PROCESSAMENTO DIGITAL DE SINAL

Exame de Recurso – 2002/02/16

Resolução

1.

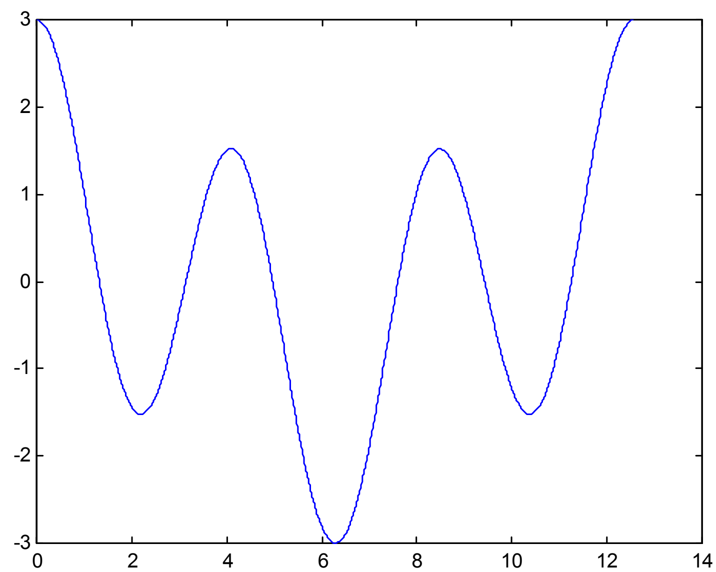
a. $h(n) = \delta(n) + 0.5\delta(n-1) + 0.5\delta(n-2) + \delta(n-3)$.

b.

$$H(e^{j\omega}) = 1 + 0.5e^{-j\omega} + 0.5e^{-j2\omega} + e^{-j3\omega} = \left(e^{j\frac{3\omega}{2}} + 0.5e^{j\frac{\omega}{2}} + 0.5e^{-j\frac{\omega}{2}} + e^{-j\frac{3\omega}{2}}\right) \cdot e^{-j\frac{3\omega}{2}}$$

$$H(e^{j\omega}) = \left(2\cos\left(\frac{3\omega}{2}\right) + \cos\left(\frac{\omega}{2}\right)\right) \cdot e^{-j\frac{3\omega}{2}}$$

Uma representação do sinal é:



c. Para $\omega = \pi$ rad, $H(e^{j\omega}) = 0$, pelo que qualquer sinal com período igual a π originará uma saída constantemente. Assim sendo, um sinal possível é:

$x_p(n) = \cos(\pi n)$

2.

a. Atendendo à equação às diferenças, vem

$$H(z) = \frac{1 + 0.5z^{-1} - 0.25z^{-2} + 0.375z^{-3}}{1 + 0.25z^{-1} - 0.125z^{-2}}$$

b. Como o numerador é de ordem superior ao denominador, vai-se utilizar o método do integral de linha.

$$\frac{1}{2\pi\pi}\oint_C H(z)z^{n-1}dz = \frac{1}{2\pi\pi}\oint_C \frac{z^{n-1}\left(1 + 0.5z^{-1} - 0.25z^{-2} + 0.375z^{-3}\right)}{1 + 0.25z^{-1} - 0.125z^{-2}}dz =$$
$$= \frac{1}{2\pi\pi}\oint_C \frac{z^{n-2}\left(z^3 + 0.5z^2 - 0.25z + 0.375\right)}{(z - 0.25)\cdot(z + 0.5)}dz$$

Como o sistema é causal, h(n) = 0 para n < 0. Para n ≥ 0, há que considerar três pólos: um em 0 com multiplicidade 2, outro em -0.25 e um terceiro em 0.125.

Considerando o pólo em 0, vem:

$$h(n) = \frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-a)^m \cdot F(z)\right]\Bigg|_{z=a} = \frac{1}{1!}\frac{d}{dz}\left[z^2 \cdot F(z)\right]\Bigg|_{z=0}$$
$$h(n) = \frac{d}{dz}\left[\frac{z^n\left(z^3 + 0.5z^2 - 025z + 0.375\right)}{(z - 0.25)\cdot(z + 0.5)}\right]\Bigg|_{z=0}$$
$$h(n) = 0$$

Para o pólo em 0.25, vem

$$h(n) = \frac{z^{n-2}\left(z^3 + 0.5z^2 - 0.25z + 0.375\right)}{(z - 0.25)\cdot(z + 0.5)}(z - 0.25)\Bigg|_{z=0.25}$$
$$h(n) = 7.667 \times 0.25^n$$

