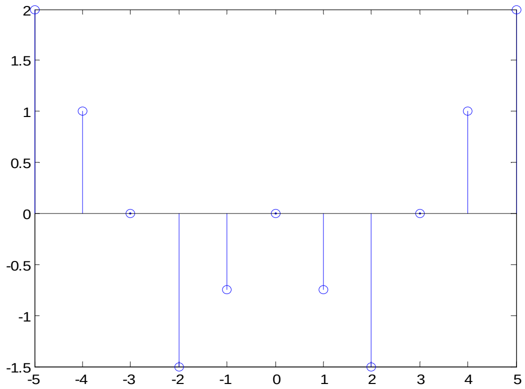
Teoria do Sinal
2EE / 2EI – 25/07/2003
Recurso – Resolução

1. $z(n) = -1.5\delta(n-1) - 3\delta(n-2) + 2\delta(n-4) + 4\delta(n-5)$
   a. Parte par de z(n) – $z_P(n)$

$$z_P(n) = \frac{z(n)+z(-n)}{2} = \frac{-1.5\delta(n-1)-3\delta(n-2)+2\delta(n-4)+4\delta(n-5)}{2} +$$
$$+\frac{-1.5\delta(-n-1)-3\delta(-n-2)+2\delta(-n-4)+4\delta(-n-5)}{2}$$
$$z_P(n) = 2\delta(-n-5)+\delta(-n-4)-1.5\delta(-n-2)-0.75\delta(-n-1)-$$
$$-0.75\delta(n-1)-1.5\delta(n-2)+\delta(n-4)+2\delta(n-5)$$

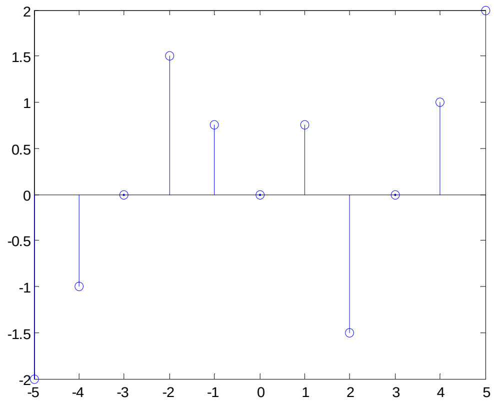
Graficamente:



Parte ímpar de z(n) – $z_I(n)$

$$z_I(n) = \frac{z(n)+z(-n)}{2} = \frac{-1.5\delta(n-1)-3\delta(n-2)+2\delta(n-4)+4\delta(n-5)}{2} +$$
$$+\frac{1.5\delta(-n-1)+3\delta(-n-2)-2\delta(-n-4)-4\delta(-n-5)}{2}$$
$$z_I(n) = -2\delta(-n-5)-\delta(-n-4)+1.5\delta(-n-2)+0.75\delta(-n-1)-$$
$$-0.75\delta(n-1)-1.5\delta(n-2)+\delta(n-4)+2\delta(n-5)$$

Graficamente:



b. Há duas maneiras de resolver esta alínea: uma faz uso das propriedades dos sistemas LIT, nomeadamente da propriedade da linearidade; a outra maneira é calcular a resposta impulsional do sistema e a partir daí calcular a resposta do sistema através da convolução.

1º método – uso da propriedade da linearidade dos sistemas LIT

A resposta do sistema a $x(n)$ é $y(n)$ e a $z(n)$ é $w(n)$.

$x(n) = \delta(n) + 2\delta(n-1)$

$z(n) = -1.5x(n-1) + 2x(n-4)$

Então, como o sistema é LIT, pela propriedade da linearidade, vem

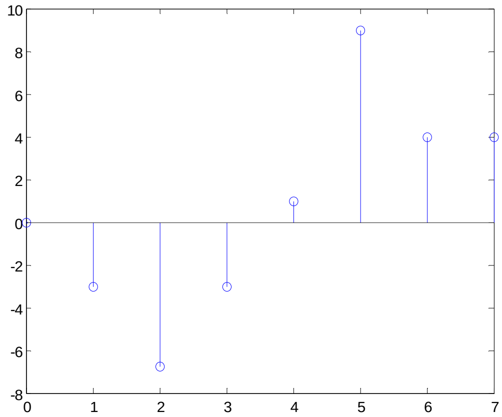
$w(n) = -1.5y(n-1) + 2y(n-4)$

Como $y(n) = 2\delta(n) + 4.5\delta(n-1) + 2\delta(n-2) + 2\delta(n-3)$, então

$$w(n) = -1.5\times\left[2\delta(n-1) + 4.5\delta(n-2) + 2\delta(n-3) + 2\delta(n-4)\right] + \\ + 2\times\left[2\delta(n-4) + 4.5\delta(n-5) + 2\delta(n-6) + 2\delta(n-7)\right]$$

