Teoria do Sinal
2EE / 2EI – 30/06/2003
Exame – Resolução

1. $y(t) = x^2(t-3)$
   a. Um sistema é linear se a entrada $[a \cdot x_1(t) + b \cdot x_2(t)]$ produzir a saída $[a \cdot y_1(t) + b \cdot y_2(t)]$, em que *a* e *b* são constantes, $y_1(t)$ é a saída quando a entrada é $x_1(t)$ e $y_2(t)$ é a saída quando a entrada é $x_2(t)$.
   Assim, tem-se:
   - para a entrada $x_1(t)$:
   $$y_1(t) = x_1^2(t\text{-}3)$$
   - para a entrada $x_2(t)$:
   $$y_2(t) = x_2^2(t\text{-}3)$$
   - para a entrada $x_c(t)$:
   $$y_c(t) = x_c^2(t) = [a \cdot x_1(t\text{-}3) + b \cdot x_2(t\text{-}3)]^2 =$$
   $$= a^2 \cdot x_1^2(t\text{-}3) + 2 \cdot a \cdot b \cdot x_1(t\text{-}3) \cdot x_2(t\text{-}3) + b^2 \cdot x_2^2(t\text{-}3)$$
   Como $a \cdot y_1(t) + b \cdot y_2(t) = a \cdot x_1^2(t\text{-}3) + b \cdot x_2^2(t\text{-}3) \neq y_c(t)$, o sistema não é linear.

   b. Um sistema é invariante no tempo se a entrada $[\,x(t - t_0)\,]$ produzir a saída $[\,y(t - t_0)\,]$.
   Assim, quando a entrada for $x(t - t_0)$, a saída é
   $$y_i(t) = x^2(t\text{-}t_0\text{-}3).$$
   Por outro lado,
   $$y(t\text{-}t_0) = x^2(t\text{-}t_0\text{-}3).$$
   Como $y_i(t) = y(t - t_0)$, o sistema é invariante no tempo.

   c. Um sistema é causal se a saída não depender de instantes futuros. Como $y(t) = x^2(t\text{-}3)$, pode ver-se que a saída não depende de instantes futuros – neste caso só depende de instantes passados, pelo que o sistema é causal.

2. O período do sinal é 4s. Definindo x(t) durante um período, por exemplo, entre 0 e 4 s, vem:
$$x(t) = \begin{cases} 2 \cdot \cos(\omega_0 t) = 2 \cdot \cos\left(\dfrac{\pi}{2} t\right), & 0 < t \le 2 \\ 2, \quad 2 \le t < 4 \end{cases}, \text{ pois } \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

a. Na forma trigonométrica da série de Fourier usam-se os coeficientes A_0, A_k e B_k. Para A_0, vem

$$A_0 = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\,dt = \frac{1}{4}\cdot\left(\int_0^2 2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)dt + \int_2^4 2\,dt\right) = \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{\pi/2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\Big|_0^2 + 2\cdot t\big|_2^4\right) = 1$$

Para A_k, vem

$$A_k = \frac{2}{T_0}\int_{T_0} x(t)\cdot\cos(k\omega_0 t)\,dt = \frac{1}{2}\cdot\left(\int_0^2 2\cdot\cos(\frac{\pi}{2}t)\cdot\cos(k\omega_0 t)\,dt + \int_2^4 2\cdot\cos(k\omega_0 t)\,dt\right)$$

Para o primeiro integral, vem

$$\frac{1}{2}\int_0^2 2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\cdot\cos\left(k\frac{\pi}{2}t\right)dt = \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{2}{2}\cdot\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}t + k\frac{\pi}{2}t\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}t - k\frac{\pi}{2}t\right)\right]dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 \cos\left(\frac{\pi}{2}t(1+k)\right)dt + \frac{1}{2}\int_0^2 \cos\left(\frac{\pi}{2}t(1-k)\right)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{\pi/2\cdot(1+k)}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}t(1+k)\right)\Big|_0^2 + \frac{1}{\pi/2\cdot(1-k)}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}t(1-k)\right)\Big|_0^2\right] = 0$$

Para o segundo integral, vem

$$\int_2^4 2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)dt = \frac{2}{\pi/2\cdot k}\times\sin\left(\frac{k\pi}{2}t\right)\Big|_2^4 = \frac{2}{\pi/2\cdot k}\times\left(\sin\left(\frac{k\pi}{2}4\right) - \sin\left(\frac{k\pi}{2}2\right)\right) = 0$$

Somando, vem

$$A_k = 0$$

Para B_k, vem

$$B_k = \frac{2}{T_0}\int_{T_0} x(t)\cdot\sin(k\omega_0 t)\,dt = \frac{1}{2}\cdot\left(\int_0^2 2\cdot\cos(\frac{\pi}{2}t)\cdot\sin(k\omega_0 t)\,dt + \int_2^4 2\cdot\sin(k\omega_0 t)\,dt\right)$$

