Eletrotecnia

João Paulo Coelho
Instituto Politécnico de Bragança

2014

Conteúdo

Listagens

Parte I

Revisão de Conceitos Fundamentais

AULA 1

Conceitos de Electrotecnia

Esta unidade curricular (UC) começa com a apresentação dos conceitos fundamentais de electrotecnia. Nomeadamente as noções de corrente eléctrica, potencial eléctrico e resistência eléctrica. Entender as propriedades físicas subjacentes a estas variáveis electrotécnicas elementares é imprescindível para compreender o modo de operação de todos os sistemas mecatrónicos. Será também apresentado as leis fundamentais que regem o comportamento de circuitos eléctricos em corrente contínua, nomeadamente as leis de Ohm, Joule e Kirchhoff. Estas últimas serão utilizadas na análise de circuitos em corrente contínua (designada neste documento por DC do inglês direct current). No final desta aula espera-se que o aluno consiga:

- *Entender o significado físico das três variáveis electrotécncias elementares;*
- *Conheça as leis fundamentais que regem o comportamento de circuitos em corrente contínua;*
- *Seja capaz de identificar a simbologia associada aos circuitos eléctricos;*
- *Consiga calcular correntes, quedas de tensão e resistência eléctrica em circuitos DC.*

.

1.1 Carga Eléctrica na Matéria

À nossa volta existe todo um conjunto de propriedades que caracterizam toda a matéria que nos rodeia e de que também fazemos parte. Por exemplo a massa de um objecto, a sua cor, etc. Qualquer uma dessas propriedades existe sem se saber o porquê. *Existe e pronto!* Sabe-se que toda a matéria é constituída por átomos que, por sua vez, são contituídos por partículas ainda mais elementares. O electrão é uma delas. Uma das propriedades do electrão é possuir massa. Ou seja o seu movimento é condicionado caso este se encontre na vizinhança de um campo gravítico. Outra das suas propriedades é ter carga eléctrica. Responder ao porquê do electrão ter carga eléctrica é a mesma coisa que responder ao porquê deste ter massa... Por isso partimos da base de que esta é mais uma propriedade inerente ao electrão e não a questionamos.

No universo a carga eléctrica vem em dois "sabores" distintos: positiva e negativa. No caso do electrão convencionou-se que a sua carga eléctrica é negativa. Já a carga eléctrica do protão, outra das partículas contituíntes da matéria, é designada como positiva. A carga eléctrica de um electrão é igual à carga eléctrica de um protão a menos do sinal que as distingue. A carga eléctrica é mediada no sistema internacional (SI) em Coulomb (C) e no caso do electrão vale aproximadamente -1.6×10^{-19}C. Como se deve imaginar a carga eléctrica so protão será por isso 1.6×10^{-19}C.

Qualquer carga eléctrica cria, no espaço que a circunda, um efeito designado por campo eléctrico. A intensidade desse campo eléctrico, designado normalmente por E, é tanto maior quanto maior for o valor da carga eléctrica e diminui rápidamente quando nos distanciamos da carga que lhe dá origem. Em concreto a intensidade de campo eléctrico provocado por uma carga eléctrica q é dado por:

$$E \propto \frac{q}{r^2} \tag{1.1}$$

onde r é a distância de um dado ponto do espaço à carga eléctrica q.

O campo eléctrico numa determinada região do espaço pode ser representado gráficamente pelas linhas de força do campo eléctrico. Trata-se de linhas imaginárias, tangentes ao campo eléctrico, conforme se mostra na figura 1.1.

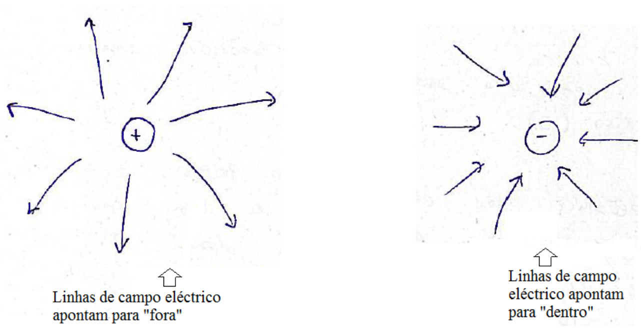


Figura 1.1: Representação das linhas de campo eléctrico em duas cargas pontuais de sinais contrários.

No caso de existirem no espaço mais do que uma carga eléctrica os seus campos eléctricos são distorcidos formando um campo eléctrico cujas linhas de força se representam na figura 1.2

Uma partícula carregada electricamente quando, na vizinhança de outro campo eléctrico, sofre uma acção de atracção ou repulsão na direcção da carga eléctrica responsável por esse campo eléctrico. Caso o sinal de ambas as cargas seja o mesmo a força é de repulsão. A força de atracção ou repulsão, designada por força de Coulomb, é igual ao produto da intensidade de campo eléctrico de uma das partículas pelo valor da carga eléctrica da outra. Ou seja,

$$F = q \cdot E \tag{1.2}$$

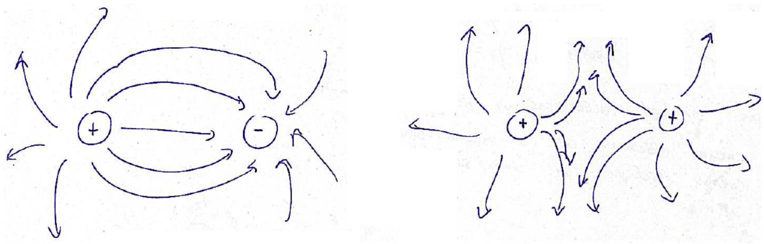


Figura 1.2: Representação das linhas de campo eléctrico num sistema formado por duas cargas pontuais. À esquerda com sinais contrários e à direita com o mesmo sinal e positivo.

como não podia deixar de ser a força de Coulomb é medida, no SI, em Newton (N).

Na prática não existem cargas pontuais. Um corpo é contituído por uma miríade de átomos e cada átomo por um numero particular de cargas eléctricas. Normalmente os átomos estão num estado neutro de carga eléctrica. Isto significa que o numero de electrões é igual ao número de protões e logo a carga eléctrica *global* do átomo é zero. No entanto é possível criar desiquilíbrio no valor total da carga eléctrica permitindo que um átomo tenha mais ou menos electrões do que protões. Nesse caso referimo-nos ao átomo como ião ou, de forma mais específica, como catião caso exista um deficit de cargas negativas ou anião caso o numero de electrões exceda o de protões. A figura 1.3 ilustra esta situação.

