Escola Superior de Tecnologia e de Gestão

Teoria do Sinal

Caderno de Exercícios

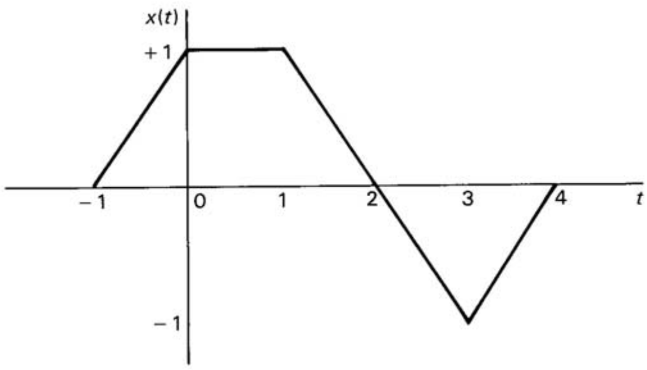
Orlando Ferreira Soares

Bragança, 2001

Índice

Caracterização dos Sinais

1. Considere o seguinte sinal contínuo ***x(t)***



Represente os seguintes sinais:

a) $2x(t)$

b) $0{,}5x(-t)$

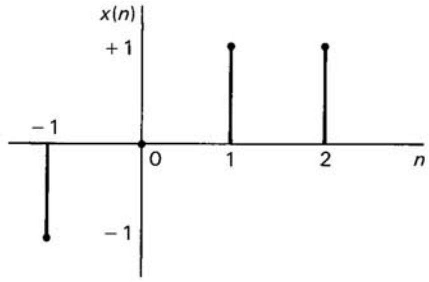
c) $x(t-2)$

d) $x(2t)$

e) $x(2t+1)$

f) $x(1-t)$

2. Considere o seguinte sinal discreto ***x(n)***



Represente os seguintes sinais:

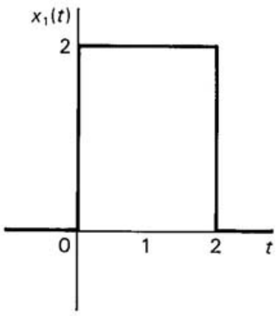
a) $2x(n)$

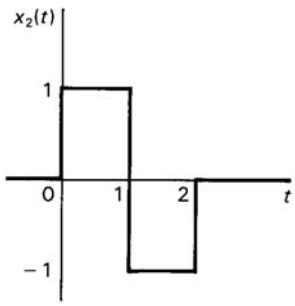
b) $3x(-n)$

c) $x(n-2)$

d) $x(2-n)$

3. Considere os seguinte sinais contínuos $x_1(t)$ e $x_2(t)$





Represente os seguintes sinais:

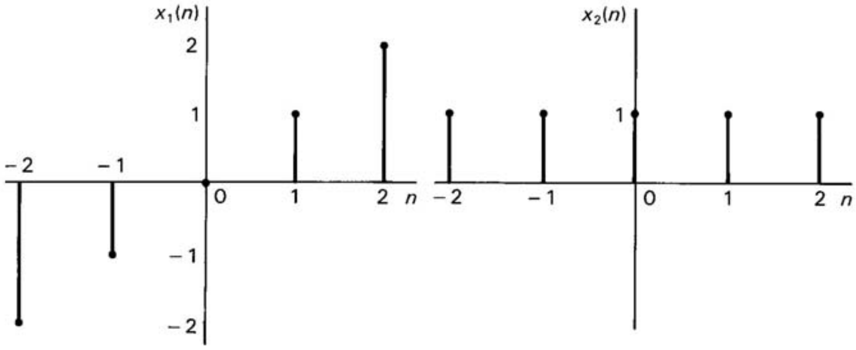
a) $x_1(t)+x_2(t)$

b) $x_1(t)-2x_2(t)$

c) $0{,}5x_1(2t)-x_2(t)$

d) $x_1(t-2)+x_2(4-t)$

4. Considere os seguinte sinais discretos $x_1(n)$ e $x_2(n)$



Represente os seguintes sinais:

a) $x_1(n) + x_2(n)$

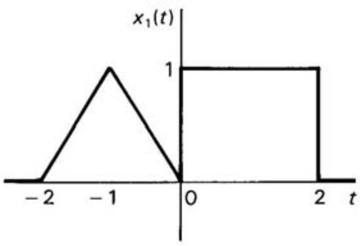
b) $x_1(-n) + x_2(n)$

c) $x_1(n-1) + x_2(n)$

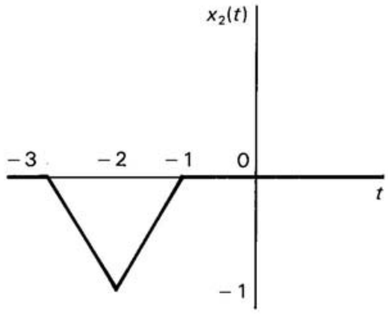
d) $x_1(2-n) - x_2(n)$

5. Determine e faça um esboço das componentes par e impar dos seguintes sinais contínuos. Verifique que a adição das duas componentes resulta no sinal original.

a)

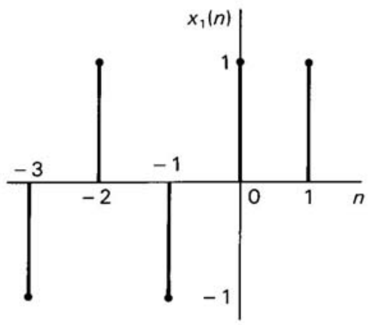


b)

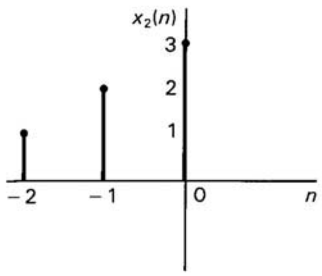


6. Determine e faça um esboço das componentes par e impar dos seguintes sinais discretos. Verifique que a adição das duas componentes resulta no sinal original.

a)



b)



7. Desenhe os seguintes sinais exponenciais contínuos para o intervalo de ***t*** de **0** a **5**. Para isso utilize a mesma escala em todos os sinais.

   a) $x_1(t) = 2e^{-2t}$

   b) $x_2(t) = 2e^{-0,2t}$

   c) $x_3(t) = 2e^{0,2t}$

   d) Desenhe o sinal $x_4(t) = 2e^{2t}$ numa escala de ***t*** de **0** a **1**

8. Desenhe os seguintes sinais exponenciais discretos. Para isso utilize a mesma escala em todos os sinais.

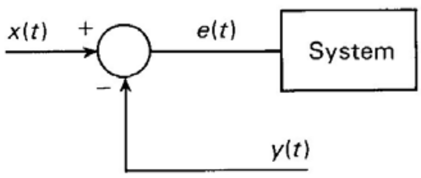
   a) $x_1(n) = 2e^{-2nT}$

   b) $x_2(n) = 2e^{-0,2nT}$

   c) $x_1(n) = 2e^{0,2nT}$

   Use um valor de ***T*=0,5** e valores de ***n*** de **0** a **10**.

9. A figura a seguir apresentada mostra uma parte de um sistema de controlo onde o sinal de erro ***e(t)*** é formado pela diferença entre o sinal de entrada ***x(t)*** e o sinal de realimentação ***y(t)***.



$$e(t) = x(t) - y(t)$$

Se

$$x(t) = 3\,sen(wt + 20°) \text{ e } y(t) = 3\cos(wt - 20°)$$

determine ***e(t)*** e escreva a expressão na forma $e(t) = A\,sen(wt + \varphi)$.

