PROCESSAMENTO DIGITAL DE SINAL

Frequência de 2002/01/10 – Resolução

1.

a. Sabe-se que y(n) = x(n) * h(n); por outro lado, no domínio da transformada em z, tem-se que Y(z) = X(z)·H(z). Qualquer dos processos terá de conduzir ao mesmo resultado.
No primeiro caso, vem:

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=0}^{3} x(k)\cdot h(n-k) = \sum_{k=0}^{2} h(k)\cdot x(n-k)$$

Donde se pode tirar

$$y(0) = \sum_{k=0}^{2} h(k)\cdot x(0-k) = h(0)\cdot x(0) + h(1)\cdot x(-1) + h(2)\cdot x(-2) = 0.5\times 0.5 = 0.25$$

$$y(1) = \sum_{k=0}^{2} h(k)\cdot x(1-k) = h(0)\cdot x(1) + h(1)\cdot x(0) + h(2)\cdot x(-1) = 0.5\times 1 + 1\times 0.5 = 1$$

$$y(2) = \sum_{k=0}^{2} h(k)\cdot x(2-k) = h(0)\cdot x(2) + h(1)\cdot x(1) + h(2)\cdot x(0) = 0.5\times 0 + 1\times 1 + 0.5\times 0.5 = 1.25$$

$$y(3) = \sum_{k=0}^{2} h(k)\cdot x(3-k) = h(0)\cdot x(3) + h(1)\cdot x(2) + h(2)\cdot x(1) = 0.5\times 1 + 1\times 0 + 0.5\times 1 = 1$$

$$y(4) = \sum_{k=0}^{2} h(k)\cdot x(4-k) = h(0)\cdot x(4) + h(1)\cdot x(3) + h(2)\cdot x(2) = 0.5\times 0 + 1\times 1 + 0.5\times 0 = 1$$

$$y(5) = \sum_{k=0}^{2} h(k)\cdot x(5-k) = h(0)\cdot x(5) + h(1)\cdot x(4) + h(2)\cdot x(3) = 0.5\times 0 + 1\times 0 + 0.5\times 1 = 0.5$$

$$y(6) = \sum_{k=0}^{2} h(k)\cdot x(6-k) = h(0)\cdot x(6) + h(1)\cdot x(5) + h(2)\cdot x(4) = 0$$

Donde se pode tirar

$$y(n) = 0.25\delta(n) + \delta(n-1) + 1.25\delta(n-2) + \delta(n-3) + \delta(n-4) + 0.5\delta(n-5)$$

Pelo outro método, viria

$$H(z) = 0.5 + z^{-1} + 0.5z^{-2}$$
$$X(z) = 0.5 + z^{-1} + z^{-3}$$

Pelo que

$$Y(z) = X(z) \cdot H(z) = \left(0.5 + z^{-1} + z^{-3}\right) \cdot \left(0.5 + z^{-1} + 0.5z^{-3}\right)$$
$$Y(z) = 0.25 + z^{-1} + 1.25z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + 0.5z^{-5}$$

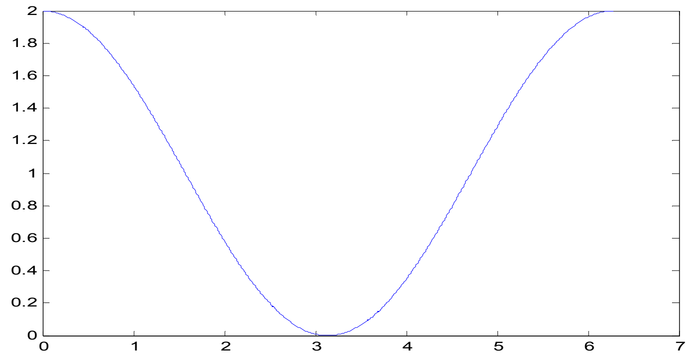
Donde se pode tirar

$$y(n) = 0.25\delta(n) + \delta(n-1) + 1.25\delta(n-2) + \delta(n-3) + \delta(n-4) + 0.5\delta(n-5)$$