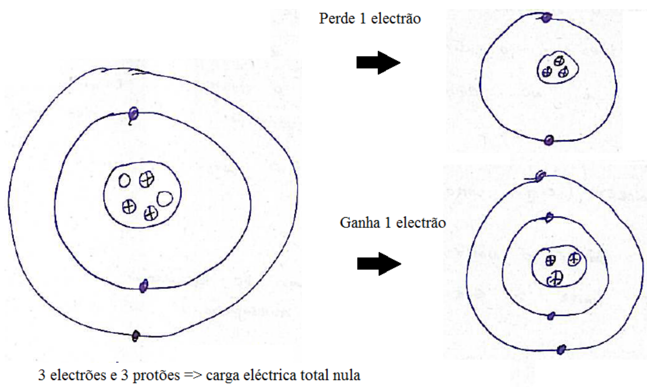


Figura 1.3: Iões gerados a partir de um átomo electricamente neutro.

Um corpo constituído por apenas átomos electricamente neutros é também ele electricamente neutro. Se, por outro lado, existirem nesse corpo um excesso de cargas negativas quando comparadas ao número de cargas positivas diz-se que o corpo está negativamente carregado. Caso se verifique o contrário o corpo diz-se positivamente carregado. São clássicas as experiências que o filósofo Tales de Mileto levou a cabo na Grécia antiga, por volta do século VI a.C, onde através de acção mecânica de um material sobre outro conseguia obter um desiquilíbrio de carga eléctrica. Por exemplo esfregando um pedaço de âmbar (resina fossilizada) no pêlo de um animal conseguia atrair cinzas e pequenos objectos. O estudo deste tipo de fenómenos pertence ao ramo da física designada por Electroestática.

No mundo físico que nos rodeia conseguimos manipular, não um átomo individual, mas um corpo macroscópico constituído por uma elevado número de átomos agregados entre si por forças de diversas naturezas. Assim o conceito de carga total, considerada para um átomo isolado, pode ser extrapolada para um corpo constituído por inúmeros átomos. Se o numero total de cargas positivas for igual ao de cargas negativas diz-se que o corpo é electricamente neutro. Caso exista um desiquilíbrio entre as cargas eléctricas então o corpo diz-se electricamente carregado. Mais uma vez o excesso de cargas tanto podem ser negativas como positivas.

Vamos considerar caso de dois corpos electricamente negativos. O numero de cargas eléctricas negativas em excesso é idêntica em ambos. No entanto admite-se que as suas dimensões são distintas. Ou seja o numero de átomos que constitui um dos corpos é maior do que no outro. A figura 1.4 ilustra essa situação.

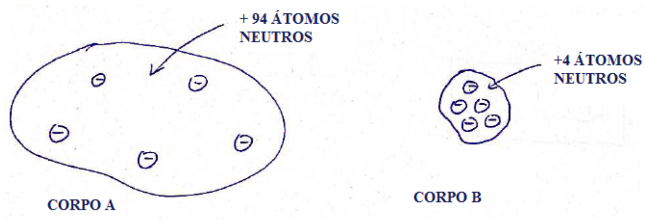


Figura 1.4: Dois corpos com diferentes densidades de carga eléctrica.

Assim, se bem que o valor neto da carga eléctrica seja o mesmo em ambos os corpos a densidade de carga eléctrica é maior no corpo B do que no corpo A. Quanto maior a densidade de carga eléctrica mais próximas estão as cargas eléctricas umas das outras e logo, de acordo com a expressão da força de Coulomb, maior é a intensidade das forças de repulsão a que as cargas estão sujeitas. Isto cria no corpo uma "pressão" que pode ser comparada o caso de um balão cheio de ar. Quanto mais cheio maior é a pressão no seu interior. A essa "pressão" no interior do corpo dá-se o nome de *potencial eléctrico*.

O potencial eléctrico num corpo designa-se normalmente pela letra U e é medida no SI em Volt (V).

1.2 Diferença de Potencial, Corrente e Resistência Eléctrica

Na secção anterior apresentou-se o conceito de potencial eléctrico. O potencial eléctrico de um corpo aumenta com a sua densidade de carga eléctrica. Assim, na figura 1.4 se U_A for o potencial eléctrico do corpo A e se U_B for o potencial eléctrico do corpo B então $U_B > U_A$. A diferença entre os potenciais eléctricos dos corpos A e B designa-se por diferença de potencial eléctrico, ou abreviadamente por *d.d.p*, denota-se por U_{AB} e calcula-se do seguinte modo:

$$U_{AB} = U_B - U_A \tag{1.3}$$

A unidade associada à *d.d.p* é também o Volt. Por exemplo se $U_A = 2V$ e se $U_B = 3V$ então $U_{AB} = 1V$.

Considere-se novamente a situação em que existem dois balões idênticos mas com diferentes pressões internas. Essa situação encontra-se ilustrada na imagem esquerda da figura 1.5.

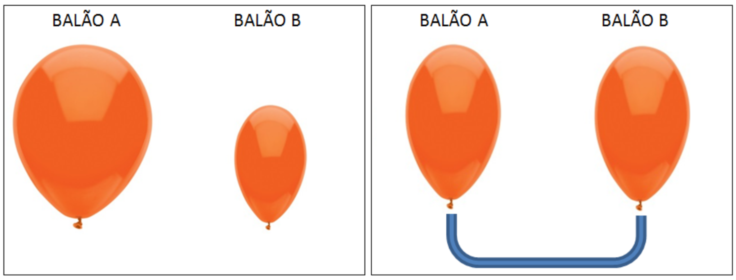


Figura 1.5: Dois corpos com diferentes densidades de carga eléctrica.

Imagine-se agora que ambos os balões são interligados por um tubo por onde o ar é livre de passar como se mostra à direita da figura 1.5. O senso comum diz-nos que a pressão no balão A vai diminuir e vai aumentar no balão B de tal forma que, em regime permanente, a pressão será idêntica em ambos os balões. Vamos transportar esta ideia para o caso de dois corpos com diferentes densidades de carga eléctrica. Permite-se o movimento das cargas eléctricas entre os dois corpos através de um elemento designado por condutor eléctrico. A figura 1.6 ilustra o processo.

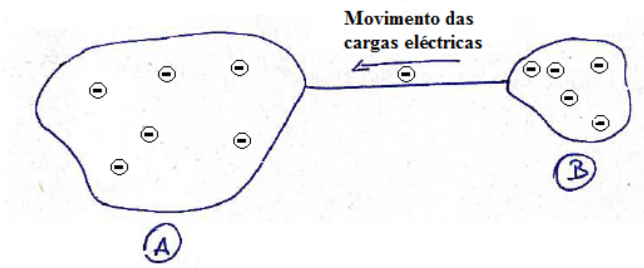


Figura 1.6: Dois corpos com diferentes densidades de carga eléctrica.