10. Determine a amplitude, frequência (Hz) e fase dos seguintes sinais, relativamente ao sinal $\boldsymbol{sen\,wt}$.

    a) $20\,\boldsymbol{sen}\left(30\boldsymbol{t}+\frac{\pi}{4}\right)$

    b) $50\,\boldsymbol{cos}\left(100\boldsymbol{t}-\frac{\pi}{4}\right)$

    c) $100\,\boldsymbol{cos}(20\boldsymbol{t})+20\,\boldsymbol{sen}(20\boldsymbol{t})$

    d) $\boldsymbol{Re}\left\{\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{j}\left(3\boldsymbol{t}+\frac{\pi}{4}\right)}\right\}$

    e) $\boldsymbol{Im}\left\{\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{j}\left(3\boldsymbol{t}+\frac{\pi}{4}\right)}\right\}$

    f) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{j}2\boldsymbol{t}}+\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{j}2\boldsymbol{t}}$, com $\boldsymbol{A}=1+2\boldsymbol{j}$

11. Faça um esboço dos seguintes sinais.

    a) $\boldsymbol{x}_1(\boldsymbol{t})=0{,}5\boldsymbol{e}^{(-1+\boldsymbol{j}2\pi)\boldsymbol{t}}+0{,}5\boldsymbol{e}^{(-1-\boldsymbol{j}2\pi)\boldsymbol{t}}$

    b) $\boldsymbol{x}_2(\boldsymbol{t})=-0{,}5\boldsymbol{j}\boldsymbol{e}^{(1+\boldsymbol{j}2\pi)\boldsymbol{t}}+0{,}5\boldsymbol{e}^{(1-\boldsymbol{j}2\pi)\boldsymbol{t}}$

12.

    a) Desenhe um ciclo do sinal $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})=\boldsymbol{sen}(\boldsymbol{w}_0\boldsymbol{t})$, com $\boldsymbol{w}_0=\frac{2\pi}{16}$.

    b) Represente na mesma escala utilizada em a) o harmónico de ordem 17 do sinal $\boldsymbol{x(t)}$, $\boldsymbol{x}_h(\boldsymbol{t})=\boldsymbol{sen}(17\boldsymbol{w}_0\boldsymbol{t})$.

13.

a) Desenhe um ciclo do sinal $x(n) = sen(w_0 nT)$, com $T = 1$.

b) Represente na mesma escala utilizada em a) o harmónico de ordem 17 do sinal $x(n)$, $x_h(n) = sen(w_0 nT)$.

14. Calcule os seguintes integrais:

a) $\int_{-\infty}^{+\infty} 3t^2 \delta(t-2)dt$

b) $\int_{-\infty}^{+\infty} [\delta(t)\cos t + \delta(t-1)\,sen\,t]dt$

c) $\int_{-\infty}^{+\infty} u(t)e^{-t}[\delta(t+1) + \delta(t-1)]dt$

d) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{jwt}\delta(t-1)dt$

15. Mostre graficamente os seguintes sinais:

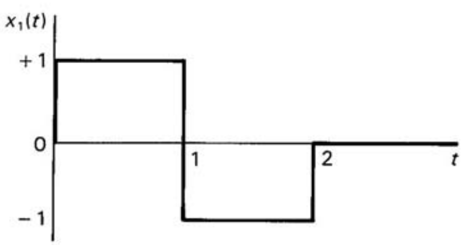
a) $x_1(n) = u(t) + u(t-1) - 2u(t-2)$

b) $x_2(n) = u(t) - 3u(t-2) + 2u(t-3)$

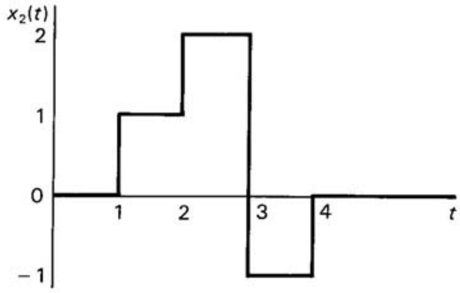
c) $x_3(n) = u(t) - 2u(t-1) + 2u(t-2) - 2u(t-3) + u(t-4)$

16. Estabeleça as equações das seguintes sinais em termos da função Degrau unitário.

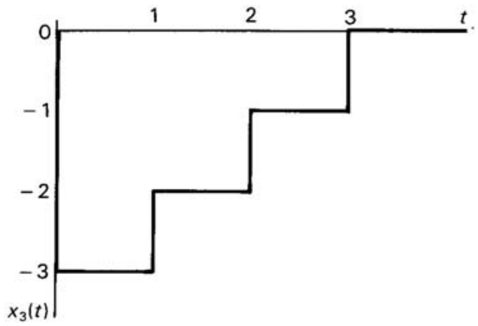
a)



b)



c)

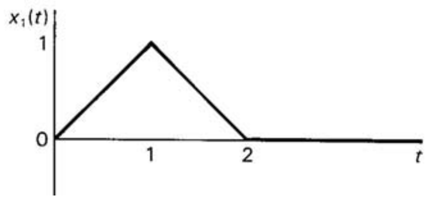


17. O sinal Rampa unitária é definido da seguinte maneira:

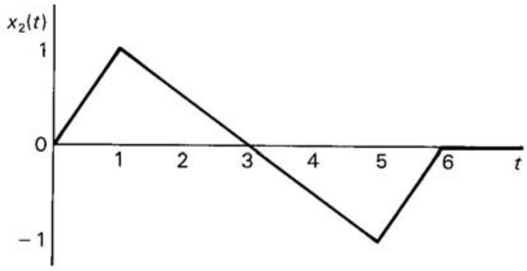
$$\boldsymbol{x(t)} = \begin{cases} \boldsymbol{t} & \boldsymbol{t} \geq 0 \\ 0 & \boldsymbol{t} < 0 \end{cases}$$

Obtenha as expressão, em termos do sinal Rampa unitária para os seguintes sinais:

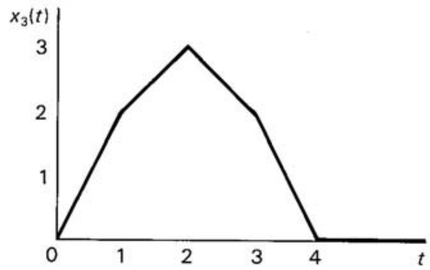
a)



b)



c)



Caracterização de Sistemas

1. Nas alíneas seguintes, ***x(t)*** representa o sinal de entrada de um sistema e ***y(t)*** representa o respectivo sinal de saída. Determine se os sistemas descritos pelas equações são:

   a) Linear
   b) Invariante no Tempo
   c) Instantâneo
   d) Causal
   e) Estável

   (i) $y(t) = 2x(t) + x(t-1)$

   (ii) $y(t) = x(t-2) + x(2-t)$

   (iii) $y(t) = x\left(t/3\right)$

   (iv) $y(t) = \int_{-2}^{+2} x(\tau)d\tau$

   (v) $y(t) = \int_{-\infty}^{2t} x(\tau)d\tau$

   (vi) $y(t) = x(t)\cos(3t)$

(vii) $y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ x(t) + x(t-2), & t \geq 0 \end{cases}$

(viii) $y(t) = \begin{cases} 0, & x(t) < 0 \\ x(t) + x(t-2), & x(t) \geq 0 \end{cases}$

(ix) $y(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$

2. Nas alíneas seguintes, ***x(n)*** representa o sinal de entrada de um sistema e ***y(n)*** representa o respectivo sinal de saída. Determine se os sistemas descritos pelas equações são:

    a) Linear
    b) Invariante no Tempo
    c) Instantâneo
    d) Causal
    e) Estável