Para o primeiro integral, vem

$$\frac{1}{2}\int_0^2 2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\cdot\sin\left(k\frac{\pi}{2}t\right)dt=\frac{1}{2}\int_0^2\frac{2}{2}\left(\sin\left(k\frac{\pi}{2}t+\frac{\pi}{2}t\right)\right)dt+\frac{1}{2}\int_0^2\frac{2}{2}\left(\sin\left(k\frac{\pi}{2}t-\frac{\pi}{2}t\right)\right)dt=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\int_0^2\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}t(k+1)\right)\right)dt+\frac{1}{2}\cdot\int_0^2\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}t(k-1)\right)\right)dt=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-1}{\pi/2\cdot(k+1)}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}t(k+1)\right)\Bigg|_0^2+\frac{-1}{\pi/2\cdot(k-1)}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}t(k-1)\right)\Bigg|_0^2\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{\pi/2\cdot(k+1)}\times\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}2(k+1)\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}0(k+1)\right)\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{\pi/2\cdot(k-1)}\times\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}2(k-1)\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}0(k-1)\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi\cdot(k+1)}\times(1-\cos(\pi(k+1)))+\frac{1}{\pi\cdot(k-1)}\times(1-\cos(\pi(k-1)))=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi\cdot(k+1)}+\dfrac{2}{\pi\cdot(k-1)}, & k\ par\\ 0\qquad\qquad\qquad, & k\ ímpar\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{4k}{\pi\cdot(k+1)\cdot(k-1)}, & k\ par\\ 0\qquad\qquad, & k\ ímpar\end{cases}$$

Para o segundo integral, vem

$$\frac{1}{2}\int_2^4 2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)dt=\frac{-1}{\pi/2\cdot k}\times\cos\left(\frac{k\pi}{2}t\right)\Bigg|_2^4=\frac{-2}{\pi\cdot k}\times\left(\cos\left(\frac{k\pi}{2}4\right)-\cos\left(\frac{k\pi}{2}2\right)\right)=$$

$$=\begin{cases}0, & k\ par\\ \dfrac{-4}{k\pi}, & k\ ímpar\end{cases}$$

Somando, vem

$$B_k=\begin{cases}\dfrac{4k}{\pi\cdot(k+1)\cdot(k-1)}, & k\ par\\ \dfrac{-4}{k\pi}\qquad\qquad, & k\ ímpar\end{cases}$$

O sinal x(t) representado na forma trigonométrica da série de Fourier vem

$$x(t)=1+\sum_{\substack{k=1\\ k\ ímpar}}^{+\infty}\frac{-4}{k\pi}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)+\sum_{\substack{k=1\\ k\ par}}^{+\infty}\frac{4k}{\pi\cdot(k+1)\cdot(k-1)}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

b. Para a forma trigonométrica combinada da série de Fourier, necessita-se dos coeficientes C_0 e C_k. Atendendo a que estes coeficientes devem ser calculados a partir dos obtidos na alínea anterior, de acordo com o enunciado, tem de se usar a relação entre eles.

Assim, para o cálculo C_0 de faz-se
$C_0 = A_0 = 1$.

Sabe-se a relação entre A_k, B_k e C_k; essa relação é: $2C_k=A_k-jB_k$, donde se tira

$$C_k = \frac{A_k}{2} - j\frac{B_k}{2} = \begin{cases} \dfrac{-2kj}{\pi\cdot(k+1)\cdot(k-1)}, & k\ par \\ \dfrac{2j}{k\pi}, & k\ ímpar \end{cases}$$

Destes resultados, tira-se

$$x(t) = 1 + \sum_{\substack{k=1 \\ k\ ímpar}}^{+\infty} 2\cdot\left|\frac{2j}{k\pi}\right|\cdot\cos\left(\frac{k\pi}{2}t\right)\sum_{\substack{k=1 \\ k\ par}}^{+\infty} 2\cdot\left|\frac{-2kj}{\pi\cdot(k+1)\cdot(k-1)}\right|\cdot\cos\left(\frac{k\pi}{2}t\right).$$

3.

a. $x(t) = e^{-at}\cdot\cos(\omega_0 t)\cdot u(t)$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at}\cdot\cos(\omega_0 t)\cdot u(t)\cdot e^{-st}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-(a+s)t}\cdot\cos(\omega_0 t)\,dt \quad *$$

$$X(s) = \int_0^{+\infty} e^{-(a+s)t}\cdot\frac{e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}}{2}\,dt = \frac{1}{2}\cdot\int_0^{+\infty} e^{-(a+s-j\omega_0)t}\,dt + \frac{1}{2}\cdot\int_0^{+\infty} e^{-(a+s+j\omega_0)t}\,dt$$

$$X(s) = \frac{1}{2}\times\left(\frac{-1}{a+s-j\omega_0}\cdot e^{-(a+s-j\omega_0)t}\Big|_0^{+\infty} + \frac{-1}{a+s+j\omega_0}\cdot e^{-(a+s+j\omega_0)t}\Big|_0^{+\infty}\right)$$