Estabelecendo um caminho eléctrico entre os dois corpos irá fazer com que a densidade eléctrica de ambos se iguale. Ou seja o corpo A irá ganhar cargas eléctricas e o corpo B irá perdê-las. Este movimento de cargas de B para A irá cessar quando o potencial eléctrico em ambos os corpos for idêntico. Ou seja quando a diferença de potencial U_{AB} for igual a zero. Admitindo fixo o numero de cargas eléctricas negativas no corpo A, o aumento da dimensão desse corpo irá fazer com que o corpo B perca mais cargas para o corpo A. No limite o corpo B fica completamente desprovido de carga eléctrica. Ou seja o seu potencial eléctrico é 0V. Na prática o maior corpo no nosso planeta é o próprio planeta Terra. Assim, ligando electricamente qualquer corpo à Terra faz-se com que este fique electricamente descarregado. A figura 1.7 representa este conceito.

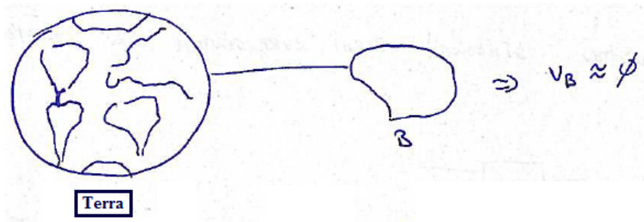


Figura 1.7: Ligação eléctrica entre um corpo B e a Terra.

Voltando à questão representada na figura 1.6, quando é efectuada uma ligação eléctrica entre dois corpos com diferentes potenciais eléctricos, um movimento de cargas eléctricas é observado[1]. Define-se o número de cargas eléctricas que atravessa a secção recta do condutor, por unidade de tempo, como sendo a corrente eléctrica. A corrente eléctrica, representada normalmente pela letra I, é expressa em Coulomb por segundo ou seja o Ampere (A) no sistema internacional de unidades. Matematicamente é descrita por:

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} \tag{1.4}$$

onde o numerados se refere à variação da carga eléctrica e o denominador ao intervalo de tempo em que essa variação teve lugar.

Em termos infinitésimais a corrente eléctrica é descrita pela seguinte equação diferencial:

$$I = \frac{dq}{dt} \tag{1.5}$$

Debrucemo-nos agora sobre a questão do condutor eléctrico. A única coisa que foi dita sobre ele é que este era capaz de "conduzir" cargas eléctricas de um ponto para outro. No entanto, na prática, esse condutor é também um corpo e logo constituído por átomos. Dependendo da estrutura atómica que compõe o condutor assim este será mais ou menos permissivo à passagem de cargas eléctricas. A maior ou menor permeabilidade à passagem de cargas eléctricas traduz-se numa maior ou menor razão de colisão entre as cargas eléctricas e os átomos que compõem o condutor. Resultante dessa colisão há libertação de energia sobre a forma térmica. Um fenómeno designado por efeito Joule.

A essa permeabilidade à passagem de cargas eléctricas por um condutor designa-se por *resistência eléctrica.* No sistema internacional de medidas a resistência eléctrica é medida em Ohms e utiliza-se a letra grega maíuscula Omega (Ω). Quanto maior for o valor da resistência de um condutor maior é a dificuldade sentida pelas cargas eléctricas para o atravessar. No limite, caso a resistência seja infinita, nenhuma carga eléctrica consegue transpor o condutor. Neste caso diz-se que este material é isolador. Em oposição, um condutor com resistência eléctrica nula designa-se por supercondutor. No presente existe um grande esforço de investigação no sentido de se encontrar materiais que tenham

[1]Efectivamente este conceito, assim como outro utilizados para descrever o fenómenos electroestáticos, são apenas alegorias. Efectivamente a deriva das cargas eléctricas é muito lenta num condutor. O processo referido assemelha-se mais à propagação de uma onda de choque do que ao movimento efectivo de cargas eléctricas entre os corpos.

um comportamento supercondutor à temperatura ambiente. No entanto a temperatura mais elevada em que se observou o fenómeno de supercondutividade cifra-se abaixo dos -100 graus centígrados[2].

A condutividade depende do tipo de material que constitui um corpo. Já a resistência eléctrica depende, não só do valor dessa condutividade, mas também da sua forma geométrica. Por exemplo para um condutor com a forma de um cilíndro de comprimento l e área da base A a sua resistência eléctrica é dada por:

$$R = \rho \frac{l}{A} \tag{1.6}$$

onde ρ represente a inverso da condutividade do material (conhecida como resistividade). Imaginemos o caso de um condutor cilíndrico com 1Km de comprimento e com área de secção recta igual a 30 cm^2. Se esse condutor for feito de cobre ($\rho = 1.72 \times 10^{-8}\Omega\cdot$ m) o valor da sua resistência eléctrica é $R = 5.7m\Omega$. Por outro lado se fosse feito de PVC ($\rho = 10^{16}\Omega$·m) o valor da resistência encontraria-se em torno de $3000E\Omega$.

Até ao momento foram introduzidas as três variáveis electrotécnicas elementares: potencial eléctrico (mais concretamente a d.d.p.), corrente eléctrica e resistência eléctrica. Na secção que se segue mostra-se que existe uma relação muito estreita entre estas três variáveis: uma relação descoberta à mais de 200 anos por George Ohm e que hoje transporta o seu nome.

1.3 A Lei Fundamental da Electrotecnia

As três variáveis electrotécnicas fundamentais, descritas na secção anterior, relacionam-se entre si através da célebre *Lei de Ohm.* Em traços gerais a lei de Ohm refere que o valor da intensidade da corrente eléctrica num condutor é igual à razão entre a diferença de potencial aplicada aos seus terminais e o respectivo valor de resistência eléctrica. Ou seja,

$$I = \frac{U}{R}$$

Esta relação permite descobri o valor de uma das variáveis electrotécnicas conhecendo as restantes duas. Logo é de extrema utilidade em procedimentos de análise de circuitos eléctricos.

Multiplicando I por U obtém-se uma outra grandeza designada por potência eléctrica. A potência eléctrica designa-se normalmente por P, é expressa em Watt[3] (W), e pode ser calculada como se segue:

$$P = U \cdot I \tag{1.7}$$

Define-se ainda energia eléctrica, designada aqui por W_e, como sendo,

$$W_e = \int P dt \tag{1.8}$$

[2]Como sugestão para trabalho de casa aceda a www.youtube.com e faça uma procura por *superconductivity*.