    (i) $y(n) = x(-n)$

    (ii) $y(n) = |x(n)|$

    (iii) $y(n) = x(n-2) - 2x(n-8)$

    (iv) $y(n) = 2x(n) + 3$

    (v) $y(n) = n.x(n)$

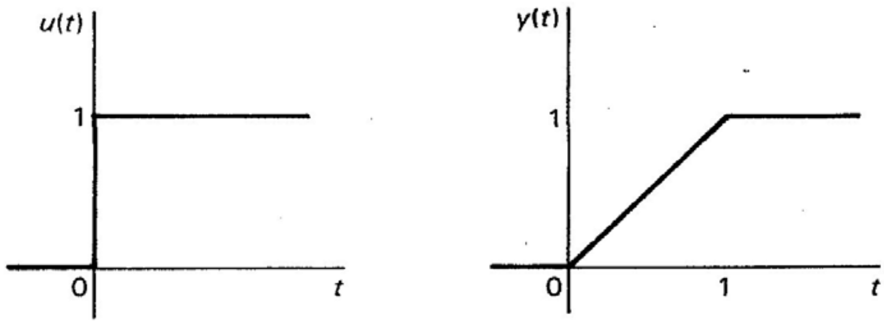
    (vi) $y(n) = x(4n+1)$

    (vii) $y(n) = 2x(n) + [x(n)]^2$

(viii) $y(n) = \begin{cases} x(n), & n \geq 1 \\ 0, & n = 0 \\ x(n+1), & n \leq -1 \end{cases}$

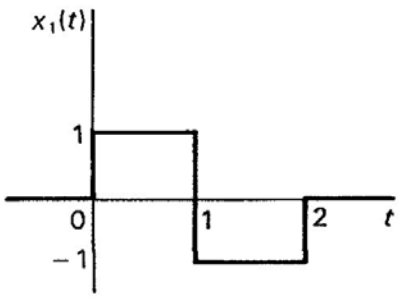
(ix) $y(n) = \begin{cases} x(n), & n \geq 1 \\ 0, & n = 0 \\ x(n), & n \leq -1 \end{cases}$

3. O sinal ***x(t)***, Degrau unitário, é aplicado a um sistema Linear e Invariante no tempo. Este sistema produz a saída ***y(t)*** mostrada na figura.

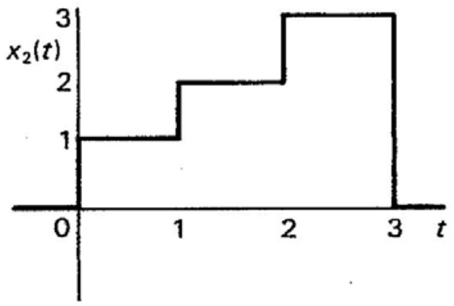


Determine as respostas do sistema às seguintes entradas:

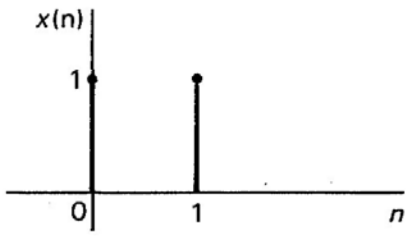
a)

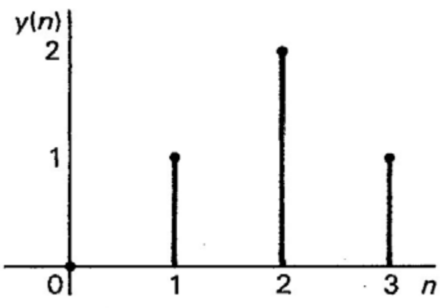


b)



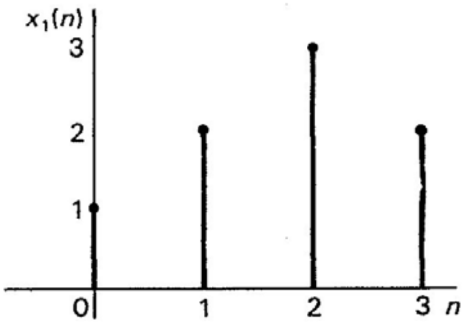
4. O sinal ***x(n)***, Degrau unitário, é aplicado a um sistema Linear e Invariante no tempo. Este sistema produz a saída ***y(n)*** mostrada na figura.



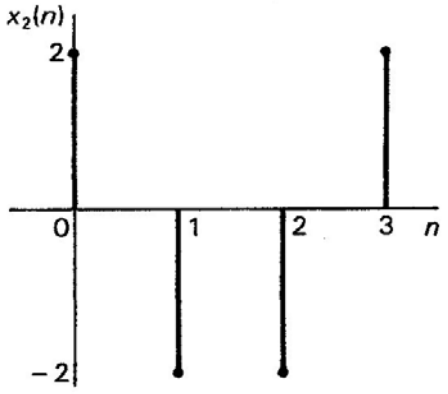


Determine as respostas do sistema às seguintes entradas:

a)



b)



Caracterização de Sistemas

1. Nas alíneas seguintes, ***x(t)*** representa o sinal de entrada de um sistema e ***y(t)*** representa o respectivo sinal de saída. Determine se os sistemas descritos pelas equações são:

   a) Linear
   b) Invariante no Tempo
   c) Instantâneo
   d) Causal
   e) Estável

   (i) $y(t) = 2x(t) + x(t-1)$

   (ii) $y(t) = x(t-2) + x(2-t)$

   (iii) $y(t) = x\left(t/3\right)$

   (iv) $y(t) = \int_{-2}^{+2} x(\tau)d\tau$

   (v) $y(t) = \int_{-\infty}^{2t} x(\tau)d\tau$

   (vi) $y(t) = x(t)cos(3t)$

(vii) $y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ x(t) + x(t-2), & t \geq 0 \end{cases}$

(viii) $y(t) = \begin{cases} 0, & x(t) < 0 \\ x(t) + x(t-2), & x(t) \geq 0 \end{cases}$

(ix) $y(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$

2. Nas alíneas seguintes, ***x(n)*** representa o sinal de entrada de um sistema e ***y(n)*** representa o respectivo sinal de saída. Determine se os sistemas descritos pelas equações são:

   a) Linear
   b) Invariante no Tempo
   c) Instantâneo
   d) Causal
   e) Estável

(i) $y(n) = x(-n)$

(ii) $y(n) = |x(n)|$

(iii) $y(n) = x(n-2) - 2x(n-8)$

(iv) $y(n) = 2x(n) + 3$

(v) $y(n) = n.x(n)$

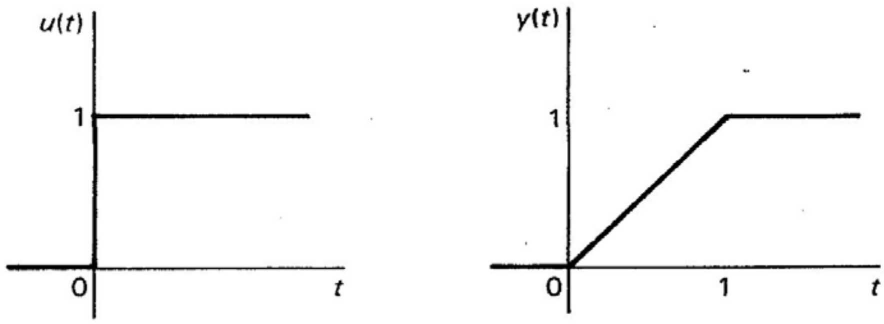
(vi) $y(n) = x(4n+1)$

(vii) $y(n) = 2x(n) + [x(n)]^2$

(viii) $$y(n) = \begin{cases} x(n), & n \geq 1 \\ 0, & n = 0 \\ x(n+1), & n \leq -1 \end{cases}$$

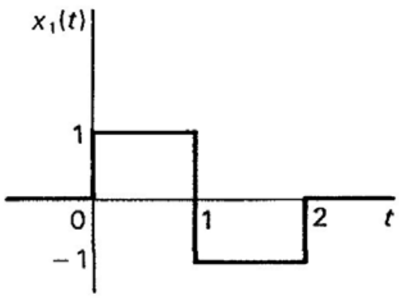
(ix) $$y(n) = \begin{cases} x(n), & n \geq 1 \\ 0, & n = 0 \\ x(n), & n \leq -1 \end{cases}$$

3. O sinal ***x(t)***, Degrau unitário, é aplicado a um sistema Linear e Invariante no tempo. Este sistema produz a saída ***y(t)*** mostrada na figura.