$$w(n) = -3\delta(n-1) - 6.75\delta(n-2) - 3\delta(n-3) + \delta(n-4) + 9\delta(n-5) + \\ + 4\delta(n-6) + 4\delta(n-7)$$

Graficamente:



2º método – através da convolução

Em primeiro lugar calcula-se a resposta impulsional do sistema, h(t).
Para tal, usam-se os sinais x(t) e y(t), pois sabe-se que y(t) = x(t) * h(t).
Como x(t) tem tamanho 2 e y(t) tem tamanho 4, a resposta impulsional tem de ter tamanho 3.
Assim, temos que

$$y(0) = x(0)\cdot h(0) \quad \Leftrightarrow \quad h(0) = \frac{y(0)}{x(0)} = \frac{2}{1} = 2$$

$$y(1) = x(0)\cdot h(1) + x(1)\cdot h(0) \quad \Leftrightarrow \quad h(1) = \frac{y(1) - x(1)\cdot h(0)}{x(0)} = \frac{4{,}5 - 2\cdot 2}{1} = 0{,}5$$

$$y(2) = x(0)\cdot h(2) + x(1)\cdot h(1) \quad \Leftrightarrow \quad h(2) = \frac{y(2) - x(1)\cdot h(1)}{x(0)} = \frac{2 - 2\cdot 0{,}5}{1} = 1$$

$$y(3) = x(1)\cdot h(2) \quad \Leftrightarrow \quad h(2) = \frac{y(3)}{x(1)} = \frac{2}{2} = 1$$

De seguida calcula-se a resposta a z(n), w(n), através da concoluçao entre z(n) e w(n). Assim, vem

$$w(0) = z(0)\cdot h(0) = 0\cdot 2 = 0$$

$$w(1) = z(0)\cdot h(1) + z(1)\cdot h(0) = 0\cdot 0{,}5 - 1{,}5\cdot 2 = -3$$

$$w(2) = z(0)\cdot h(2) + z(1)\cdot h(1) + z(2)\cdot h(0) = 0\cdot 1 - 1{,}5\cdot 0{,}5 - 3\cdot 2 = -6{,}75$$

$$w(3) = z(1)\cdot h(2) + z(2)\cdot h(1) + z(3)\cdot h(0) = -1{,}5\cdot 1 - 3\cdot 0{,}5 + 0\cdot 2 = -3$$

$$w(4) = z(2)\cdot h(2) + z(3)\cdot h(1) + z(4)\cdot h(0) = -3\cdot 1 + 0\cdot 0{,}5 + 2\cdot 2 = 1$$

$$w(5) = z(3)\cdot h(2) + z(4)\cdot h(1) + z(5)\cdot h(0) = 0\cdot 1 + 2\cdot 0{,}5 + 4\cdot 2 = 9$$

$$w(6) = z(4)\cdot h(2) + z(5)\cdot h(1) = 2\cdot 1 + 4\cdot 0{,}5 = 4$$

$$w(7) = z(5)\cdot h(2) = 4\cdot 1 = 4$$

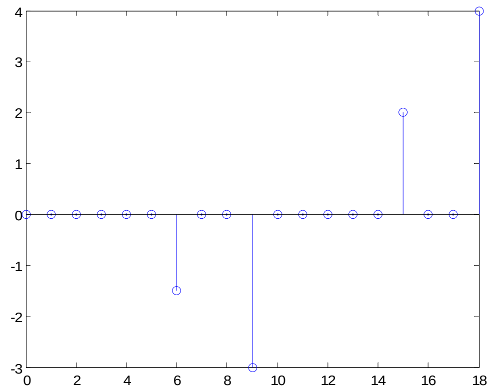
Donde se tira, igualmente,

$$w(n) = -3\delta(n-1) - 6.75\delta(n-2) - 3\delta(n-3) + \delta(n-4) + 9\delta(n-5) +$$
$$+4\delta(n-6) + 4\delta(n-7)$$

