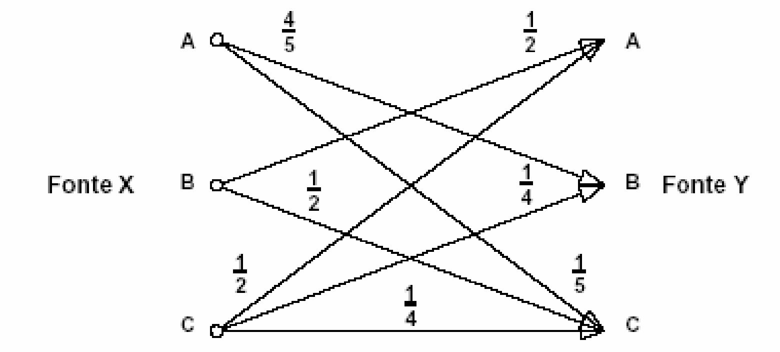
Exercícios sobre Teoria da Informação – 5ª ficha de exercícios

Sumário:

- Resolução de exercícios sobre Teoria da Informação.
- Códigos de da Auto-Informação, Entropia, Entropia conjunta e condicionada, Capacidade de canal.

1. Uma dada fonte de informação X produz símbolos ternários { A, B, C} com as probabilidades de ocorrência {9/27, 16/27, 2/27}, respectivamente.

    a) Determinar a auto informação de cada símbolo da fonte $I(x_i)$.
    b) Determinar o valor da entropia H(X) da fonte.
    c) Determinar o valor da entropia conjunta H(X,Y), supondo que o canal cria uma relação entre os símbolos gerados pela fonte X e os símbolos descodificados à saída do canal, uma segunda fonte Y portanto. Essa relação é dada pelas probabilidades de transição p(yj|xi) conforme o modelo do canal seguinte



2. Considere uma comunicação via satélite, onde se existem 3 canais envolvidos, ascendente, bordo e descendente. Determine a capacidade do sistema global tendo esses canais as seguinte probabilidades de erro.

    P_{easc}=0,01
    P_{ebordo}=0
    P_{edesc}=0,1

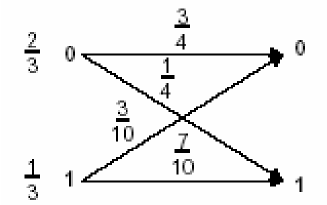
    a) Desenhe o modelo do sistema global.
    b) Determine a capacidade do sistema global tendo esses canais as seguinte probabilidades de erro.

3. As probabilidades de geração dos símbolos de uma fonte binária são *p*(*x*1)=*p*(*x*2)= *0,5*. Os símbolos gerados por essa fonte binária atacam um *canal* cuja matriz de transição de probabilidades é

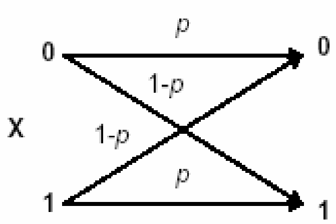
$$p(Y \mid X) = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}.$$

   a) Desenhe o modelo do canal.
   b) Determine os valores das probabilidades p(y1) e p(y2) de cada um dos símbolos binários à saída do canal de comunicação.
   c) Determine os valores das probabilidades conjuntas p(xi,yj).
   d) Determine o valor da informação mútua média I(X,Y).
   e) Determine os valores da equivocação e da redundância do canal.

4. A figura abaixo representa um canal de informação. Determine a entropia H(A) à entrada do canal e as entropias condicionais H(A|B) e H(B|A).

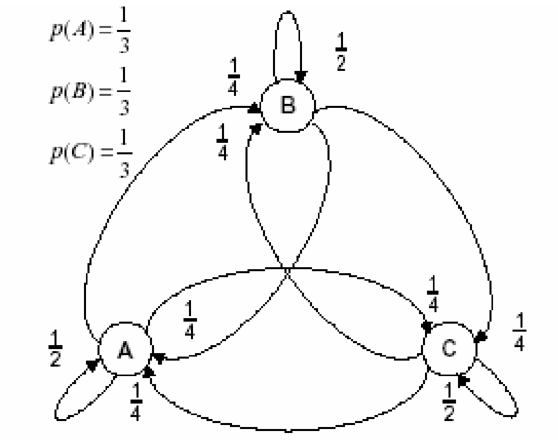


5. Para o modelo de canal de transmissão binário simétrico da figura (BSC), abaixo apresentado, determine a taxa de transmissão de informação e o débito médio de informação, quando p assume valores iguais a 0.9, 0.8 e 0.6.