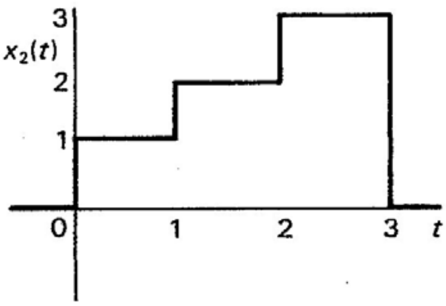


Determine as respostas do sistema às seguintes entradas:

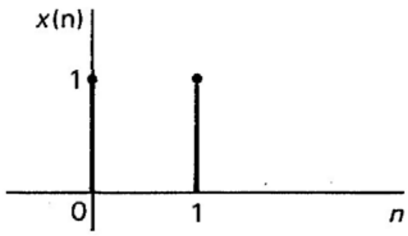
a)

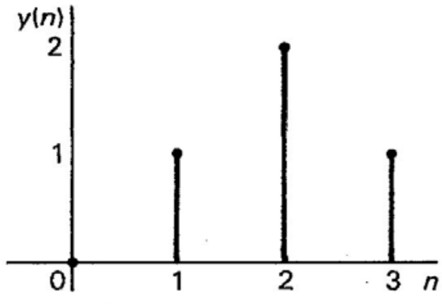


b)



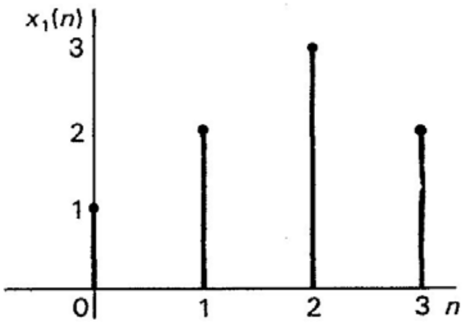
4. O sinal ***x(n)***, Degrau unitário, é aplicado a um sistema Linear e Invariante no tempo. Este sistema produz a saída ***y(n)*** mostrada na figura.



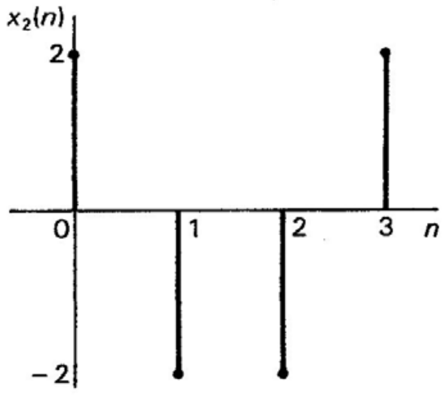


Determine as respostas do sistema às seguintes entradas:

a)



b)



Sistemas LIT - Convolução

1. Considere

$$x(n) = \delta(n) + 2\delta(n-1) - \delta(n-3)$$

$$\text{e} \quad h(n) = 2\delta(n+1) + 2\delta(n-1)$$

Determine e desenhe cada uma das seguintes convoluções:

a) $y_1(n) = x(n) * h(n)$

b) $y_2(n) = x(n+2) * h(n)$

c) $y_3(n) = x(n) * h(n+2)$

2. Considere o sinal

$$h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \{u(n+3) - u(n-10)\}$$

Determine o valor de ***A*** e ***B***, em função de ***n***, de modo que

$$h(n-k) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k-1}, & A \le n \le B \\ 0, & \text{outro valor de n} \end{cases}$$

3. Considere a entrada ***x(n)*** e a resposta impulsional unitária ***h(n)*** dadas por

$$x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} u(n-2)$$

$$h(n) = u(n+2)$$

Determine e desenhe a saída $y(n) = x(n) * h(n)$

4. Determine e desenhe a saída $y(n) = x(n) * h(n)$ onde

$$x(n) = \begin{cases} 1, & 3 \le n \le 8 \\ 0, & \text{outro valor de n} \end{cases}$$

$$h(n) = \begin{cases} 1, & 4 \le n \le 15 \\ 0, & \text{outro valor de n} \end{cases}$$

5. Considere

$$x(n) = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le 9 \\ 0, & \text{outro valor de n} \end{cases}$$

$$h(n) = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le N \\ 0, & \text{outro valor de n} \end{cases}$$

onde $N \le 9$ é um número inteiro. Determine o valor de ***N***, de modo que $y(n) = x(n) * h(n)$, $y(4) = 5$ e $y(14) = 0$.

6. Determine e desenhe a saída $y(n) = x(n) * h(n)$ onde

$$x(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^{-n} u(-n-1)$$

$$h(n) = u(n-1)$$

7. Determine e desenhe a convolução entre os seguintes sinais:

$$x(t) = \begin{cases} t+1, & 0 \le t \le 1 \\ 2-t, & 1 \le t \le 2 \\ 0, & \text{outro valor de t} \end{cases}$$

$$h(t) = \delta(t+2) + 2\delta(t+1)$$

8. Considere

$$h(t) = e^{2t}u(-t+4) + e^{-2t}u(t-5)$$

Determine A e B de modo que

$$h(t-\tau) = \begin{cases} e^{-2(t-\tau)}, & \tau < A \\ 0, & A < t < B \\ e^{2(t-\tau)}, & B < \tau \end{cases}$$

9. Considere

$$x(t) = u(t-3) - u(t-5)$$

$$\text{e } h(t) = e^{-3t}u(t)$$

a) Determine $y(t) = x(t) * h(t)$

b) Determine $g(t) = \left(\dfrac{dx(t)}{dt}\right) * h(t)$

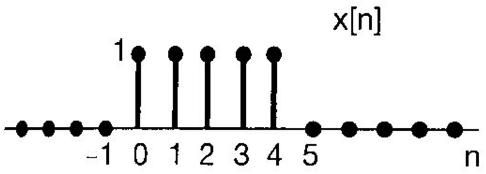
10. Determine a convolução $y(n) = x(n) * h(n)$ dos seguintes pares de sinais:

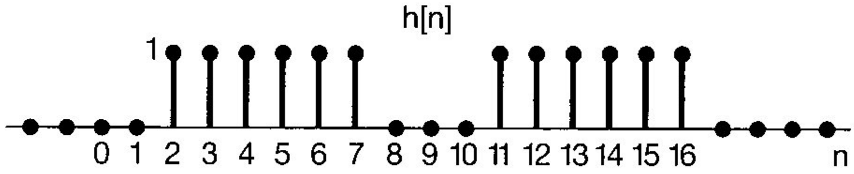
a) $x(n) = \alpha^n u(n)$ e $h(n) = \beta^n u(n)$ com $\alpha \ne \beta$

b) $x(n) = h(n) = \alpha^n u(n)$

c) $x(n) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n u(n-4)$ e $h(n) = 4^n u(2-n)$

d) ***x(n)*** e ***h(n)*** são indicados nas seguintes figuras:





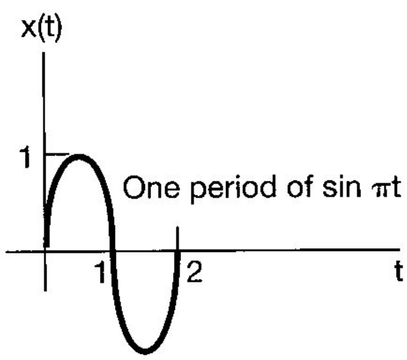
11. Para cada um dos pares indicado a seguir, use o integral de convolução para determinar a resposta ***y(t)*** do sistema LIT com resposta impulsional da entrada ***x(t)***. desenhe o resultado obtido.

