PROCESSAMENTO DIGITAL DE SINAL

Exame Especial de 2002/09/03

Resolução

1.

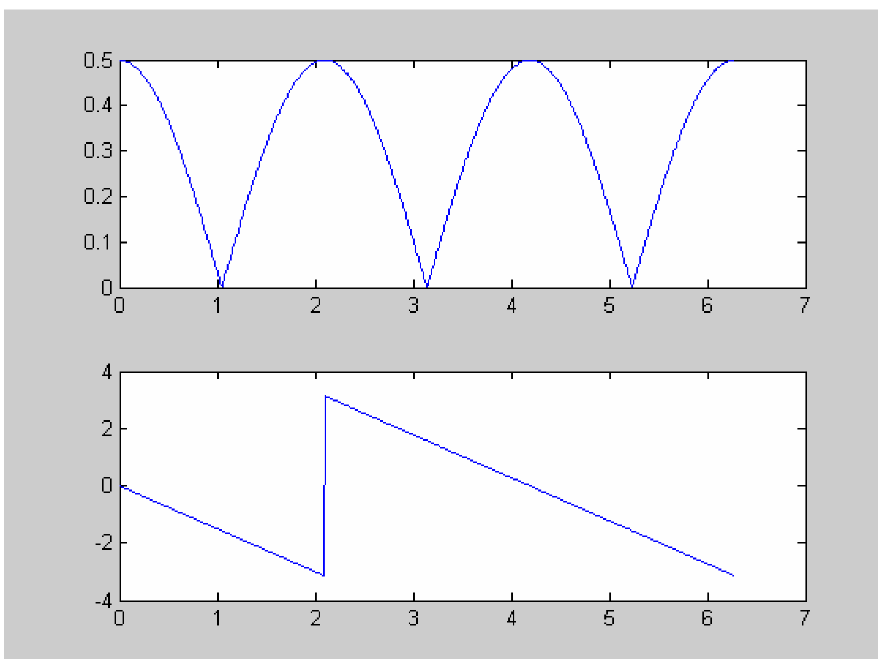
a. $H(z) = 0.25 + 0.25\ z^{-3}$
$X(z) = 0.5 + 2\ z^{-3}$
Pelo que, atendendo a que $Y(z) = X(z) \cdot H(z)$, vem
$Y(z) = 0.125 + 0.625\ z^{-3} + 0.5\ z^{-6}$, donde
$y(n) = 0.125(n) + 0.625\ \delta(n-3) + 0.5\ \delta(n-6)$

b.

$$H\left(e^{j\omega}\right) = 0.25 + 0.25e^{-j3\omega} = 0.25\left(e^{j\frac{3\omega}{2}} + e^{-j\frac{3\omega}{2}}2\right) \cdot e^{-j\frac{3\omega}{2}}$$

$$H\left(e^{j\omega}\right) = 0.25\cos\left(\frac{3\omega}{2}\right) \cdot e^{-j\frac{3\omega}{2}}$$

A representação do sinal, em módulo e fase, é:



c. Para $\omega = \pi/3$ rad, $H\ (e^{j\omega}) = 0$, pelo que qualquer sinal com período igual a $\pi/3$ originará uma saída constantemente nula. Assim sendo, um sinal possível é:

$x_p(n) = \cos\ (\pi n/3)$

2.

a. Atendendo à equação às diferenças, vem

$$H(z)=\frac{1-0.375z^{-1}-0.0625z^{-2}}{1-0.109375z^{-2}-0.01171875z^{-3}},\quad |z|>0.375$$

b. Primeiro, simplifica-se a função:

$$H(z)=\frac{z^3-0.375z^2-0.0625z}{z^3-0.109375z-0.01171875}=\frac{z\cdot(z+0.125)\cdot(z-0.5)}{(z+0.25)\cdot(z-0.375)\cdot(z+0.125)}$$

$$H(z)=\frac{z\cdot(z-0.5)}{(z+0.25)\cdot(z-0.375)}$$

Usando o método do integral de linha, vem:

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_C H(z)z^{n-1}dz=\frac{1}{2\pi j}\oint_C z^{n-1}\cdot\frac{z\cdot(z-0.5)}{(z+0.25)\cdot(z-0.375)}dz=$$

$$=\frac{1}{2\pi j}\oint_C\frac{z^n\cdot(z-0.5)}{(z+0.25)\cdot(z-0.375)}dz$$

Como o sistema é causal, h(n) = 0 para n < 0. Para n ≥ 0, há que considerar dois pólos: um em -0.25 outro em 0.375.