$$X(s) = \frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{a+s-j\omega_0}+\frac{1}{a+s+j\omega_0}\right) = \frac{1}{2}\times\left(\frac{a+s+j\omega_0+a+s-j\omega_0}{(a+s)^2+{\omega_0}^2}\right)$$

$$X(s) = \frac{a+s}{(a+s)^2+{\omega_0}^2}$$

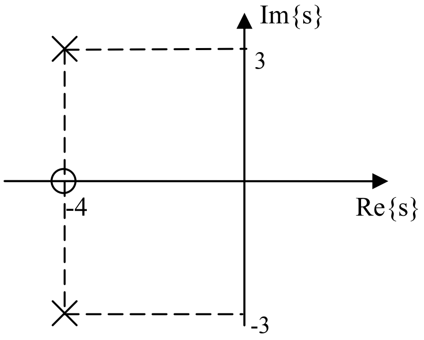
Para que * convirja, tem-se que ter Re{s} > -a.

Logo $x(t) = e^{-at}\cdot\cos(\omega_0 t)\cdot u(t) \quad \overset{L}{\leftrightarrow} \quad X(s) = \dfrac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^2}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > -a$

b. $H(s) = \dfrac{s+4}{(s+4)^2+9}$, $\mathrm{Re}\{s\} > -4$

c. Os zeros da função de transferência são os zeros do numerador; neste caso, há um zero em -4.
Os pólos da função de transferência são os zeros do denominador; neste caso, $s^2+8s+16+9=0 \quad \Leftrightarrow \quad s=-4\pm j3$

Assim, no domínio-s vem



d. $X(s) = \dfrac{3}{(s+4)}$, $\mathrm{Re}\{s\} > -4$

$$Y(s) = H(s) \cdot X(s) = \frac{s+4}{(s+4)^2+9} \cdot \frac{3}{s+4} = \frac{3}{(s+4)^2+9} = \frac{3}{(s+4)+3^2} \quad , \mathrm{Re}\{s\} > -4$$

Pelas tabelas tira-se:

$$y(t) = e^{-4t} \cdot sen(3t) \cdot u(t)$$

4.

a.

1º Intervalo t≤3 → y(t)=0

2º Intervalo t>3 e t ≤5

$$y(t) = \int_3^t x(\tau).h(t-\tau)d\tau = \int_3^t 2.3.e^{-3(t-\tau)}d\tau = 6.\int_3^t e^{-3t}.e^{3\tau}d\tau = 6.e^{-3t}.\int_3^t e^{3.\tau}d\tau = \frac{6.e^{-3t}}{3}.\left[e^{3t} - e^{9}\right]_3^t =$$

$$= 2 - 2.e^{-3(t-3)}$$

3º Intervalo t>5

$$y(t) = \int_3^5 x(\tau).h(t-\tau)d\tau = \int_3^5 2.3.e^{-3(t-\tau)}d\tau = \frac{6.e^{-3t}}{3}.\left[e^{3\tau}\right]_3^5 = 2.e^{-3t}\left(e^{15} - e^{9}\right)$$

b.

$$\frac{dx(t)}{dt} = \delta(t-3) - \delta(t-5)$$

$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x'(\tau).h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} 2.\left[\delta(t-3) - \delta(t-5)\right].3.e^{-3(t-\tau)}.u(t-\tau)d\tau =$$

$$= 6.\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau-3).e^{-3(t-\tau)}.u(t-\tau)d\tau - 6.\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau-5).e^{-3(t-\tau)}.u(t-\tau)d\tau =$$

$$= 6.e^{-3(t-\tau)}.u(t-\tau)\Big|_{\tau=3} - 6.e^{-3(t-\tau)}.u(t-\tau)\Big|_{\tau=5}$$

$$= 6.e^{-3(t-3)}.u(t-3) - 6.e^{-3(t-5)}.u(t-5)$$

5.

a.

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t).e^{-j\omega t}dt = \int_0^1 e^{-t}.e^{-j\omega t}dt = \int_0^1 e^{-(1+j\omega).t}dt = -\frac{1}{1+j\omega}\left[e^{-(1+j\omega).t}\right]_0^1 = -\frac{1}{1+j\omega}\left(e^{-(1+j\omega)} - 1\right) =$$

$$= \frac{1-e^{-(1+j\omega)}}{1+j\omega}$$

b.

$$z(t) = x(t) + x(t+1) \xrightarrow{F} Z(\omega) = X(\omega) + e^{j\omega}.X(\omega)$$

$$Z(\omega) = \frac{1-e^{-(1+j\omega)}}{1+j\omega}.\left(1+e^{j\omega}\right) = \frac{1+e^{j\omega} - e^{-(1+j\omega)} - e^{-1}}{1+j\omega} = \frac{1+e^{j\omega} - e^{-1}.\left(1+e^{-j\omega}\right)}{1+j\omega}$$