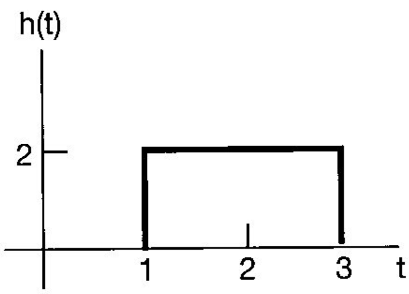
a) $x(t) = e^{-\alpha t}u(t)$ e $h(t) = e^{-\beta t}u(t)$ com $\alpha \neq \beta$

b) $x(t) = e^{-\alpha t}u(t)$ e $h(t) = e^{-\beta t}u(t)$ com $\alpha = \beta$

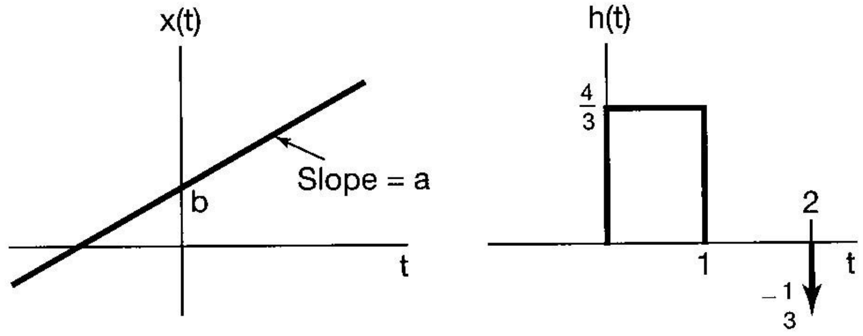
c) $x(t) = u(t) - 2u(t-2) + u(t-5)$ e $h(n) = e^{2t}u(1-t)$

d) ***x(n)*** e ***h(n)*** são indicados nas seguintes figuras:

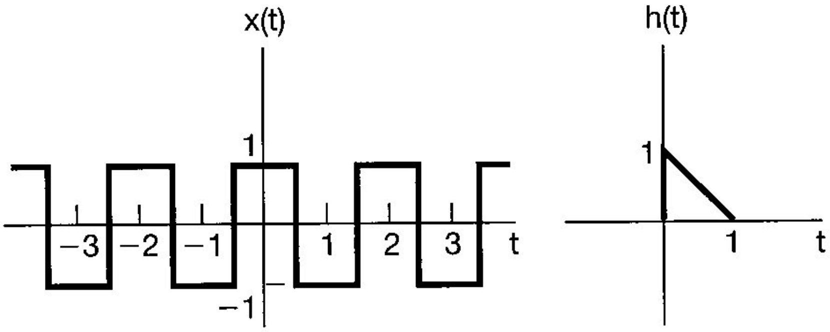




e) ***x(n)*** e ***h(n)*** são indicados nas seguintes figuras:



f) ***x(n)*** e ***h(n)*** são indicados nas seguintes figuras:



Série de Fourier para Sinais Periódicos Contínuos

1. Para a série harmónica:

$$f(t) = \cos 2t + 3\cos 4t$$

use as propriedades de integração para demonstrar que os coeficientes de Fourier da forma exponencial de $f(t)$ são:

a) $C_0=0$

b) $C_1=0,5$

c) $C_2=1,5$

d) $C_k=0$, $k\geq 3$

2. Considere a seguinte equação

$$A\cos\theta - B\,sen\,\theta = D\cos(\theta+\alpha)$$

Prove que

$$D = \sqrt{A^2+B^2} \text{ e } \alpha = arctg\frac{B}{A}$$

a) Usando as identidades trigonométricas

b) Usando as relações de Euler

3. Considere as seguintes funções:

(i) $x(t) = 5 + 2\,sen\,3t + 4\,cos(9t + 40^o)$

(ii) $x(t) = 3 + cos\,t + 5\,cos\,4\pi t$

(iii) $x(t) = 2\,cos(4t + 30^o) - 5\,cos(6t - 45^o)$

(iv) $x(t) = |5\,sen\,\pi t|$

a) Determine quais as funções podem ser representadas em série de Fourier.
b) Para as funções da alínea a) que podem ser representadas em série de Fourier, determine apenas o coeficiente do primeiro harmónico, expresso na forma exponencial.
c) Repita a alínea b) para a forma trigonométrica.

4. Considere as séries de Fourier para as seguintes funções periódicas:

(i) $x(t) = 3 + 5\,cos\,t + 6\,cos(2t + 45^o)$

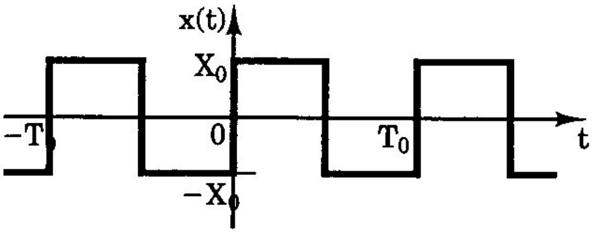
(ii) $x(t) = -10 + 3\,cos\,t + 7\,sen\,4{,}5t$

(iii) $x(t) = 5 - 10\,cos\,10^6 t + 4\,cos\,10^7 t + 2\,sen(1{,}1 \times 10^7 t)$

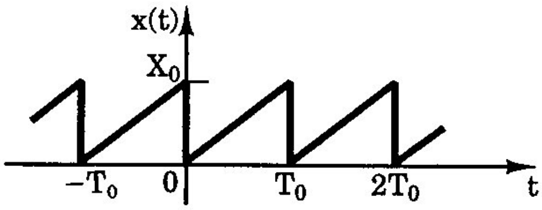
a) Determine os coeficientes de Fourier da forma exponencial para cada sinal.
b) Determine os coeficientes de Fourier da forma trigonométrica para cada sinal.