[3]O CV também é muito utilizado na prática no entanto não é uma unidade SI (1 CV ≈ 740W).

A energia eléctrica é dada, no SI, em Joule (J). No entanto, no dia-a-dia, é frequente ver esse valor expresso em KWh. Efectivamente se considerarmos que durante um dado intervalo de tempo Δt a potência se mantém constante então a energia eléctrica produzida ou consumida durante esse intervalo de tempo é simplesmente,

$$W_e = P \cdot \Delta t$$

Se o tempo for medido em hora (h) e a potência em kilowatt (KW) então a unidade de energia KWh é facilmente depreendida.

Na prática a energia eléctrica é utilizada para realizar trabalho. Esse trabalho pode envolver aquecimento, movimento, etc. O processo de transformação de energia em trabalho pode ser representado por um diagrama simbólico designado por *circuito eléctrico*.

Na sua forma mais simples um circuito eléctrico é constituído por um dispositivo capaz de estabelecer, entre dois terminais, uma diferença de potencial e um segundo dispositivo, ligado ao primeiro, que converte a energia eléctrica fornecida pelo primeiro numa forma eventualmente alternativa de energia. O primeiro designa-se for fonte de tensão eléctrica e o segundo por carga eléctrica. Na sua forma mais simples uma carga eléctrica é completamente caracterizada pela sua resistência eléctrica e uma fonte de tensão pelo seu valor de d.d.p. Na prática a fonte de tensão pode ser realizada das mais diversas formas: um gerador electromecânico, uma bateria electroquímica etc. Num circuito eléctrico essa particularidade é irrelevante e logo existe um símbolo universal utilizado para representar a fonte de tensão. Esse símbolo é ⊣⊢. O terminal associado à linha mais comprida é o terminal positivo e o outro é o negativo.

Do mesmo modo uma carga eléctrica é frequentemente representada por uma resistência eléctrica cujo símbolo electrotécnico é -/\/\/-. A figura 1.8 (a) mostra o aspecto de um circuito eléctrico composto por uma única fonte de tensão de 30V e uma resitência de 25Ω.

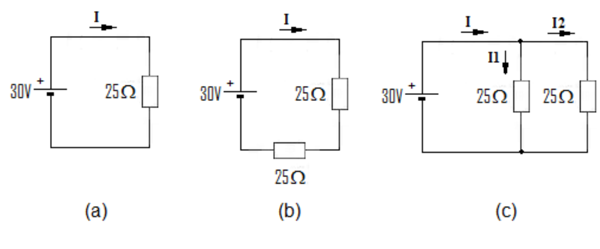


Figura 1.8: Circuitos eléctricos simples.

No circuito também se encontra marcada a corrente eléctrica que circula no circuito. O sentido da corrente é convencionada como partindo do pólo negativo da fonte de tensão em direcção ao pólo negativo. No entanto o sentido real da corrente eléctrica é exactamente ao contrário! Recorrendo à lei de Ohm calcula-se a intensidade de corrente eléctrica como $I = \frac{30}{25} = 1.2$ A.

1.4 As Duas Leis de Kirchhoff

Se bem que a análise do circuit eléctrico da figura 1.8 seja óbvia o mesmo não pode ser para os casos das figuras 1.8 (b) e (c). Neste caso temos que nos apoiar em duas leis da análise de circuitos propostas por Kirchhoff: a primeira designada por lei dos nós e a segunda por lei das malhas.

No entanto, antes de apresentar ambas as leis, definem-se o conceito de nó, ramo e malha num circuito eléctrico. Um ramo é um troço do circuito constituido por, pelo menos, um dispositivo electrotécnico (fonte de tensão ou carga). A união, no mesmo ponto, de mais de dois ramos designa-se por nó. Por sua vez um percuso fechado dentro de um circuito é designado por malha. Por exemplo o circuito da figura 1.8 (c) possui três ramos, dois nós e três possíveis malhas.

1.4.1 A Lei dos Nós de Kirchhoff

Em poucas palavras a lei dos nós afirma que não é possível a acumulação de carga eléctrica num nó do circuito. Ou seja a soma algébrica das correntes num nó é igual a zero. Assim imagine-se um conjunto de n ramos com um mesmo nó em comum. Admita-se que cada ramo transporta uma corrente I_i com $i = 1, \cdots, n$. A lei dos nós de Kirchhoff estabelece que:

$$\sum_{i=1}^{n} I_i = 0 \tag{1.9}$$

O valor das correntes I_i podem ser positivas ou negativas. Convenciona-se que as correntes que convergem para o nó têm sinal positivo e as que divergem do nó tem sinal negativo. Por exemplo suponha o nó ilustrado na figura 1.9.

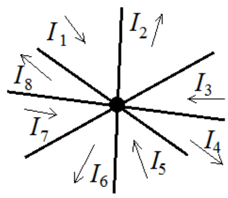


Figura 1.9: Exemplo de um nó onde convergem 8 ramos.

Neste caso a expressão da 1ª lei de Kirchhoff é:

$$I_1 - I_2 + I_3 - I_4 + I_5 - I_6 + I_7 - I_8 = 0 \tag{1.10}$$

Num circuito com n nós, o número de equações de nós que são possíveis estabelecer são em número $n - 1$. Por exemplo um circuito com 3 nós possui duas equações de nós.

1.4.2 A Lei das Malhas de Kirchhoff

Antes de apresentar a lei das malhas é necessário introduzir o conceito de *queda de tensão* aos terminais de uma resistência. Para isso considere-se uma resistência eléctrica com R ohms como se mostra na figura 1.10.

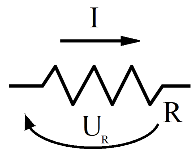


Figura 1.10: Representação da queda de tensão numa resistência.

Quando uma corrente eléctrica a atravessa gera-se, aos seus terminais, uma diferença de potencial cujo valor é igual ao produto da resistência pela corrente eléctrica. A diferença de potencial desenvolvida ao terminais da resistência é designada por queda de tensão. Se U_R for a queda de tensão aos terminais da resistência R quando percorrida por uma corrente eléctrica I o seu valor é dado por:

$$U_R = R \cdot I \tag{1.11}$$

Note que o sentido da queda de tensão é contrário do sentido da corrente na resistência. A seta da queda de tensão aponta para o terminal da resistência onde o potencial eléctrico é maior.