Considerando o pólo em -0.25, vem

$$h(n)=\left.\frac{z^n\cdot(z-0.5)}{(z+0.25)\cdot(z-0.375)}(z+0.25)\right|_{z=-0.25}$$

$$h(n)=1.2\times(-0.25)^n$$

Para o pólo em 0.375, vem

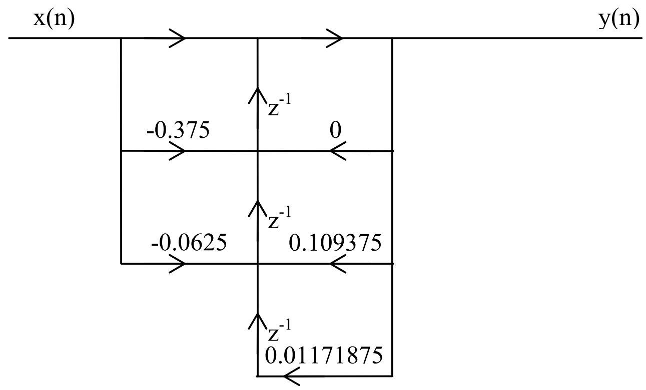
$$h(n)=\left.\frac{z^n\cdot(z-0.5)}{(z+0.25)\cdot(z-0.375)}(z-0.375)\right|_{z=0.375}$$

$$h(n)=-0.2\times0.375^n$$

Pelo que a resposta impulsional é

$$h(n)=\left(1.2\times(-0.25)^n-0.2\times0.375^n\right)u(n)$$

c.



3.

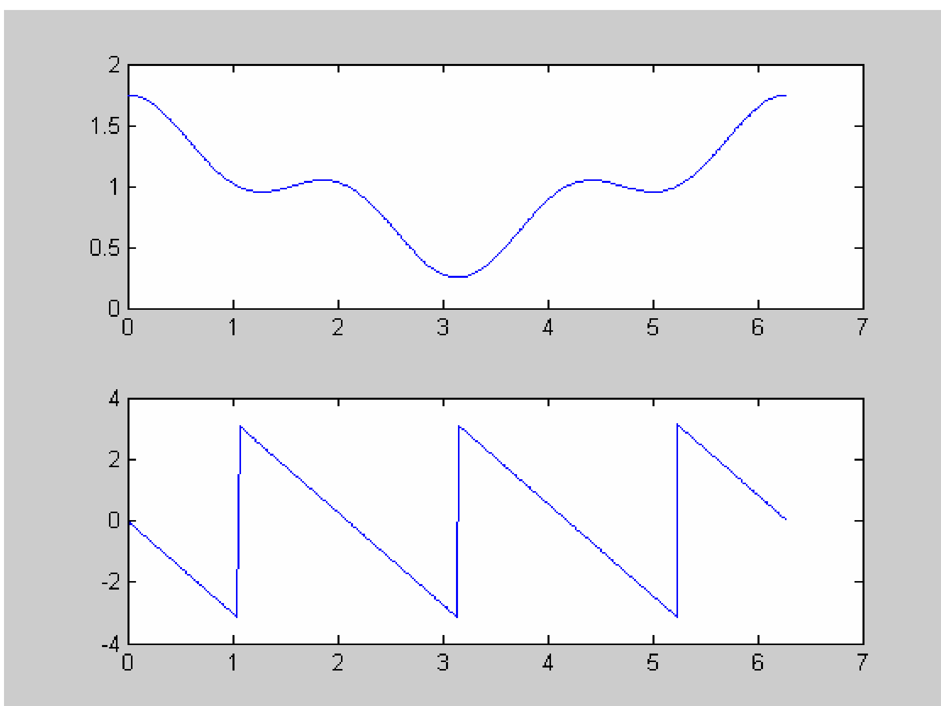
a. O filtro é do tipo 1, pois tem comprimento ímpar e simetria positiva.

b.

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{0.5+e^{-j2\omega}+4e^{-j3\omega}+e^{-j4\omega}+0.5e^{-j6\omega}}{4}=\left(\frac{0.5e^{j3\omega}+e^{j\omega}+4+0.5e^{-j\omega}+e^{-j3\omega}}{4}\right)\cdot e^{-j3\omega}$$

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{4}\left(\cos(3\omega)+2\cos(\omega)+4\right)\cdot e^{-j3\omega}$$

A representação em módulo e em fase, é:



4.

a.