c. $r(n) = z\left(\frac{n}{3} - 1\right)$

n	r(n)
< 0	0
0	z (0-1) = z (-1) = 0
1	z (1/3-1) = 0
2	z (2/3-1) = 0
3	z (3/3-1) = z (0) = 0
4	z (4/3-1) = 0
5	z (5/3-1) = 0
6	z (6/3-1) = z (1) = -1.5
7	z (7/3-1) = 0
8	z (8/3-1) = 0
9	z (9/3-1) = z (2) = -3
10	z (10/3-1) = 0
11	z (11/3-1) = 0
12	z (12/3-1) = z (3) = 0
13	z (13/3-1) = 0
14	z (14/3-1) = 0
15	z (15/3-1) = z (4) = 2
16	z (16/3-1) = 0
17	z (17/3-1) = 0
18	z (18/3-1) = z (5) = 4
≥ 19	0

Graficamente:



2. O período do sinal é 4s. Definindo x(t) durante um período, por exemplo, entre -2 e 2 s, vem:

$$x(t) = \begin{cases} 2t+2, & -2 \le t \le 0 \\ 2 \cdot \cos(\omega_0 t) = 2 \cdot \cos\left(\dfrac{\pi}{2} t\right), & 0 \le t \le 2 \end{cases} \text{, pois } \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

   a. Na forma trigonométrica combinada da série de Fourier usam-se os coeficientes C_0, e C_k. Para C_0, vem

$$C_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t)\, dt = \frac{1}{4} \cdot \left(\int_{-2}^{0} (2t+t)\, dt + \int_{0}^{2} 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} t\right) dt \right) = \frac{1}{4} \cdot \left((t+2t)\Big|_{-2}^{0} + \frac{1}{\pi/2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} t\right) \Bigg|_{0}^{2} \right) = 0$$

Para C_k, vem

$$C_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cdot e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{4} \cdot \left(\int_{-2}^{0} (2t+2) \cdot e^{-jk\omega_0 t}\, dt + \int_{0}^{2} 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} t\right) \cdot e^{-jk\omega_0 t}\, dt \right)$$

O primeiro integral pode ser dividido em dois, ficando para a parcela que contém 2t

$$\int_{-2}^{0} 2t \cdot e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \frac{-2t}{j\frac{k\pi}{2}} \cdot e^{-j\frac{k\pi}{2} t} \Bigg|_{-2}^{0} - \int_{-2}^{0} \frac{-2}{j\frac{k\pi}{2}} \cdot e^{-j\frac{k\pi}{2} t}\, dt =$$

$$= \frac{4j}{k\pi} \cdot \left(0 \times e^{-j\frac{k\pi}{2} 0} - (-2) \times e^{-j\frac{k\pi}{2}(-2)} \right) + \frac{4}{jk\pi} \cdot \left(\frac{-1}{j\frac{k\pi}{2}} \right) \cdot e^{-j\frac{k\pi}{2} t} \Bigg|_{-2}^{0} = \frac{8j}{k\pi} e^{jk\pi} - \frac{8}{(k\pi)^2} \cdot \left(1 - e^{jk\pi}\right)$$

A parcela que contém 2 fica

$$\int_{-2}^{0} 2 \cdot e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \frac{4j}{k\pi} \times e^{-j\frac{k\pi}{2} t} \Bigg|_{-2}^{0} = \frac{4j}{k\pi} \times \left(1 - e^{jk\pi}\right)$$

Somando as duas parcelas resulta em

$$\frac{1}{4}\int_{-2}^{0}(2t+2)\cdot e^{-jk\frac{\pi}{2}t}\,dt=\frac{j}{k\pi}\cdot\left(1-e^{jk\pi}\right)+\frac{2}{(k\pi)^2}\cdot\left(1-e^{jk\pi}\right)=\begin{cases}0, & k\ par\\ \dfrac{-2j}{k\pi}-\dfrac{4}{(k\pi)^2}, & k\ \text{ímpar}\end{cases}$$

