Teoria do Sinal
2EE / 2EI – 14/06/2003
Frequência – Resolução

1. $y(t) = x(t)\cdot|\cos(3t)|$
   a. Um sistema é linear se a entrada $[a\cdot x_1(t) + b\cdot x_2(t)]$ produzir a saída $[a\cdot y_1(t) + b\cdot y_2(t)]$, em que *a* e *b* são constantes, $y_1(t)$ é a saída quando a entrada é $x_1(t)$ e $y_2(t)$ é a saída quando a entrada é $x_2(t)$.
   Assim, tem-se:
   - para a entrada $x_1(t)$:
   $$y_1(t) = x_1(t)\cdot|\cos(3t)|$$
   - para a entrada $x_1(t)$:
   $$y_2(t) = x_2(t)\cdot|\cos(3t)|$$
   - para a entrada $x_1(t)$:
   $$y_c(t) = x_c(t)\cdot|\cos(3t)| = [a\cdot x_1(t) + b\cdot x_2(t)]\cdot|\cos(3t)| =$$
   $$= a\cdot x_1(t)\cdot|\cos(3t)| + b\cdot x_2(t)\cdot|\cos(3t)|$$
   Como $a\cdot y_1(t) + b\cdot y_2(t) = a\cdot x_1(t)\cdot|\cos(3t)| + b\cdot x_2(t)\cdot|\cos(3t)| = y_c(t)$, o sistema é linear.

   b. Um sistema é invariante no tempo se a entrada $[\,x(t - t_0)\,]$ produzir a saída $[\,y(t - t_0)\,]$.
   Assim, quando a entrada for $x(t – t_0)$, a saída é
   $$y_i(t) = x(t - t_0)\cdot|\cos(3t)|.$$
   Por outro lado,
   $$y(t - t_0) = x(t - t_0)\cdot|\cos(3(t - t_0))|.$$
   Como $y_i(t) \neq y(t - t_0)$, o sistema não é invariante no tempo.

   c. Um sistema é causal se a saída não depender de instantes futuros. Como $y(t) = x(t)\cdot|\cos(3t)|$, pode ver-se que a saída não depende de instantes futuros, pelo que o sistema é causal.
2. O período do sinal é 4s. Definindo x(t) durante um período, por exemplo, entre 0 e 4 s, vem:
   $$x(t) = \begin{cases} t, & 0 < t \leq 2 \\ 2, & 2 \leq t < 4 \end{cases}$$
   a. Na forma exponencial da série de Fourier usam-se os coeficientes C_k. Para C_0, vem
   $$C_0 = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\,dt = \frac{1}{4}\cdot\left(\int_0^2 t\,dt + \int_2^4 2\,dt\right) = \frac{1}{4}\cdot\left(\left.\frac{t^2}{2}\right|_0^2 + 2\cdot t\big|_2^4\right) = \frac{3}{2}.$$

Para C_k, vem

$$C_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\cdot e^{-jk\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{4}\cdot\left(\int_0^2 t\cdot e^{-jk\omega_0 t}\,dt + \int_2^4 2\cdot e^{-jk\omega_0 t}\,dt\right)$$

Para o primeiro integral, vem

$$\int_0^2 t\cdot e^{-jk\omega_0 t}\,dt = \left.\frac{-t}{j\frac{k\pi}{2}}\cdot e^{-j\frac{k\pi}{2}t}\right|_0^2 - \int_0^2 \frac{-1}{j\frac{k\pi}{2}}\cdot e^{-j\frac{k\pi}{2}t}\,dt =$$

$$= \frac{2j}{k\pi}\cdot\left(2\times e^{-j\frac{k\pi}{2}2} - 0\times e^{-j\frac{k\pi}{2}0}\right) + \frac{2}{jk\pi}\cdot\left(\frac{-1}{j\frac{k\pi}{2}}\right)\cdot\left. e^{-j\frac{k\pi}{2}t}\right|_2^4 = \frac{2j}{k\pi}\cdot\left(2\times e^{-jk\pi}\right) - \frac{4}{(k\pi)^2}\cdot\left(e^{-jk\pi}-1\right)$$