Posto isto estamos em condições de enunciar a lei das malhas de Kirchhoff. De forma resumida esta lei diz que a soma algébrica das quedas de tensão ao longo de uma malha é igual a zero. Para isso é necessário definir um sentido de circulação ao longo da malha. Esse sentido de circulação pode ser horário ou anti-horário sendo irrelevante a escolha que se faz. Se, ao longo desse percurso, existirem n quedas de tensão, a lei das malhas de Kirchhoff toma o seguinte aspecto:

$$\sum_{i=1}^{n} U_i = 0 \tag{1.12}$$

Tal como aconteceu na lei das malhas, os valores de U_i podem ser positivos ou negativos. Se o sentido de circulação for contrário ao sentido da queda de tensão o seu valor na expressão anterior é negativo. Caso contrário é positivo. Tome nota que numa fonte de tensão o sentido da queda de tensão é do pólo negativo para o pólo positivo.

De modo a ilustrar a lei das malhas considere o circuito da figura 1.8 (b). Este circuito não tem nós e contém apenas uma única malha. Admita-se que o sentido de circulação dessa malha é no sentido horário conforme se mostra na figura A.1.

Seguindo a direcção estabelecida obtém-se:

$$U - U_{R1} - U_{R2} = 0 \tag{1.13}$$

Como $U_{R1} = R1 \cdot I$ e $U_{R2} = R2 \cdot I$ fica,

$$U = I \cdot (R1 + R2) \tag{1.14}$$

Comparando esta expressão com a lei de Ohm conclui-se que o circuito 1.8 (b) é equivalente ao circuito da figura 1.8 (a) se $R = R1 + R2$. Diz-se que as duas resistências representadas na figura 1.8 (b) se encontram ligadas em série. A resistência equivalente de duas ou mais resistências ligadas em série é igual à soma das resistências de cada uma.

Para concluir falta dizer que, num circuito composto por n nós e r ramos se podem estabelecer $r - n + 1$ equações de malha distintas.

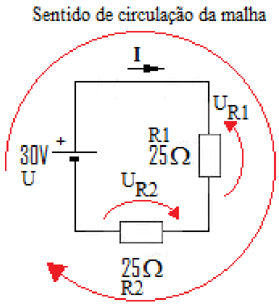


Figura 1.11: Definição do sentido de circulação de malha.

1.4.3 Exemplos de Aplicação

Exemplo 1 Calcule as correntes em cada ramo do circuito da figura 1.8 (c)

R: Existem três variáveis a conhecer: I, I_1 e I_2. Assim serão necessárias três equações. Olhando para o circuito identificamos 2 nós e 3 ramos logo existe uma equação dos nós e duas equações de malha. Note que existem três malhas possíveis. Para obter as equações escolhe-se apenas duas das três (quiasquer). A figura que se segue apresenta as malhas escolhidas assim como as direcções de circulação para cada malha. Propositadamente foram escolhidas dois sentidos contrários.

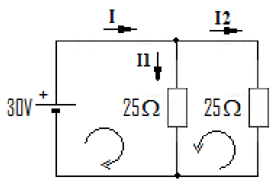


Figura 1.12: Resolução do primeiro exemplo.

Aplicando a primeira lei de Kirchoff a um dos nós (por exemplo o de cima) fica:

$$I = I_1 + I_2 \tag{1.15}$$

Agora, pela lei das malhas, obtém-se o seguinte par de equações:

$$\begin{aligned} 30 &= 25 \cdot I_1 \\ 25 \cdot I_1 &= 25 \cdot I_2 \end{aligned} \tag{1.16}$$

Resolvendo o sistema de três equações e três incógnitas obtém-se:

$$\begin{aligned} I_1 = I_2 &= 1.2A \\ I &= 2.4A \end{aligned} \tag{1.17}$$

Exemplo 2 Calcule a corrente em cada ramo do circuito da figura que se segue:

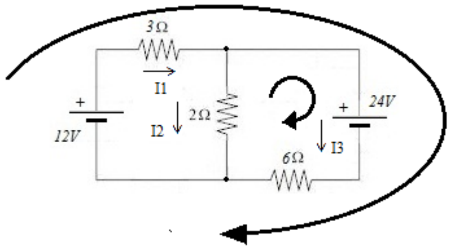


Figura 1.13: Resolução do segundo exemplo.

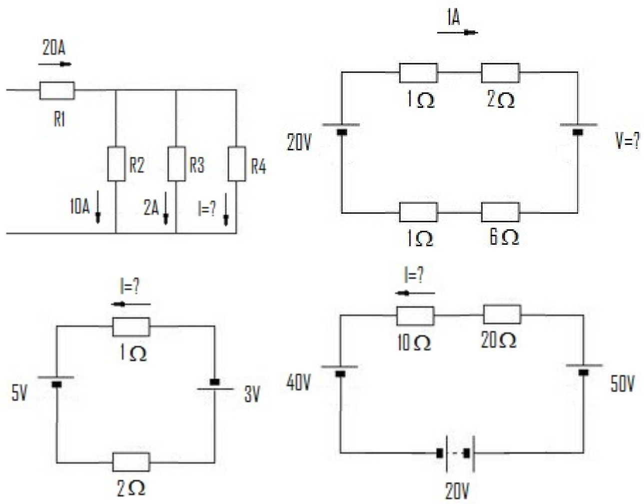
R: O primeiro passo consiste em arbitrar o sentido para as correntes em cada ramo sem dar muita importância. No final o resultado indica-nos se o sentido admitido é correcto ou não, i.e. se a corrente eléctrica associada a um dado ramo for negativa significa que o sentido convencionado é contrário do sentido efectivo da corrente.

Seguidamente arbitra-se os sentidos de circulação para o número de malhas dada pela relação $r - n + 1$. A partir das leis de Kirchhoff obtém-se:

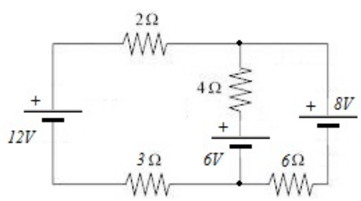
$$\begin{aligned} I_1 - I_2 - I_3 &= 0 \\ 12 - 24 - 3 \cdot I_1 - 6 \cdot I_3 &= 0 \\ -24 - 6 \cdot I_3 + 2 \cdot I_2 &= 0 \end{aligned} \tag{1.18}$$