Para o segundo integral, vem

$$\int_0^2 2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\cdot e^{-jk\frac{\pi}{2}t}\,dt=\int_0^2 2\cdot\frac{e^{j\frac{\pi}{2}t}+e^{-j\frac{\pi}{2}t}}{2}\cdot e^{-jk\frac{\pi}{2}t}\,dt=$$

$$=\int_0^2 e^{-j\frac{\pi}{2}(k-1)t}\,dt+\int_0^2 e^{-j\frac{\pi}{2}(k+1)t}\,dt=\frac{1}{-j\pi/2\cdot(k-1)}\cdot e^{-j\frac{\pi}{2}(k-1)t}\Bigg|_0^2+\frac{1}{-j\pi/2\cdot(k+1)}\cdot e^{-j\frac{\pi}{2}(k+1)t}\Bigg|_0^2=$$

$$=\frac{2j}{\pi(k-1)}\cdot(e^{-j\pi(k-1)t}-1)+\frac{2j}{\pi(k+1)}\cdot(e^{-j\pi(k+1)t}-1)=\begin{cases}0, & k\ \text{ímpar}\\ -\dfrac{4j}{\pi(k-1)}-\dfrac{4j}{\pi(k+1)}, & k\ par\end{cases}$$

Dividindo este integral pelo período do sinal, 4 s, e reduzindo a soma das duas parcelas a uma só, vem

$$\begin{cases}0, & k\ \text{ímpar}\\ \dfrac{2kj}{\pi(k^2-1)}, & k\ par\end{cases}$$

Somando os dois integrais, vem

$$C_k=\begin{cases}-\dfrac{4}{(k\pi)^2}-\dfrac{2j}{k\pi}, & k\ \text{ímpar}\\ \dfrac{2kj}{\pi(k^2-1)}, & k\ par\end{cases}$$

Daqui se tira

$$\left|C_k\right|=\begin{cases}\sqrt{\left(-\dfrac{4}{(k\pi)^2}\right)^2+\left(-\dfrac{2j}{k\pi}\right)^2}=\sqrt{\left(\dfrac{2}{k\pi}\right)^4+\left(\dfrac{2}{k\pi}\right)^2}=\dfrac{2}{k\pi}\sqrt{\left(\dfrac{2}{k\pi}\right)^2+1}, & k\ \text{ímpar}\\ \dfrac{2k}{\pi(k^2-1)}, & k\ par\end{cases}$$

O sinal x(t) representado na forma trigonométrica combinada da série de Fourier vem

$$x(t)=\sum_{\substack{k=1\\ k\ \text{ímpar}}}^{+\infty}\left(\frac{4}{k\pi}\cdot\sqrt{\left(\frac{2}{k\pi}\right)^2+1}\right)\cdot\cos(k\frac{\pi}{2}t)+\sum_{\substack{k=1\\ k\ par}}^{+\infty}\frac{4k}{\pi(k^2-1)}\cdot\cos\left(k\frac{\pi}{2}t\right)$$

b. Para a forma trigonométrica da série de Fourier, necessita-se dos coeficientes A_0, A_k e B_k. Assim, para o cálculo A_0 de faz-se
$A_0 = C_0 = 0$.

Sabe-se a relação entre A_k, B_k e C_k; essa relação é: $2C_k=A_k-jB_k$, donde se tira

$$A_k = \mathrm{Re}\{\frac{C_k}{2}\} = \begin{cases} 0, & k\ par \\ -\dfrac{2}{(k\pi)^2}, & k\ ímpar \end{cases}$$

e

$$B_k = -\mathrm{Im}\{\frac{C_k}{2}\} = \begin{cases} \dfrac{2}{k\pi}, & k\ ímpar \\ \dfrac{2k}{\pi(k^2-1)}, & k\ par \end{cases}.$$

Assim, o sinal x(t), representado na forma trigonométrica da série de Fourier, é

$$x(t) = -\sum_{\substack{k=1 \\ k\ ímpar}}^{+\infty} \frac{2}{(k\pi)^2}\cdot\cos\left(\frac{k\pi}{2}t\right) + \sum_{\substack{k=1 \\ k\ ímpar}}^{+\infty} \frac{2}{k\pi}\cdot\sin\left(\frac{k\pi}{2}t\right) + \sum_{\substack{k=1 \\ k\ par}}^{+\infty} \frac{2k}{\pi(k^2-1)}\cdot\sin\left(\frac{k\pi}{2}t\right)$$