Para o segundo integral, vem

$$\int_2^4 2\cdot e^{-jk\omega_0 t}\,dt = \left.\frac{4j}{k\pi}\times e^{-j\frac{k\pi}{2}t}\right|_2^4 = \frac{4j}{k\pi}\times\left(e^{-j2k\pi} - e^{-jk\pi}\right)$$

Somando, vem

$$C_k = \frac{1}{4}\times\left[\frac{4j}{k\pi}\cdot e^{-jk\pi} - \frac{4}{(k\pi)^2}\cdot\left(e^{-jk\pi}-1\right) + \frac{4j}{k\pi}\cdot\left(e^{-j2k\pi}-e^{-jk\pi}\right)\right]$$

$$C_k = \frac{j}{k\pi}\cdot e^{-jk\pi} - \frac{1}{(k\pi)^2}\cdot(e^{-jk\pi}-1) + \frac{j}{k\pi}\cdot\left(e^{-j2k\pi}-e^{-jk\pi}\right)$$

$$C_k = \frac{j}{k\pi}\cdot\left(e^{-jk\pi}+e^{-j2k\pi}-e^{-jk\pi}\right) - \frac{1}{(k\pi)^2}\cdot(e^{-jk\pi}-1)$$

$$C_k = -\frac{1}{(k\pi)^2}\cdot(e^{-jk\pi}-1) + \frac{j}{k\pi}\cdot e^{-j2k\pi}$$

$$C_k = -\frac{1}{(k\pi)^2}\cdot(e^{-jk\pi}-1) + \frac{j}{k\pi}$$

$$C_k = \begin{cases} \dfrac{j}{k\pi}, & \text{k par} \\[2ex] \dfrac{2}{(k\pi)^2} + \dfrac{j}{k\pi}, & \text{k ímpar} \end{cases}$$

O sinal x(t) representado na forma exponencial da série de Fourier vem

$$x(t) = \frac{3}{2} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ \text{k par}}}^{+\infty} \frac{j}{k\pi}\cdot e^{j\frac{k\pi}{2}t} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ \text{k ímpar}}}^{+\infty}\left(\frac{2}{(k\pi)^2} + \frac{j}{k\pi}\right)\cdot e^{j\frac{k\pi}{2}t}$$

b. Para a forma trigonométrica da série de Fourier, necessita-se dos coeficientes A_0, A_k e B_k. Assim, para o cálculo A_0 de faz-se

$$A_0 = C_0 = \frac{3}{2}.$$

Sabe-se a relação entre A_k, B_k e C_k; essa relação é: $2C_k=A_k-jB_k$, donde se tira

$$A_k = \mathrm{Re}\{\frac{C_k}{2}\} = \begin{cases} 0, & \text{k par} \\ \dfrac{2}{(k\pi)^2}, & \text{k ímpar} \end{cases}$$

e

$$B_k = -\mathrm{Im}\{\frac{C_k}{2}\} = -\frac{1}{k\pi}.$$

Destes resultados, tira-se

$$x(t) = \frac{3}{2} + \sum_{\substack{k=1 \\ \text{k ímpar}}}^{+\infty} \frac{2}{(k\pi)^2} \cdot \cos\left(\frac{k\pi}{2} t\right) - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k\pi} \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{2} t\right).$$

3.