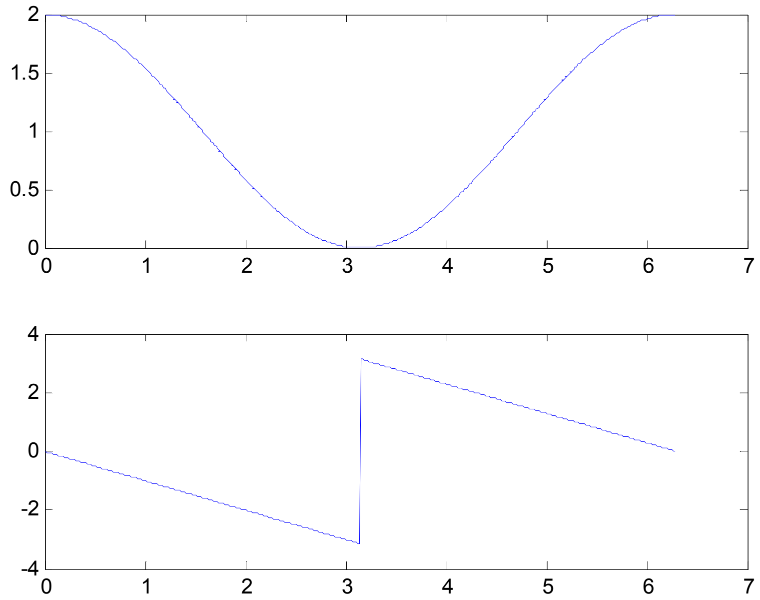
b.

$$H(e^{j\omega}) = 0.5 + e^{-j\omega} + 0.5 \cdot e^{-j2\omega} = \left(0.5 \cdot e^{j\omega} + 1 + 0.5 \cdot e^{-j\omega}\right) \cdot e^{-j\omega}$$
$$H(e^{j\omega}) = \left(1 + \cos\omega\right) \cdot e^{-j\omega}$$

Graficamente, vem:



Separando o módulo e a fase, virá:



c. Atendendo à resposta em frequência, vê-se que a função de transferência tem um zero à frequência de π. Assim sendo, qualquer sinal com frequência igual a π produzirá um sinal nulo na saída. Um exemplo de um sinal, seria p(n) = cos (π n).

2.

a. A função de transferência do sistema é:

$$H(z) = \frac{1 - 0.5z^{-1} + 0.25z^{-2}}{1 - 0.5z^{-1} - 0.125z^{-2}}$$

b. Para calcular h(n) vai-se recorrer ao método do integral de linha. A função tem dois pólos, um em 0.683 e outro em -0.183. Sendo o sistema causal, a região de convergência da transformada em z é o exterior de uma circunferência; assim sendo, tem-se |z| > 0.683.

$$\frac{1}{2\pi\pi}\oint_C H(z)z^{n-1}dz = \frac{1}{2\pi\pi}\oint_C \frac{z^{n-1}\left(1-0.5z^{-1}+0.25z^{-2}\right)}{1-0.5z^{-1}-0.125z^{-2}}dz = \frac{1}{2\pi\pi}\oint_C \frac{z^{n-1}\left(z^2-0.5z+0.25\right)}{(z-0.683)\cdot(z+0.183)}dz$$

Como o sistema é causal, e atendendo à sua região de convergência, tem de se considerar três pólos no interior do contorno: os pólos em 0, em 0.683 e -0.183.

Assim sendo, para o pólo em 0, vem

h(n) = 0.

Para o pólo em 0.683, vem

$$h(n)=\frac{z^{n-1}\left(z^2-0.5z+0.25\right)}{(z-0.683)\cdot(z+0.183)}(z-0.683)\bigg|_{z=0.183}=\frac{0.683^{n-1}\left(0.683^2-0.5\times0.683+0.25\right)}{(0.683+0.183)}=$$

$$h(n)=0.533\times0.683^n\,u(n)$$

Finalmente, para o pólo em -0.183, vem

$$h(n)=\frac{z^{n-1}\left(z^2-0.5z+0.25\right)}{(z-0.683)\cdot(z+0.183)}(z+0.183)\bigg|_{z=0.183}=\frac{(-0.183)^{n-1}\left((-0.183)^2+0.5\times0.183+0.25\right)}{(-0.183-0.683)}=$$

$$h(n)=2.366\times(-0.183)^n\,u(n)$$

Pelo que a resposta impulsional é

$$h(n)=\left(0.533\times0.683^n+2.366\times(-0.183)^n\right)u(n)\,.$$

c. Atendo ao facto da resposta impulsional ter comprimento infinito, pode-se dizer que este sistema é do tipo IIR.

3.

a. Atendendo à definição da transformada em z, vem

$$X(z)=\sum_{n=0}^{7}z^{-n}=\frac{1-z^{-8}}{1-z^{-1}}\,.$$

b. No caso geral tem-se

$$X_0(k)=\sum_{r=-\infty}^{+\infty}x(r)\,z^{-r}\bigg|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}}=\sum_{r=-\infty}^{+\infty}x(r)\,e^{-j\frac{2\pi}{N}kr}$$

Igualmente, tem-se

$$x_0(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X_0(k)W_N^{-nk}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left[\sum_{r=-\infty}^{+\infty}x(r)e^{-j\frac{2\pi}{N}kr}\right]W_N^{-nk}$$