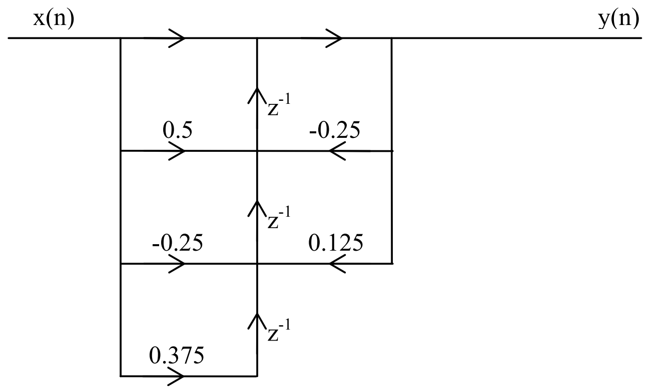
Para o pólo em -0.5, vem

$$h(n) = \frac{z^{n-2}\left(z^3 + 0.5z^2 - 0.25z + 0.375\right)}{(z - 0.25)\cdot(z + 0.5)}(z + 0.5)\Bigg|_{z=-0.5}$$
$$h(n) = -2.667 \times (-0.5)^n$$

Pelo que a resposta impulsional é

$$h(n) = \left(7.667 \times 0.25^n - 2.667 \times (-0.5)^n\right)u(n)$$

c.



3.

a. Pelo método doas fracções simples, vem

$$X(z) = \frac{0.75z^2}{z^2 - 0.25z - 0.125} = \left(\frac{0.5}{1 - 0.5z^{-1}} + \frac{0.25}{1 + 0.25z^{-1}} \right) \cdot z$$

Como a RoC desta transformada em z é o exterior de um círculo e atendendo às propriedades da transformada em z, vem

$$x(n) = (0.5 \times 0.5^{n+1} + 0.25 \times (-0.25)^{n+1})\, u(n+1)\,.$$

b. Pelo método das fracções simples, vem

$$X(z) = \frac{0.3z^2 - 0.3z}{z^2 - 0.6z + 0.08} = \left(\frac{1.2}{1 - 0.2z^{-1}} - \frac{0.9}{1 + 0.4z^{-1}} \right) \cdot z^{-1}$$

Como a RoC desta transformada em z é o exterior de um círculo e atendendo às propriedades da transformada em z, vem

$$x(n) = (1.2 \times 0.2^{n-1} - 0.9 \times 0.4^{n-1})\, u(n-1)\,.$$

4.

a. Usando a definição de DFT, vem

$X(0) = 8$; $X(1) = 4$; $X(2) = 0$; $X(3) = 0$;
$X(4) = 0$; $X(5) = 4$; $X(6) = 0$; $X(7) = 4$.

b. Através da definição de DFT, vem
$X_r(0) = 5.239$; $X_r(1) = 2.207\text{-}j2.091$; $X_r(2) = 0.793\text{-}j0.359$;
$X_r(3) = 0.707$; $X_r(4) = 0.793\text{+}j0.359$; $X_r(5) = 2.793\text{+}j0.359$.

c. Como x(n) tem período de 8 amostras, o comprimento mínimo da DFT sem ocorra *aliasing* é 8, logo a DFT a partir da qual se pode reconstruir o sinal é a primeira – X(k) tem comprimento 8. No caso se usar a segunda

DFT – $X_r(k)$ –, posteriormente não se pode reconstruir o sinal original, pois esta DFT só tem comprimento 6, donde ao ser calculada introduzirá *aliasing*, impossibilitando, desse modo, a reconstrução do sinal original.

5.

a.

$$\left.\begin{array}{l} F_a = 10\ \text{kHz} \\ F_c = 2\ \text{kHz} \end{array}\right\} \rightarrow \quad \omega_c = \frac{2\pi \cdot F_c}{F_a} = \frac{2\pi \times 2}{10} = 0.4\,\pi\ \text{rad}$$

Pelo que

$$\Omega_c = \frac{2}{T_a} \cdot \operatorname{tg}\frac{\omega_c}{2} = 2 \times 10000 \times \operatorname{tg}(0.4\,\pi) = 14530.85\ \text{rad}\,\text{s}^{-1}.$$

b. Neste caso tem-se

$$\left|H_c(j\Omega)^2\right| = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}} \quad \Rightarrow \quad 10\log\frac{1}{1 + \left(\dfrac{\Omega}{14530.85}\right)^{10}} = -50\ \text{dB}$$

Resolvendo em ordem a Ω, vem $\Omega = 45950.54$ rad s^{-1}, pelo a frequência a partir da qual este filtro apresenta uma atenuação superior a 50 dB é 7313.26 Hz.