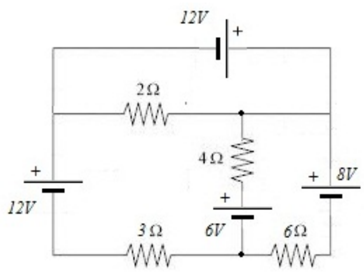
1.5 Sugestões para Trabalho de Casa

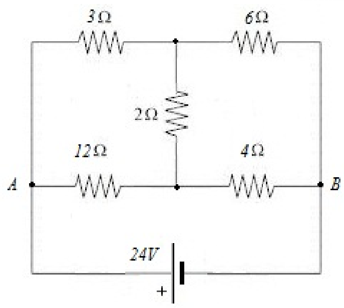
Exercício 1 Utilizando a lei dos nós e/ou a lei das malhas calcule as grandezas desconhecidas nos seguintes circuitos:



Exercício 2 Utilizando as leis de Kirchhoff determine as correntes em cada ramo dos seguintes circuitos:


2Ω
4Ω
8V
12V
3Ω
6V
6Ω


12V
2Ω
4Ω
8V
12V
3Ω
6V
6Ω


3Ω
6Ω
2Ω
12Ω
4Ω
A
B
24V

AULA 2

Indutores e Condensadores

De forma mais ou menos evidente todos os circuitos eléctricos e electrónicos possuem elementos armazenadores de energia ao longo das suas malhas. Essa energia pode encontrar-se armazenada no campo eléctrico ou num campo diferente denominando por campo magnético. Estas duas formas de armazenamento de energia podem ser exploradas por dois dispositivos existentes em circuitos eléctricos: o condensador e o indutor. Ainda que, tal como a resistência eléctrica sejam elementos lineares, a dependência entre a corrente e a tensão aos seus terminais revela-se apenas recorrendo a equações diferenciais. O conhecimento do fenómeno electromagnético que estudaremos nesta aula servirá para melhor compreender o princípio de funcionamento de um dos elementos mecatrónicos mais prolíficos: o motor eléctrico. Assim, e no final desta aula, espera-se que o aluno consiga:

- *Saber o que é um condensador, e o seu princípio de funcionamento;*
- *Identificar em que condições o fenómeno electromagnético se verifica;*
- *Ser capaz de explicar em que consistem as leis de Faraday e Lenz;*
- *Saber o que é um indutor, o seu princípio de funcionamento;*
- *Capacidade de um condensador e (auto) indutância de um indutor.*
- *Modelação matemática de circuitos RLC.*

2.1 Introdução

Na aula passada analisaram-se circuitos eléctricos com dois tipos distintos de elemento: fontes de tensão e resistências eléctricas. A fonte de tensão é um elemento activo e a resistência um elemento passivo. A fonte de tensão gera energia eléctrica e a resistência dissipa-a por efeito de Joule.

Nesta aula vamos falar de dois elementos que, tal como a resistência, são passivos: os condensadores e os indutores.

Os condensadores e os indutores possuem duas propriedades muitos diferentes da resistência eléctrica. A primeira diz respeito à forma como a energia é manipulada. Como se disse atrás, na resistência a energia é dissipada sob a forma de calor. Nos condensadores e indutores a energia é armazenada. No campo eléctrico no caso dos condensadores e no campo magnético no caso dos indutores.

Além disso o comportamento da resistência é sempre o mesmo independentemente do perfil da corrente eléctrica que a atravessa. Já nos condensadores e indutores esse comportamento depende da forma do sinal.

Assim o equivalente à resistência num indutor ou condensador é designado por reactância. Tal como a resistência, a reactância é expressa em *Ohm* (Ω) no entanto o seu valor não é constante mas depende da frequência do sinal de excitação.

Antes de prosseguir vamos abrir um parêntice e recordar alguns conceitos acerca de sinais variantes no tempo.

2.2 Amplitude, Frequência e Fase

A figura que se segue apresenta o aspecto de um sinal que varia no tempo de acordo com uma lei sinusoidal. Em concreto este sinal pode ser descrito matematicamente por:

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi) \qquad (2.1)$$

onde A designa-se por amplitude, ω é a frequência ângular, expressa em rad/s, t é o tempo em segundos, ϕ é a fase em radianos.

A figura que se segue mostra a relação entre cada uma destas variáveis e o aspecto do sinal.

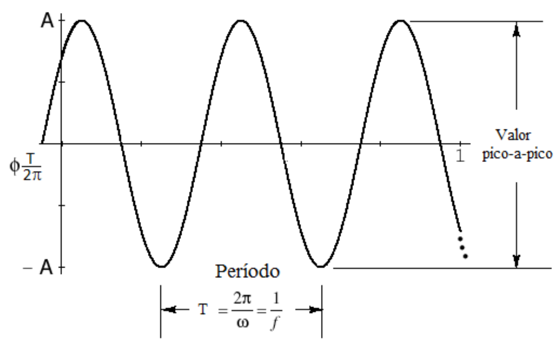


Figura 2.1: Aspecto genérico de um sinal sinusoidal.

O período do sinal T é o tempo necessário para que o sinal se volte a repetir. No caso de um sinal sinusoidal como o representado anteriormente isso acontece de duas em duas passagens por zero. O período do sinal está intimamente ligado à frequência ω.

A frequência ângular representa a "velocidade" com que a onda se repete. Quanto maior for esse valor maior é o número de períodos (ciclos) do sinal por segundo. A frequência ângular relaciona-se com a frequência linear f, o inverso do período, e com o período T da seguinte forma:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \tag{2.2}$$

A frequência f é designada por frequência linear, em oposição à frequência angular, e é medida em Hertz (Hz). A frequência de 1 Hz indica que, num segundo, existe exactamente um período do sinal. Por exemplo na rede de distribuição eléctrica em Portugal a frequência da tensão é 50Hz. Isto significa que num segundo existem 50 ciclos completos do sinal.

Um conceito importante quando se lida com sinais sinusoidais é a noção de *valor eficaz* também designado por valor RMS [1]. Uma corrente conínua I atravessa uma resistência R faz com que esse elemento aqueça. A energia dissipada é dada por :

$$W = P \cdot t = R \cdot I^2 \cdot t \tag{2.3}$$

Se for aplicada uma corrente alternada a energia dissipada não é constante porque a corrente I agora varia no tempo. Assim define-se valor eficaz da corrente eléctrica como o valor que a corrente contínua deveria ter para produzir, na resistência, o mesmo efeito calorífico que a corrente alternada. No caso de uma onda sinusoidal o valor eficaz está relacionado com o valor de pico por:

$$I_{RMS} = \frac{I_{pico}}{\sqrt{2}} \tag{2.4}$$

2.3 O Condensador

Um condensador consiste, em termos mecânicos, em dois condutores separados por um material isolador. No caso particular de um condensador de placas paralelas o seu aspecto encontra-se ilustrado na figura 2.2.