5. Considere os seguintes sinais:

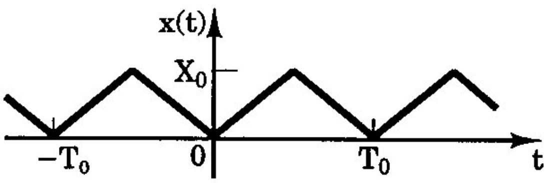
(i) Onda quadrada



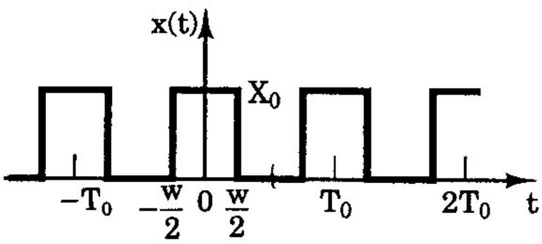
(ii) Onda dente-de-serra



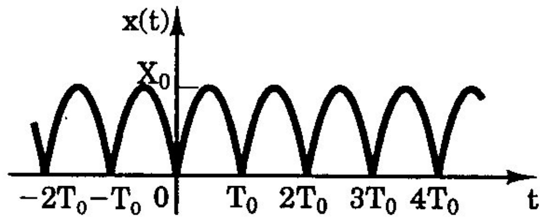
(iii) Onda triangular



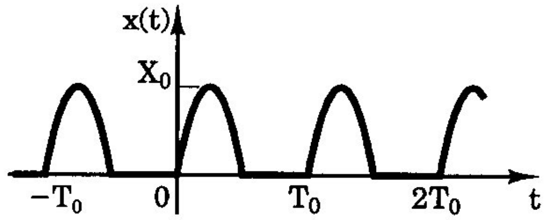
(iv) Onda rectangular



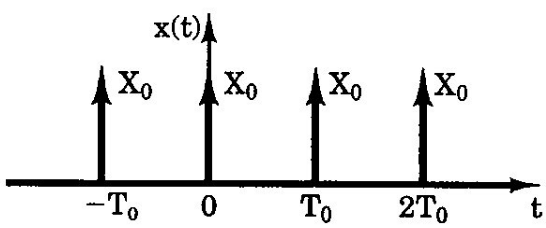
(v) Onda rectificada de onda completa



(vi) Onda rectificada de meia onda



(vii) Trem de impulsos

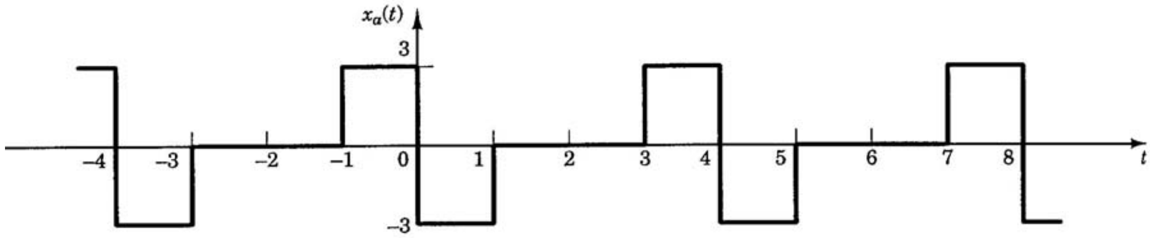


a) Determine os coeficientes da forma exponencial da série de Fourier C_0 e C_k.

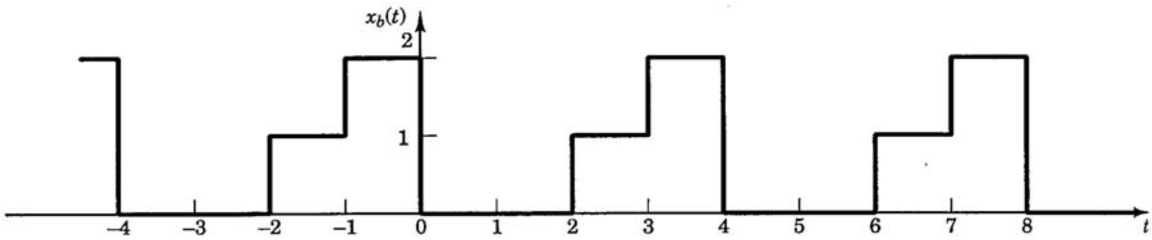
b) Determine os coeficientes da forma trigonométrica da série de Fourier A_0 e A_k e B_k.

6. Determine a forma exponencial da série de Fourier dos seguintes sinais:

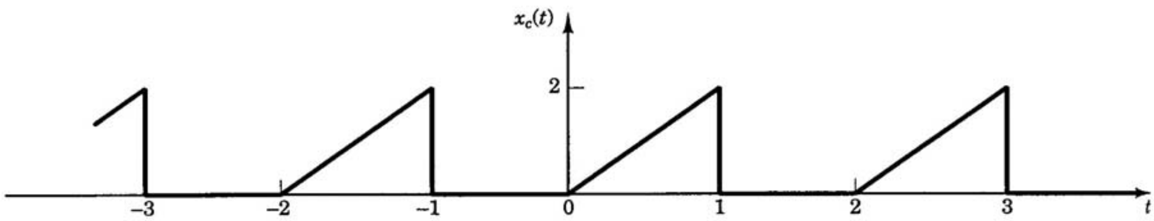
a)



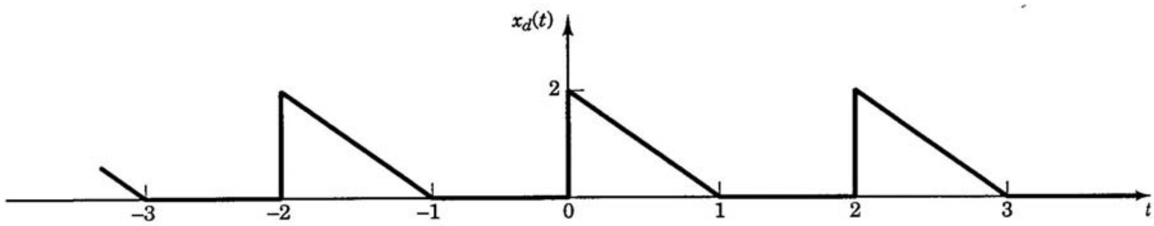
b)



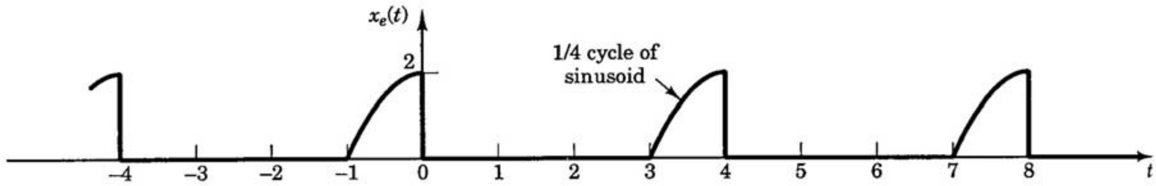
c)



d)

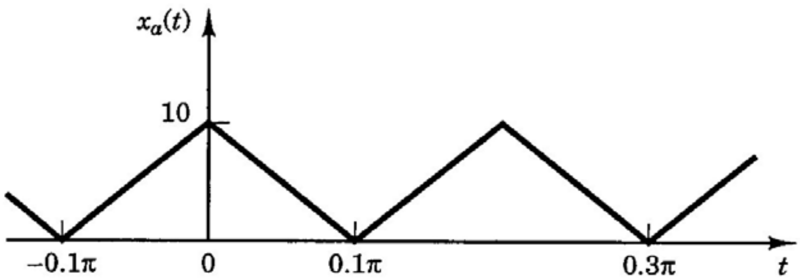


e)

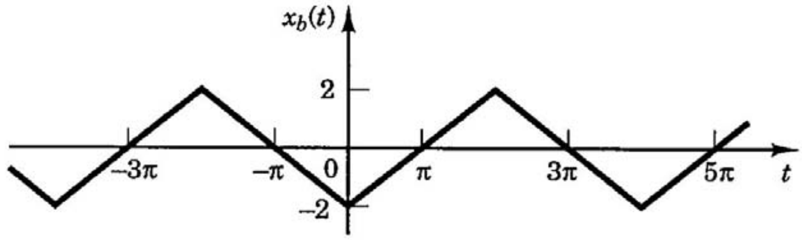


7. Usando os resultados do ponto 5 determine a forma exponencial e trigonométrica da série de Fourier dos seguintes sinais:

a)