Como $W_N^r=e^{-j\frac{2\pi}{N}r}$,

$$x_0(n) = \frac{1}{N}\sum_{r=-\infty}^{+\infty} x(r)\sum_{k=0}^{N-1} W_N^{kr}\cdot W_N^{-nk} = \frac{1}{N}\sum_{r=-\infty}^{+\infty} x(r)\sum_{k=0}^{N-1} W_N^{(r-n)k}$$

Sabe-se que,

$$\sum_{k=0}^{N-1} W_N^{(r-n)k} = \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}(r-n)k} = \begin{cases} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}\alpha k} = \sum_{k=0}^{N-1} 1^k = N, & \text{se } r-n \text{ múltiplo de N} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Por fim, vem

$$x_0(n) = \frac{1}{N}\sum_{r=-\infty}^{+\infty} x(n+rN)\cdot N = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x(n+rN),\ n = 0\,..\,N-1$$

Neste caso, N = 6, virá,

$$x_0(n) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x(n+r6),\ n = 0\,..\,5$$

Este sinal equivale a uma repetição periódica de x(n) de 6 em 6 amostras. Esta repetição introduzirá *aliasing*, pois o sinal original tem comprimento 8.

4.

a.

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-nk}$$

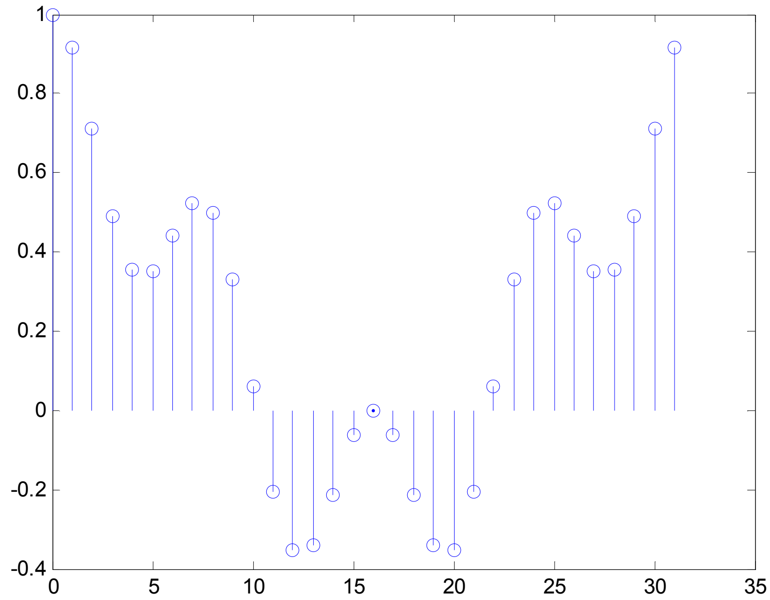
$$x(n) = \frac{1}{32}\left(8 + 8W_{32}^{-n} + 4W_{32}^{-4n} + 4W_{32}^{-28n} + 8W_{32}^{-31n}\right)$$

$$x(n) = \frac{1}{32}\left(8 + 8W_{32}^{-n} + 4W_{32}^{-4n} + 4W_{32}^{4n} + 8W_{32}^{n}\right)$$

$$x(n) = \frac{1}{32}\left(8 + 8e^{j\frac{2\pi}{32}n} + 4e^{j\frac{2\pi}{32}4n} + 4e^{-j\frac{2\pi}{32}4n} + 8e^{-j\frac{2\pi}{32}n}\right)$$

$$x(n) = \frac{1}{32}\left(8 + 16\cos\left(\frac{\pi}{16}n\right) + 8\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)\right)$$

b.



5.

a.

$$\left.\begin{array}{l} F_a = 15\ \text{kHz} \\ F_c = 1\ \text{kHz} \end{array}\right\} \rightarrow \quad \omega_c = \frac{2\pi \cdot F_c}{F_a} = \frac{2\pi}{15}\,\text{rad}$$

Pelo que

$$\Omega_c = \frac{2}{T_a} \cdot \text{tg}\,\frac{\omega_c}{2} = 2 \times 15000 \times \text{tg}\,\frac{2\pi}{15 \times 2} = 6376.697\ \text{rad}\,\text{s}^{-1}.$$

b. Nesta alínea, primeiro há que converter a "frequência digital" em frequência angular:

$$\Omega = \frac{2}{T_a} \cdot \text{tg}\,\frac{\omega}{2} = 2 \times 15000 \times \text{tg}\,\frac{1.12}{2} = 18808.486\ \text{rad}\,\text{s}^{-1}.$$

Agora, tem-se

$$\left|H_c(j\Omega)^2\right| = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}} \quad \Rightarrow \quad 10\log \frac{1}{1 + \left(\dfrac{18808.486}{6376.697}\right)^{8}} = -37.6\ \text{dB}$$

Pelo que, a atenuação do filtro, a partir de 1.12 rad, é maior ou igual a 37.6 dB.