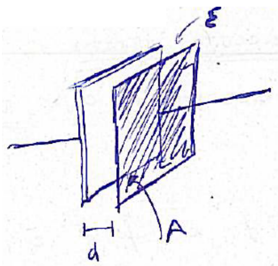


Figura 2.2: Aspecto geométrico de um condensador de placas paralelas.

Admitindo que o condensador se encontra, no presente, electricamente descarregado, a diferença de potencial entre as suas placas (armaduras) é zero.

Aplicando uma tensão aos seus terminais o valor do potencial eléctrico vai sofrer alteração.

Dividindo a carga q pela d.d.p. U obtém-se uma constante designada por capacidade do condensador.

$$C = \frac{q}{U} \tag{2.5}$$

[1]Do inglês Root Mean Square.

A capacidade de um condensador é medida em C/V ou, no sistema internacional de unidades, em *Farad* (F).

A capacidade de um condensador depende da sua geometria e do tipo de material que constitui o isolador entre as plcas (designado por dieléctrico). Para o caso de um consador de placas paralelas,

$$C = \epsilon \frac{A}{d} \tag{2.6}$$

onde ϵé a contante dieléctrica, A a área efectiva entre as placas e d a distância entre placas.

Se o circuito for abruptamente interrompido a distribuição de cargas eléctricas mantém-se o que significa que o condensador exibe agora uma tensão aos seus terminais mesmo sem a fonte de tensão ligada.

Um condensador é capaz de armazenar energia eléctrica no seu campo eléctrico. A energia armazenada é tanto maior quanto maior for a capacidade do condensador.

Na representação de circuitos eléctricos o condensador é simbolicamente ilustrado como ⊣⊢.

Existem vários tipos de condensadores construídos em torno dos mais diversos materiais. Os condensadores podem ser divididos em polarizados e não-polarizados. No primeiro caso a ligação do condensador ao circuito deve respeitar a polaridade dos seus terminais em relação aos potenciais eléctricos onde vão ser ligados. Condensadores de elevada capacidade, como é o caso dos condensadores electrolíticos, são polarizados.

2.3.1 Comportamento Eléctrico de um Condensador

Em corrente contínua um condensador comporta-se como um circuito aberto- Ou seja uma resistência de valor infinito. Por outro lado se for aplicada, aos seus terminais, uma tensão sinusoidal este comporta-se como uma resistência cujo valor é inversamente proporcional à frequência e dada por:

$$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} \tag{2.7}$$

Dado não ser um valor constante mas depender, para um dado condensador C, de ω esta grandeza não se designa por resistência mas sim por *reactância*. Para $\omega = 0$, $X_C = \infty\Omega$ ou seja o condensador comporta-se como um circuito aberto. Já quando $\omega \to \infty$, $X_C = 0\Omega$ ou seja comporta-se como um curto-circuito às altas frequências.

Observando as formas onda da corrente e da tensão aos terminais de um condensador verifica-se que estes se encontram fora de fase. Em concreto a corrente encontra-se em **avanço**, relativamente à tensão, de 90^o conforme se mostra na figura 2.3.

Ou seja se a tensão for um seno a corrente é um cosseno. Esta observação sugere que a relação matemática entre a corrente e a tensão é dada por uma equação diferencial[2]. Efectivamente,

$$i(t) = C \frac{d}{dt} v(t) \tag{2.8}$$

[2] Derivando o seno tem-se o cosseno

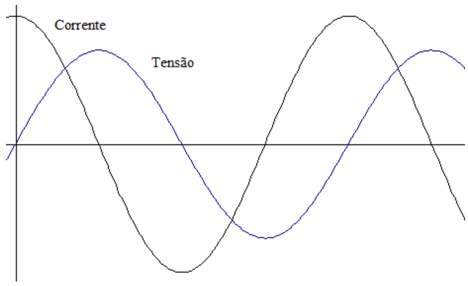


Figura 2.3: Formas de onda da corrente e tensão aos terminais de um condensador.

onde a corrente e a tensão são expressos pelas letras minúsculas i e v enfatizando a sua variabilidade com o tempo exprimindo-as como funções do tempo t.

Observe que esta relação pode ser facilmente derivada atendo a que, por definição, $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$ e, de acordo com a expressão (2.5), $v(t) = \frac{q(t)}{C}$.

2.4 Indutores

O terceiro, e último, componente linear de um circuito eléctrico de que vamos tratar é o indutor. Existem uma miriade de aplicações do fenómeno que se descreve nesta secção. No domínio da mecatrónica sem dúvida que a principal aplicação é em motores eléctricos. Neste contexto, e dado que à frente nesta unidade curricular os motores serão objecto de estudo faz todo o sentido que o aluno ganhe alguma intuição acerca do princípio físico de funcionamento da bobina ou indutor.

2.4.1 Campo Magnético

O fenómeno de magnetismo é algo ao qual estamos sujeitos na nossa vida quotidiana. Desde os "pins" que utilizamos para colar recados no frigorífico a alguns tipos de fechos para portas, etc. O importante é salientar que é um fenómeno para sobre o qual ganhamos intuição pela observação, no dia-a-dia, das suas propriedades.[3]

Os objectos acima mencionados são construídos utilizando materiais designados por ímans permanentes. Uma das propriedades mais óbvias dos ímanes permanentes é a sua capacidade de atraírem objectos metálicos. Para além disso, e se brincarmos um pouco com um par de ímanes, rapidamente concluímos que:

- Dependendo da orientação relativa entre os dois ímanes é possível fazer com que a força seja de atracção ou repulsão. Um fenómeno comum às cargas electricas como vimos na aula anterior;
- Se quebrarmos um íman ao meio passamos a ter... dois ímanes permanentes!

Relativamente à primeira observação pode-se dizer que um íman permanente possui dois pólos. Um designado por Norte e outro por Sul. Dois ímanes com o

[3] O próprio planeta onde vivemos é um gigantesco íman permanente.

mesmo tipo de pólo alinhados sofrem uma força de repulsão. A atracção entre eles é conseguida se os pólos magnéticos forem distintos. A figura 2.4 ilustra este conceito.

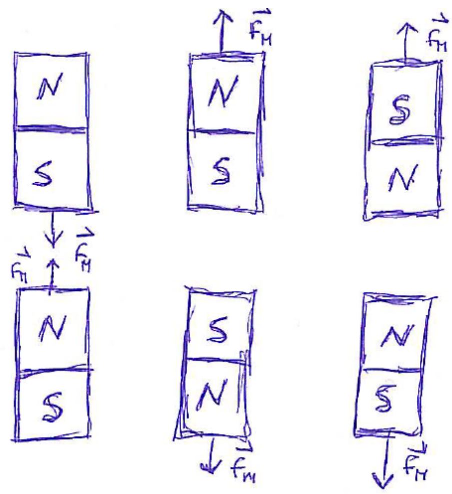


Figura 2.4: Sentido da força magnética entre ímans permanentes de acordo com a sua orientação polar.