$$p(x=0) = q \text{ e } \begin{cases} p(y=0) = p(x=0)\times(p) + p(x=1)\times(1-p) \\ p(y=1) = p(x=1)\times(p) + p(x=0)\times(1-p) \end{cases}$$

6. O comportamento de uma fonte de informação X é definido através de uma máquina de transição de estados, cujo comportamento é modelizado à custa da seguinte cadeia de Markov. Quando a máquina se encontra no estado A, B ou C, é enviado o símbolo de fonte x_A, x_B ou x_C, respectivamente. As probabilidades p(A), p(B) e p(C) quantificam a probabilidade de geração do primeiro símbolo de fonte a ser transmitido pelo canal de comunicação (a probabilidade do primeiro estado).



   a) Calcular a entropia $H(X_i)$ de cada um dos estados, com $i \in \{1,2,3\}$.
   b) Calcular a entropia H(X) da fonte.
   c) Calcular a entropia $H^{(2)}(X)$ da extensão de ordem 2.
   d) Verificar que $H^{(2)}(X) \geq H(X)$.

7. Duas fontes de informação X e Y produzem símbolos quaternários $\{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ e $\{y_0, y_1, y_2, y_3\}$, com probabilidades de ocorrência {1/2, 1/4, 1/8, 1/8} e {1/4, 1/4, 1/4, 1/4}, respectivamente. Sabendo que as fontes produzem símbolos a uma taxa de 1000 símbolos por segundo, deterime:

   a) O débito binário das fontes R.
   b) Uma codificação mais adequada para as fontes.
   c) O comprimento médio das palavras de código $\overline{N}$.
   d) Conclua se a codificação que realizou é capaz de codificar sem erros as duas fontes.

Formulário:

$$I(x_i) = \log_2\left(\frac{1}{p(x_i)}\right) = -\log_2(p(x_i)), \forall i$$

$$H(X) = \sum_{i=1}^{M} p(x_i)\cdot I(x_i) = \sum_{i=1}^{M} p(x_i)\cdot \log_2\left(\frac{1}{p(x_i)}\right) = -\sum_{i=1}^{M} p(x_i)\cdot \log_2(p(x_i))$$

$$R = r\cdot H(X) \qquad bis/seg$$

$$H(X) = \Omega_b(p) = p\cdot\log_2\left(\frac{1}{p}\right) + (1-p)\cdot\log_2\left(\frac{1}{1-p}\right), \qquad p(0) = p \quad p(1) = 1-p$$

$$R = r\cdot H(X) = r_b\cdot\Omega_b(p) \le r_b$$

$$\overline{N} = \frac{r_b}{r} = \sum_{i=1}^{M} p(x_i)\cdot N_i$$

$$H(X) \le \overline{N} \le H(X) + \varepsilon, \qquad com \qquad \varepsilon = 1$$

$$H^{(n)}(X) \le \overline{N} \le n\cdot H(X)$$

$$n\cdot H(X) \le n\cdot\overline{N} \le n\cdot H(X) + 1 \qquad \Rightarrow \qquad H(X) \le \overline{N} \le H(X) + \frac{1}{n}$$

$$\eta = \frac{R}{r_b} = \frac{H(X)}{\overline{N}} \le 1$$

$$K = \sum_{i=1}^{M} 2^{-N_i} \le 1$$

$$I(x_i, y_j) = \log_2\left(\frac{p(x_i \setminus y_j)}{p(x_i)}\right)$$

$$I(X,Y) = \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N} p(x_i, y_j)\cdot I(x_i, y_j)$$

$$I(X,Y) = H(X) - H(X\setminus Y) = H(Y) - H(Y\setminus X) = H(X) + H(Y) - H(X,Y)$$

$$H(X,Y) = H(X) + H(X\setminus Y) = H(Y) + H(Y\setminus X)$$

$$H(X,Y)=\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}p(x_i,y_j)\cdot\log\left(\frac{1}{p(x_i,y_j)}\right)$$

$$H(X\setminus Y)=\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}p(x_i,y_j)\cdot\log\left(\frac{1}{p(x_i\setminus y_j)}\right)$$

$$H(Y\setminus X)=\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}p(y_j,x_i)\cdot\log\left(\frac{1}{p(y_j\setminus x_i)}\right)$$

$$redundância=1-\frac{H(Y\setminus X)}{H(X)}$$

$$C_s=\max_{p(x_i)}[I(X,I)],\qquad bits/símbolodefonte$$

$$C=r_s\cdot C_s,\qquad bits/segundo$$