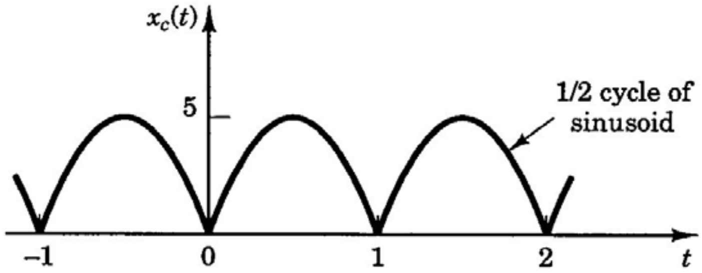


b)



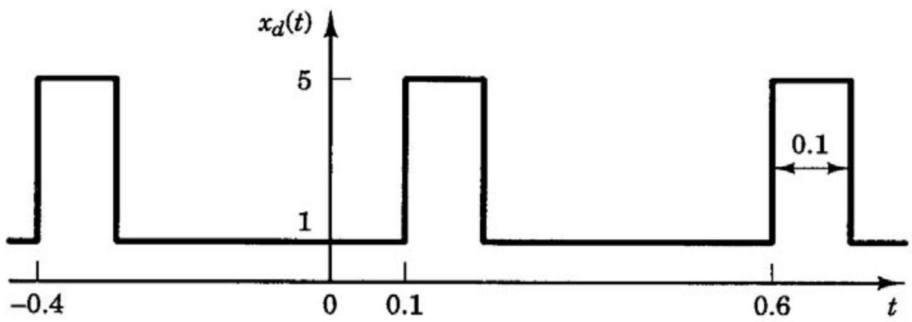
$x_b(t)$
2
0
−2
−3π
−π
π
3π
5π
t

c)



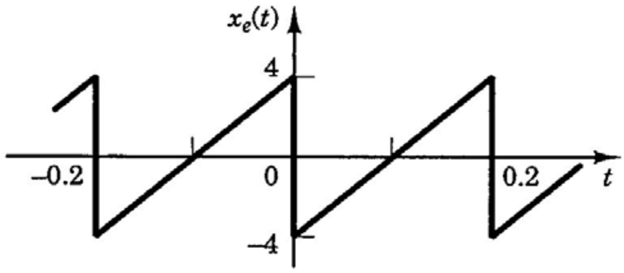
$x_c(t)$
5
1/2 cycle of sinusoid
−1
0
1
2
t

d)



$x_d(t)$
5
1
0.1
−0.4
0
0.1
0.6
t

e)



8.

a) Faça um esboço do espectro de frequências dos sinais apresentados no ponto 5, mostrando o valor da componente dc e os quatro primeiros harmónicos. Considere $\boldsymbol{X}_0$=10.

b) Faça um esboço do espectro de frequências dos sinais apresentados no ponto 6, mostrando o valor da componente dc e os quatro primeiros harmónicos.

c) Faça um esboço do espectro de frequências dos sinais apresentados no ponto 7, mostrando o valor da componente dc e os quatro primeiros harmónicos.

Transformada e Transformada Inversa de Fourier para Sinais Contínuos

1. Determine a Transformada de Fourier dos seguintes sinais:

a) $f_1(t) = e^{-2(t-1)}u(t-1)$

b) $f_2(t) = e^{-2|t-1|}$

c) $f_3(t) = \delta(t+1) + \delta(t-1)$

d) $f_4(t) = \frac{d}{dt}\{u(-2-t) + u(t-2)\}$

e) $f_5(t) = sen\left(2\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$

f) $f_6(t) = 1 + cos\left(6\pi t + \frac{\pi}{8}\right)$

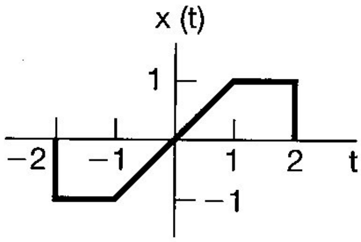
g) $f_7(t) = \left[t.e^{-2t}\ sen\,4t\right].u(t)$

h) $f_8(t) = e^{-3|t|}\ sen\,2t$

i) $f_9(t) = \begin{cases} 1-t^2, & 0 < t < 1 \\ 0, & \text{outro valor de } t \end{cases}$

j) $f_{10}(t) = \begin{cases} 1 + cos\,\pi t, & |t| \le 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$

k)



2. Determine a Transformada Inversa de Fourier dos seguintes sinais periódicos

a) $F_1(w) = 2\pi\delta(w) + \pi\delta(w - 4\pi) + \pi\delta(w + 4\pi)$

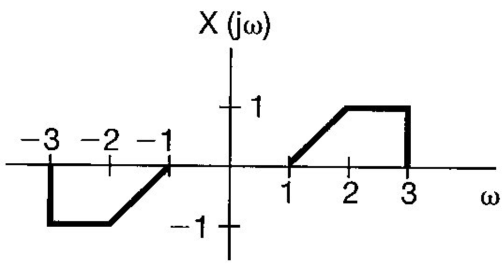
b) $F_2(w) = \begin{cases} 2, & 0 \le w \le 2 \\ -2, & -2 \le w < 0 \\ 0, & |w| > 2 \end{cases}$

c) $F_3(w) = \dfrac{2\,sen[3(w - 2\pi)]}{(w - 2\pi)}$

d) $F_4(w) = cos\left(4w + \dfrac{\pi}{3}\right)$

e) $F_5(w) = 2[\delta(w - 1) - \delta(w + 1)] + 3[\delta(w - 2\pi) + \delta(w + 2\pi)]$

f)



3. Sabendo que ***x(t)*** tem como Transformada de Fourier ***X(w)***, exprima a transformada dos sinais a seguir apresentados em função de ***X(w)***. Para isso, utilize as propriedades da Transformada de Fourier.

a) $x_1(t) = x(1-t) + x(-1-t)$

b) $x_2(t) = x(3t-6)$

c) $x_3(t) = \frac{d^2}{dt^2} x(t-1)$

4. Dada a relação

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

e

$$g(t) = x(3t) * h(3t)$$

e sabendo que as Transformadas de Fourier de ***x(t)*** e ***h(t)*** são ***X(w)*** e ***H(w)***, respectivamente, use as propriedades da Transformada de Fourier para mostrar que ***g(t)*** é dada pela expressão

$$g(t) = A.y(Bt)$$

Determine os valores de ***A*** e ***B***.

5. Considere o seguinte par de Transformadas de Fourier

$$e^{-|t|} \xleftrightarrow{F} \frac{2}{1+w^2}$$

a) Use as propriedades da Transformada de Fourier apropriadas para determinar a Transformada de Fourier de $t.e^{-|t|}$.

b) Use o resultado da alínea a), e a propriedade adequada, para determinar a transformada de Fourier de $\frac{4t}{(1+t^2)^2}$.

6. Considere o seguinte sinal

$$f(t)=\begin{cases}0, & t<-\dfrac{1}{2}\\ t+\dfrac{1}{2}, & -\dfrac{1}{2}\le t\le\dfrac{1}{2}\\ 1, & t>\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

   a) Sabendo que

$$x(t)=\begin{cases}1, & |t|<T_1\\ 0, & |t|>T_1\end{cases}\xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(w)=\frac{2\operatorname{sen}wT_1}{w}$$

   utilize as propriedades da Transformada de Fourier para determinar a expressão aproximada para ***F(w)***.

   b) Qual a Transformada de Fourier de $g(t)=f(t)-\dfrac{1}{2}$?

