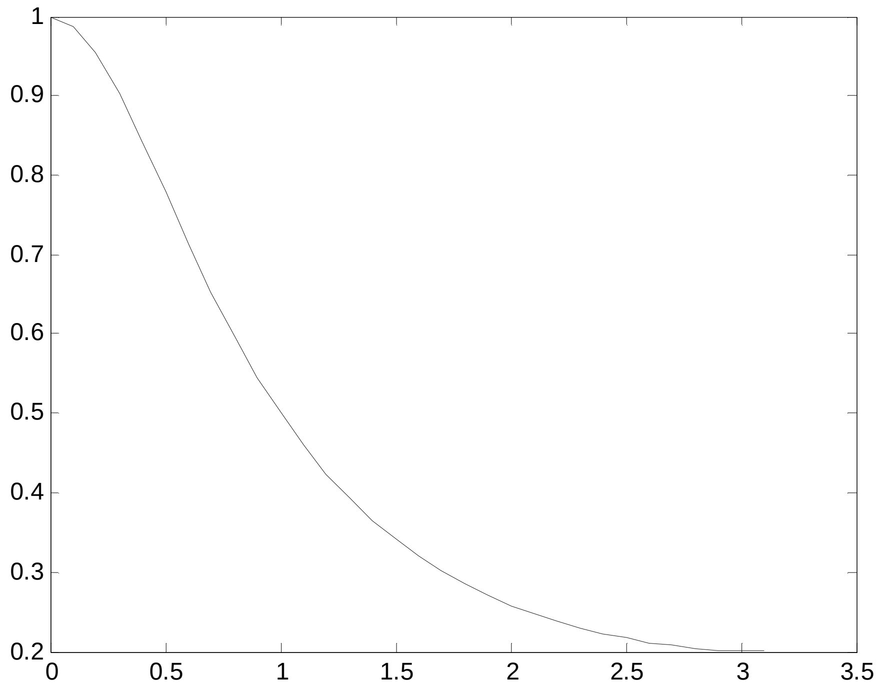
Pode rescrever-se esta equação do seguinte modo:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{0.375}{\cos 2\omega - 0.75\cos\omega + 0.125 + j(\sin 2\omega - 0.75\sin\omega)}$$

donde se tira

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = \frac{0.375}{\sqrt{(\cos 2\omega - 0.75\cos\omega + 0.125)^2 + (\sin 2\omega - 0.75\sin\omega)^2}}$$

Assim sendo, graficamente a amplitude da resposta em frequência é:



Trabalho 2

a. $$H(z) = \frac{0.375}{z^2 - 0.75z + 0.125} = \frac{0.375z^{-2}}{1 - 0.75z^{-1} + 0.125z^{-2}}$$

donde se tira

$$y(n) = 0.375x(n-2) + 0.75y(n-1) - 0.125y(n-2)$$

b. A Região de Convergência (RoC) deste sistema é o exterior de um círculo, pois o sistema é causal. Como os pólos do sistema são 0.25 e 0.5, e como estes limitam a RoC, vê-se que |z| > 0.5.

Pelo método das fracções simples, vem

$$H(z) = \frac{1.5}{z-0.5} - \frac{1.5}{z-0.25} = 1.5\left(\frac{1}{1-0.5z^{-1}} - \frac{1}{1-0.25z^{-1}}\right)z^{-1}$$

donde

h(n) = 1.5 (0.5^{n-1} – 0.25^{n-1}) u(n-1).

Como se pode ver, a resposta impulsional é infinita (tem um número infinito de termos diferentes de zero), logo o sistema é do tipo IIR.

c. Os pólos do sistema são **0.25** e **0.5** (correspondem aos zeros do denominador). A função não tem zeros.

Trabalho 3

a. Em primeiro lugar determinam-se os pólos do sistema. Os pólos – zeros do denominador – são **-0.5** e **-0.25**.

Para o cálculo da inversa da transformada em z, podem utilizar-se dois métodos: o da decomposição em fracções simples e o método do integral de linha.

Para o primeiro método, vem

$$H(z) = \frac{4z}{z+0.5} - \frac{3z}{z+0.25} = \frac{4}{1+0.5z^{-1}} - \frac{3}{1+0.25z^{-1}}\ .$$

Daqui tira-se

$$h(n) = -4\times 0.5^n u(n) + 3\times 0.25^n u(n) = \left(3\times 0.25^n - 0.5^{n-2}\right)u(n)\ .$$

Pelo segundo método, vem

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_C H(z)z^{n-1}dz = \frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{z^{n-1}\left(1-0.5z^{-1}\right)}{1+0.75z^{-1}+0.125z^{-2}}dz = \frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{z^{n-1}\left(z^2-0.5z\right)}{(z+0.5)(z+0.25)}dz$$
$$= \frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{z^n(z-0.5)}{(z+0.5)(z+0.25)}dz$$
.

Como o sistema é causal (|z| > 0.5), não há pólos para n < 0. Para n ≥ 0 há dois pólos, um em -0.25 e outro em -0.5, ambos pertencentes ao interior do contorno.

Para o pólo em -0.25, vem

$$h(n) = 3\times 0.25^n u(n)\ .$$

Para o pólo em -0.5, fica

$$h(n) = -0.5^{n-2}u(n)\ .$$

Combinando os resultados dos 2 pólos, vem

$$h(n) = -4\times 0.5^n u(n) + 3\times 0.25^n u(n) = \left(3\times 0.25^n - 0.5^{n-2}\right)u(n)\ .$$

b. Neste caso, o sistema tem um pólo em **0.5** e outro em **-0.5**. Assim sendo, pelo método do integral de linha, fica

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_C H(z)z^{n-1}dz = \frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{z^{n-1}\left(1-0.5z^{-1}\right)}{1-0.25z^{-2}}dz = \frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{z^{n-1}\left(z^2-0.5z\right)}{(z-0.5)(z+0.5)}dz$$
$$= \frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{z^n(z-0.5)}{(z-0.5)(z+0.5)}dz$$

Para n <0, *h(n) = 0*, pois o sistema é causal. Para n $\geq$ 0, há dois pólos no interior do contorno: 0.5 e -0.5. Contudo, a expressão anterior pode ser simplificada, ficando apenas

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{z^n}{(z+0.5)}dz\ .$$

Neste caso, considera-se apenas o pólo em -0.5, vindo

Por último, para o pólo em -0.5, $h(n) = -0.5^n u(n)$.

Ou seja,

$$h(n) = -0.5^n u(n)\ .$$

De referir que se se considerar a expressão

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{z^n(z-0.5)}{(z-0.5)(z+0.5)}dz$$

e se se fizer o cálculo para o pólo em 0.5, este dá *h(n) = 0*, pelo que o resultado final é o mesmo.

c. Neste caso, o sistema tem um pólo em $\mathbf{a^{-1}}$. Desenvolvendo, vem

$$H(z) = \frac{z-a}{1-az} = -a^{-1}\frac{z-a}{z-a^{-1}} = \frac{-a^{-1}z}{z-a^{-1}} + \frac{1}{z-a^{-1}} = \frac{-a^{-1}z}{z-a^{-1}} + \frac{z\cdot z^{-1}}{z-a^{-1}}$$

donde se tira

$$h(n) = -a^{-1-n}u(n) + a^{-n+1}u(n-1)$$