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-nk}$$

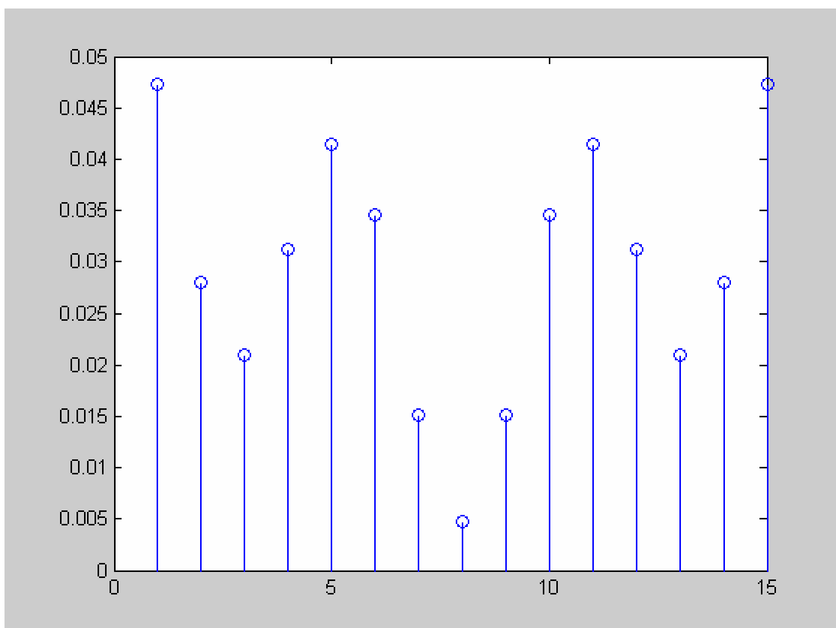
$$x(n) = \frac{1}{16}\left(0.5 + 0.175W_{16}^{-n} + 0.25W_{16}^{-3n} + 0.25W_{16}^{-13n} + 0.175W_{16}^{-15n}\right)$$

$$x(n) = \frac{1}{16}\left(0.5 + 0.175W_{16}^{-n} + 0.25W_{16}^{-3n} + 0.25W_{16}^{3n} + 0.175W_{16}^{n}\right)$$

$$x(n) = \frac{1}{16}\left(0.5 + 0.175e^{j\frac{2\pi}{16}n} + 0.25e^{j\frac{3\pi}{16}4n} + 0.25e^{-j\frac{3\pi}{16}4n} + 0.175e^{-j\frac{2\pi}{16}n}\right)$$

$$x(n) = \frac{1}{16}\left(0.5 + 0.175\cos\left(\frac{\pi}{8}n\right) + 0.25\cos\left(\frac{3\pi}{8}n\right)\right)$$

b.



c. $$Y(k) = \frac{X(k-2) + 4X(k) + X(k+2)}{4}$$

Pelas propriedades da DFT, vê-se que:

$$y(n) = \frac{1}{4}\left(W_N^{-2n} \cdot x(n) + 4x(n) + W_N^{2n} \cdot x(n)\right)$$

$$y(n) = \left(1 + 0.5\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)\right) \cdot x(n)$$

5.

a.

$$\left.\begin{array}{l} F_a = 20\ \text{kHz} \\ F_c = 3\ \text{kHz} \end{array}\right\} \rightarrow \omega_c = \frac{2\pi \cdot F_c}{F_a} = \frac{2\pi \times 3}{20} = 0.3\,\pi\ \text{rad}$$

Pelo que

$$\Omega_c = \frac{2}{T_a} \cdot \text{tg}\frac{\omega_c}{2} = 2 \times 20000 \times \text{tg}(0.15\,\pi) = 20381.018\ \text{rad}\,\text{s}^{-1}.$$

b. Neste caso tem-se

$$\left|H_c(j\Omega)^2\right| = \frac{1}{1+\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}} \quad \Rightarrow \quad 10\log\frac{1}{1+\left(\frac{\Omega}{20381.018}\right)^{6}} = -40\ \text{dB}$$

Resolvendo em ordem a Ω, vem $\Omega = 94598.729$ rad s^{-1}, pelo a frequência a partir da qual este filtro apresenta uma atenuação superior a 40 dB é 7453.275 Hz – de notar que para achar esta frequência, é necessário efectuar o passo inverso do da alínea a), ou seja:

$$\Omega_c = \frac{2}{T_a} \cdot \text{tg}\frac{\omega_c}{2} = 94598.729\ \text{rad}\,\text{s}^{-1} \Rightarrow \omega_c = 2.341\ \text{rad}$$

De seguida:

$$\omega = \frac{2\pi \cdot F}{F_a} \Rightarrow F = \frac{2.341 \times 20 \times 10^3}{2\pi} = 7453.275\ \text{Hz}.$$