3.

a. O sistema tem um zero em -5 e dois pólos: um em - 5 + j3 e o outro em - 5 - j3.
Como o sistema é causal, e dado que os pólos do sistema são - 5 ± j3, então a região de convergência será Re{s} > -5.
Assim, a Transformada de Laplace do sistema é:

$$H(s) = \frac{s+5}{(s+5-j3)(s+5+j3)} = \frac{s+5}{s^2+10s+34}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > -5$$

b. Re-escrevendo H(s), vem

$$H(s) = \frac{s+5}{s^2+10s+34} = \frac{s+5}{(s+5)^2+3^2} \quad, \mathrm{Re}\{s\} > -5$$

Das tabelas tira-se que

$$h(t) = e^{-5t}\cos(3t).u(t)$$

c. $x(t) = 3e^{-5t}.u(t) \xleftrightarrow{L} X(s) = \dfrac{3}{s+5}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > -5$

Como

$$y(t) = x(t) * h(t) \xleftrightarrow{L} Y(s) = X(s).H(s), \quad RoC = R_1 \cap R_2$$

R_1 - Região de convergência de x
R_2 - Região de convergência de h

$$Y(s) = X(s).H(s) = \frac{3}{s+5} \times \frac{s+5}{(s+5)^2+3^2} = \frac{3}{(s+5)^2+3^2}$$

$$\begin{matrix} R_1 = \operatorname{Re}\{s\} > -5 \\ R_2 = \operatorname{Re}\{s\} > -5 \end{matrix} \quad \rightarrow \quad R_1 \cap R_2 = \operatorname{Re}\{s\} > -5$$

Pelas tabelas, tira-se

$y(t) = e^{-5t} sen(3t).u(t)$

d. Seja u(t) a função degrau unitário, cuja transformada de Laplace, U(s), é 1/s, com a geião de convergência R_2 = Re{s} > 0 e X(s) a transformada de Laplace de x(t), com região de convergência R_1. Como

$$u(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot u(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau \,,$$

pela propriedade da convolução da transformada de Laplace,

$$u(t) * x(t) \xleftrightarrow{L} U(s) \cdot X(s), \qquad RoC = R_1 \cap R_2 \,,$$

então

$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau = u(t) * x(t) \xleftrightarrow{L} U(s) \cdot X(s) = \frac{1}{s} X(s)$, com a região de convergência a ser a intersecção de R_1 e R_2.

4.

a.

$$h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \{u(n+3) - u(n-4)\} \quad (=) \quad h(n) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} & , -3 \le n \le 3 \\ 0 & , outro \text{ n} \end{cases}$$

$$h(n-k) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k-1} & , -3 \le n-k \le 3 \\ 0 & , outro \text{ k} \end{cases} \qquad \begin{matrix} -3 \le n-k \le 3 \\ -3-n \le -k \le 3-n \\ -3+n \le k \le 3+n \end{matrix}$$

$$h(n-k) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k-1} & , -3+n \le k \le 3+n \\ 0 & , outro \text{ k} \end{cases}$$

Logo:
A=n-3
B=n+3

b. Como a convolução goza da propriedade comutativa,
y(n)=h(n)*x(n)
logo,
n < -4 -> y(n)=0;

$-4 \le n \le 2$ -> $y(n)=h(n+1)$
$n > 2$ -> $y(n)=0$

5.

a. Escrever $h_1(t)$ como $x(t)$.

$T_1=2$ e sinal deslocado no tempo de 1 unidade.

$$H_1(\omega) = e^{-j\omega} \cdot 2 \cdot \frac{\sin(2\omega)}{\omega}$$

$$H_G(\omega) = H_1(\omega) \cdot H_2(\omega) = e^{-j\omega} \cdot \frac{\sin(2\omega)}{\omega} \cdot \frac{2}{0{,}5 + j\omega}$$

b.

Primeiro método:
Determinar a transformada inversa de fourier de $H_g(\omega)$, ou seja $h_g(t)$.
Segundo método:
Determinar a transformada inversa de $H_2(\omega)$, ou seja $h_2(t)$ e efectuar a convolução de $h_1(t)$ com $h_2(t)$.