7. Determine a convolução de cada um dos seguintes pares de sinais ***x(t)*** e ***h(t)*** através do cálculo de ***X(w)*** e ***H(w)***, do uso da propriedade da convolução e do cálculo da Transformada Inversa de Fourier.

   a) $x(t)=t.e^{-2t}u(t)$ e $h(t)=e^{-4t}u(t)$

   b) $x(t)=t.e^{-2t}u(t)$ e $h(t)=t.e^{-4t}u(t)$

   c) $x(t)=e^{-2t}u(t)$ e $h(t)=e^{t}u(-t)$

Transformada e Transformada Inversa de Laplace

1. Determine a Transformada de Laplace e as correspondentes regiões de convergência para cada uma das seguintes funções:

   a) $x_1(t) = e^{-2t}u(t) + e^{-3t}u(t)$

   b) $x_2(t) = e^{-4t}u(t) + e^{-5t}\, sen(5t)u(t)$

   c) $x_3(t) = \delta(t) + u(t)$

   d) $x_4(t) = t.e^{-2t}u(t)$

2. Sabendo que

$$g(t) = x(t) + \alpha.x(-t)$$

   e

$$x(t) = \beta.e^{-t}u(t)$$

   use as propriedades da Transformada de Laplace para mostrar que:

$$G(s) = \frac{s}{s^2 - 1}, \qquad -1 < Re\{s\} < 1$$

   Determine os valores de α e β.

3. Considere o sinal

$$y(t) = x_1(t-2) * x_2(-t+3)$$

onde

$$x_1(t) = e^{-2t}u(t) \quad \text{e} \quad x_2(t) = e^{-3t}u(t).$$

Determine a transformada de Laplace, Y(s) e a sua região de convergência, usando as propriedades da transformada.

4. Determine a Transformada Inversa de Laplace, para cada uma das funções e regiões de convergência indicadas:

a) $X_1(s) = \dfrac{2s^2 + 4s - 6}{s^2 + 3s + 2}, \qquad Re\{s\} > -1$

b) $X_2(s) = \dfrac{s+2}{s^3(s+1)}, \qquad Re\{s\} > 0$

c) $X_3(s) = \dfrac{1}{s^2 + 9}, \qquad Re\{s\} > 0$

d) $X_4(s) = \dfrac{s-1}{s^2 + 5s + 6}, \qquad -3 < Re\{s\} < -2$

e) $X_5(s) = \dfrac{2s^2 + 4s - 6}{s^2 + 3s + 2}, \qquad Re\{s\} < -2$

5. Determine a resposta impulsional ***h(t)*** de um sistema causal cuja entrada ***x(t)*** e saída ***y(t)*** estão relacionadas pelas seguintes equações diferenciais

   a) $\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = x(t)$

   b) $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 3x(t)$

Anexo A - Identidades Trigonométricas

$$\cos(a \pm b) = \cos a . \cos b \mp \operatorname{sen} a . \operatorname{sen} b$$

$$\operatorname{sen}(a \pm b) = \operatorname{sen} a . \cos b \pm \cos a . \operatorname{sen} b$$

$$\cos a . \cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$$

$$\operatorname{sen} a . \operatorname{sen} b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$$

$$\operatorname{sen} a . \cos b = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b)\right]$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2 a$$

$$\operatorname{sen} 2a = 2 \operatorname{sen} a . \cos a$$

$$\cos^2 a = \frac{1}{2}\left(1 + \cos 2a\right)$$

$$\operatorname{sen}^2 a = \frac{1}{2}\left(1 - \cos 2a\right)$$

Anexo B - <u>Somatórios de Séries Geométricas</u>

$$\sum_{k=n_1}^{n_2} a^k = \frac{a^{n_1} - a^{n_2+1}}{1-a}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k a^k = \frac{a}{(1-a)^2} \; ; \qquad |a| < 1$$

Anexo C - Propriedades da Transformada Contínua de Fourier

Propriedades	Sinal	Transformada
	$x(t)$	$X(w)$
	$y(t)$	$Y(w)$
Linearidade	$a.x(t)+b.y(t)$	$a.X(w)+b.Y(w)$
Deslocamento no tempo	$x(t-t_0)$	$e^{-jwt_0}.X(w)$
Deslocamento nas frequências	$e^{jw_0t}.x(t)$	$X(w-w_0)$
Conjugação	$x^*(t)$	$X^*(-w)$
Reflexão no tempo	$x(-t)$	$X(-w)$
Escalonamento no tempo	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{w}{a}\right)$
Convolução	$x(t)*y(t)$	$X(w).Y(w)$
Multiplicação	$x(t).y(t)$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(\theta).Y(w-\theta).d\theta$
Derivação no tempo	$\frac{d}{dt}x(t)$	$jw.X(w)$
Integração	$\int_{-\infty}^{t}x(\tau).d\tau$	$\frac{1}{jw}X(w)+\pi X(0)\delta(w)$
Derivação nas frequências	$t.x(t)$	$j\frac{d}{dw}X(w)$

Anexo D - Propriedades da Transformada Discreta de Fourier

Propriedades	Sinal	Transformada
	$x(n)$	$X(e^{jw})$
	$y(n)$	$Y(e^{jw})$
Linearidade	$a.x(n)+b.y(n)$	$a.X(e^{jw})+b.Y(e^{jw})$
Deslocamento no tempo	$x(n-n_0)$	$e^{-jwn_0}.X(e^{jw})$
Deslocamento nas frequências	$e^{jw_0n}.x(n)$	$X(e^{j(w-w_0)})$
Conjugação	$x^*(n)$	$X^*(e^{-jw})$
Reflexão no tempo	$x(-n)$	$X(e^{-jw})$
Escalonamento no tempo	$x_{(k)}(n)=\begin{cases} x\left(\frac{n}{k}\right), & n = \text{multiplo de } k \\ & n \neq \text{multiplo de } k \end{cases}$	$X(e^{jkw})$
Convolução	$x(n)*y(n)$	$X(e^{jw}).Y(e^{jw})$
Multiplicação	$x(n).y(n)$	$\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\theta}).Y(e^{j(w-\theta)}).d\theta$
Derivação no tempo	$x(n)-x(n-1)$	$\left(1-e^{-jw}\right)X(e^{jw})$
Acumulação	$\sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$	$\frac{1}{1-e^{-jw}}X(e^{jw}) + \pi X(e^{j0})\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(w-2k\pi)$
Derivação nas frequências	$n.x(n)$	$j\frac{d}{dw}X(e^{jw})$

Anexo E - Propriedades da Transformada de Laplace

Propriedades	Sinal	Transformada	ROC
	$x(t)$	$X(s)$	R_1
	$y(t)$	$Y(s)$	R_2
Linearidade	$a.x(t)+b.y(t)$	$a.X(s)+b.Y(s)$	Pelo menos $R_1 \cap R_2$
Deslocamento no tempo	$x(t-t_0)$	$e^{-st_0}.X(s)$	R_1
Deslocamento nas frequências	$e^{s_0 t}.x(t)$	$X(s-s_0)$	R_1 deslocada
Conjugação	$x^*(t)$	$X^*(s^*)$	R_1
Escalonamento no tempo	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a \rvert} X\left(\frac{s}{a}\right)$	R_1 escalonada
Convolução	$x(t)*y(t)$	$X(s).Y(s)$	Pelo menos $R_1 \cap R_2$
Derivação no tempo	$\frac{d}{dt}x(t)$	$s.X(s)$	Pelo menos R_1
Integração	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau).d\tau$	$\frac{1}{s}X(s)$	Pelo menos $R_1 \cap \{Re\{s\} > 0\}$
Derivação no Domínio-s	$-t.x(t)$	$\frac{d}{ds}X(s)$	R_1

Bibliografia

- *Signals & Systems*, Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, S. Hamid Nawab, Second Edition, Prentice Hall International Editions

- *Signals, Systems and Transforms*, Charles L. Phillips, John M. Parr, Prentice Hall

- *Signals and Systems, An introduction*, Leslie Balmer, Second Edition, Prentice Hall