a. $x(t) = e^{-at} \cdot \mathrm{sen}(\omega_0 t) \cdot u(t)$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at} \cdot \mathrm{sen}(\omega_0 t) \cdot u(t) \cdot e^{-st}\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-at} \cdot \mathrm{sen}(\omega_0 t) \cdot e^{-st}\, dt \quad *$$

$$X(s) = \int_0^{+\infty} e^{-at} \cdot \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j} \cdot e^{-st}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(a+s-j\omega_0)t}}{2j} dt - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(a+s+j\omega_0)t}}{2j} dt$$

$$X(s) = \frac{1}{2j} \times \left(\frac{1}{-(a+s-j\omega_0)} \cdot e^{-(a+s-j\omega_0)t} \Big|_0^{+\infty} - \frac{1}{-(a+s+j\omega_0)} \cdot e^{-(a+s+j\omega_0)t} \Big|_0^{+\infty} \right)$$

$$X(s) = \frac{1}{2j} \times \left(\frac{1}{(a+s-j\omega_0)} - \frac{1}{(a+s+j\omega_0)} \right) = \frac{1}{2j} \times \left(\frac{a+s+j\omega_0 - a - s + j\omega_0}{(a+s-j\omega_0)\cdot(a+s+j\omega_0)} \right)$$

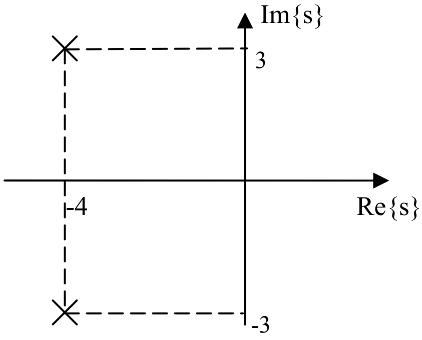
$$X(s) = \frac{1}{2j} \times \frac{2j\omega_0}{a^2 + 2as + s^2 + \omega_0^2} = \frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$$

Para que * convirja, tem-se que ter $\mathrm{Re}\{s\} > -a$.
Logo

$$x(t) = e^{-at} \cdot \mathrm{sen}(\omega_0 t) \cdot u(t) \quad \overset{L}{\leftrightarrow} \quad X(s) = \frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > -a$$

b. Os zeros da função de transferência são os zeros do numerador; neste caso, não há zeros.
Os pólos da função de transferência são os zeros do denominador; neste caso, $s^2 + 8s + 25 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad s = \dfrac{-8 \pm \sqrt{64 - 100}}{2} = \dfrac{-8 \pm j6}{2} = -4 \pm j3$

Assim, no domínio-s vem



c. Da alínea a), vê-se que

$$x(t) = e^{-at} \cdot \text{sen}(\omega_0 t) \cdot u(t) \quad \overset{L}{\leftrightarrow} \quad X(s) = \frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2}, \quad \text{Re}\{s\} > -a$$

Re-escrevendo H(s), vem

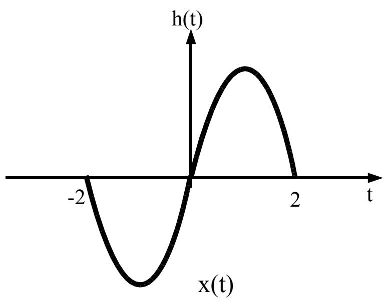
$$H(s) = \frac{3}{(s+4)^2 + 3^2}$$, pelo que $h(t) = e^{-4t} \cdot \text{sen}(3t) \cdot u(t)$.

d. $$H(\omega) = H(s)\big|_{s=j\omega} = \frac{3}{(j\omega+4)^2 + 3^2} = \frac{3}{-\omega^2 + 8j\omega + 25}$$

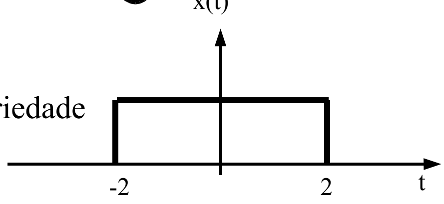
4.

a.

$$h(t) = \sin\left(\frac{\pi}{2}.t\right).(u(t+2) - u(t-2))$$



$$x(t) = u(t+2) - u(t-2)$$



Como a convolução goza da propriedade comutativa:

$y_1(t)=x(t)*h(t)=h(t)*x(t)$

$$y_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau).x(t-\tau)d\tau$$

1º intervalo: t<-4
$y_1(t)=0$

2º intervalo: -4<t<0

$$y_1(t)=\int_{-2}^{t+2}\sin\left(\frac{\pi}{2}.\tau\right)d\tau=\left[-\frac{2}{\pi}.\cos\left(\frac{\pi}{2}.\tau\right)\right]_{-2}^{t+2}=\frac{2}{\pi}.\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}.t\right)-1\right)$$

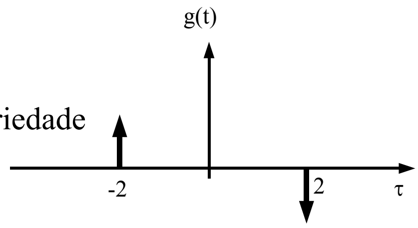
3º intervalo: 0<t<4

$$y_1(t)=\int_{t-2}^{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}.\tau\right)d\tau=\left[-\frac{2}{\pi}.\cos\left(\frac{\pi}{2}.\tau\right)\right]_{t-2}^{2}=\frac{2}{\pi}.\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{2}.t\right)\right)$$

4º intervalo: t>4

$y_1(t)=0$

b.



$g(t)=\delta(t+2)-\delta(t-2)$

Como a convolução goza da propriedade comutativa:

$y_2(t)=g(t)*h(t)=h(t)*g(t)$

1º intervalo: t<-4

y2(t)=0

2º intervalo: -4<t<0

$$y_2(t)=\int_{-2}^{t+2}\sin\left(\frac{\pi}{2}.\tau\right).g(t-\tau)d\tau=\int_{-2}^{t+2}\sin\left(\frac{\pi}{2}.\tau\right).\delta(t-\tau+2)d\tau$$

$$y_2(t)=\sin\left(\frac{\pi}{2}.\tau\right)_{\tau=t+2}=-\sin\left(\frac{\pi}{2}.t\right)$$

3º intervalo: 0<t<4

$$y_2(t)=\int_{t-2}^{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}.\tau\right).g(t-\tau)d\tau=\int_{t-2}^{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}.\tau\right).\left(-\delta(t-\tau-2)\right)d\tau$$

$$y_2(t)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}.\tau\right)_{\tau=t-2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}.t\right)$$

4º intervalo: t>4

$y_2(t)=0$

5.

a.

$$x(t)=\left(e^{-2t}+e^{-3t}\right).u(t)$$

$$y(t)=\left(e^{-2t}-e^{-\frac{5}{2}t}\right).u(t)$$

$$X(\omega)=\frac{1}{2+j\omega}+\frac{1}{3+j\omega}=\frac{5+2j\omega}{(2+j\omega)(3+j\omega)}$$

$$Y(\omega)=\frac{1}{2+j\omega}-\frac{1}{\frac{5}{2}+j\omega}=\frac{\frac{1}{2}}{(2+j\omega)\left(\frac{5}{2}+j\omega\right)}$$

$$H(\omega)=\frac{Y(\omega)}{X(\omega)}=\frac{1}{4}\frac{3+j\omega}{\left(\frac{5}{2}+j\omega\right)^{2}}$$

b.

$$h(t)=F^{\prime -1}\{H(\omega)\}=F^{\prime -1}\left\{\frac{1}{4}\left(\frac{3}{\left(\frac{5}{2}+j\omega\right)^{2}}+j\omega\frac{1}{\left(\frac{5}{2}+j\omega\right)^{2}}\right)\right\}$$

$$h(t)=\frac{1}{4}\left(3.t.e^{-\frac{5}{2}t}.u(t)+\frac{d}{dt}\left(t.e^{-\frac{5}{2}t}.u(t)\right)\right)=\frac{1}{8}(t+2).e^{-\frac{5}{2}t}.u(t)$$