O fenómeno de magnetismo é tratado *matematicamente* pela definição de um compo magnético. Tal como o campo eléctrico, um campo magnético existe numa dada região do espaço descrita por linhas de campo magnético. Essas linhas são desenhadas em forma de arco partindo do pólo Norte em direcção ao pólo Sul. A figura 2.5 ilustra este conceito.

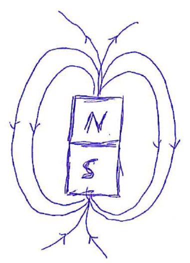


Figura 2.5: Direcção e sentido das linhas de força do campo magnético.

A intensidade do campo magnético, tal como no campo eléctrico, varia inversamente com a distância sendo maior nos locais onde as linhas de força são mais densas, i.e. no pólos. Efectivamente, conduzindo um conjunto simples de experiências envolvendo dois ímanes facilmente se observa que a força necessária para aproximar dois pólos distintos aumenta com a proximidade entre ambos.

Ao contrário das cargas eléctricas que podem aparecer isoladas não existem monopólos magnéticos [4]. Ou seja não é possível encontrar na natureza apenas o pólo Norte ou o pólo Sul. Estes aparecem sempre em pares. Este facto é facilmente comprovado atendendo ao item dois enumerado anteriormente. Partindo

[4] Pelo menos quanto se saiba até ao momento.

um íman em duas partes obtêm-se dois ímanes cada qual com o respectivo pólo Norte e pólo Sul.

O porquê de alguns materiais exibirem esta característica tão peculiar está fora do âmbito da presente unidade curricular. Mas deixa-se aqui a nota de que o fenómeno de magnetismo é exibido por materiais que, dada a sua estrutura atómica e a orientação predominante das partículas elementares, exibem esta propriedade[5].

Para além dos objectos que, de forma natural, exibem a propriedade de magnetismo este fenómeno pode ser gerado de outra forma. Efectivamente a passagem de uma corrente eléctrica por um condutor gera, à volta deste, um campo magnético. Este fenómeno foi observado e descrito durante o século XIX por diversos cientistas de entre os quais se destacam Oersted, Ampére, Biot e Savart.

Esta é outro dos fenóemenos que podem ser facilmente analisados. Basta para isso uma pilha eléctrica, uns metros de fio eléctrico e alguma imaginação. Ainda me recordo de, nos finais dos anos 80[6], ter feito o seguinte aparato cuja imagem ilustro na figura 2.6.

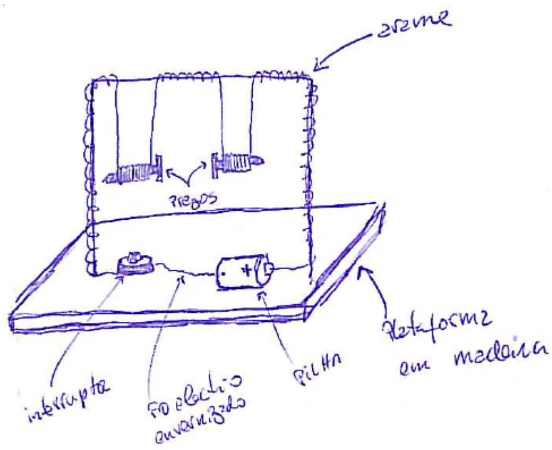


Figura 2.6: Formas de onda da corrente e tensão aos terminais de um condensador.

Dois pregos suspensos numa estrutura de arame separados entre si e envolvidos por algumas centenas de voltas em fio eléctrico envernizado[7]. O circuito eléctrico era completado por uma pilha de 1.5V e por um interruptor. De cada vez que o interruptor era premido os pregos aproximavam-se (ou repeliam-se dependendo da direcção em que eram bobinados).

De um ponto de vista mais formal pode-se dizer que um condutor eléctrico, quando percorrido por uma corrente electrica, gera à sua volta um campo magnético cujas linhas de campo são concentricas a esse condutor[8]. A figura

[5] Para uma rápida explicação deste fenómeno aconselha-se a visualização de `https://www.youtube.com/watch?v=hFAOXdXZ5TM`. Se quiserem subscrevam o canal de minutephysics. É muito bom...

[6] Não havia muita coisa para fazer nessa época... ;-)

[7] Um fio electrico exteriormente isolado por uma espécie de verniz.

[8] O campo magnético é uma grandeza vectorial. O sentido dessa grandeza é dado pela

2.7 mostra o que acabou de ser dito.

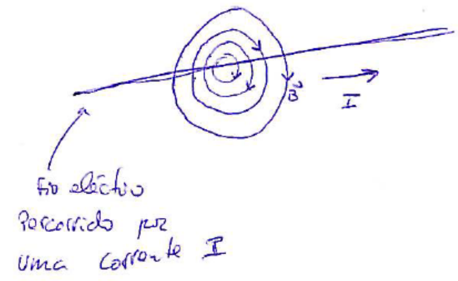


Figura 2.7: Campo magnético ao redor de um condutor percorrido por uma corrente eléctrica.

Ao que se deve este campo magnético? A resposta é que todas as cargas eléctricas em movimento geram campos magnéticos. A intensidade desse campo magnético depende, de entre outros factores, da velocidade com que essas cargas se movem. É um exercício classico de electromagnetismo determinar a intensidade do campo magnético num ponto do espaço p a uma distância a de um condutor eléctrico infinito percorrido por uma corrente eléctrica I. O resultado é[9]:

$$B = k\frac{I}{a} \tag{2.9}$$

onde a constante k depende da permeabilidade magnética do meio (μ). Essa constante não é muito relevante para nós neste momento. O importante é olhar para a expressão e notar que a intensidade do vector campo magnético *aumenta* com a intensidade de corrente e *diminui* com a distância do ponto p ao condutor.

O efeito magnético de um condutor eléctrico pode ser potenciado se esse condutor for enrolado sobre si mesmo formando um percurso helicoidal como se mostra na figura em baixo. A um condutor com esta forma dá-se o nome de

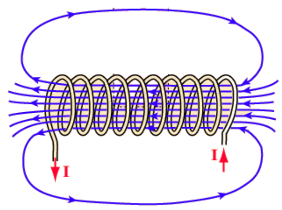


Figura 2.8: Forma geométrica de uma bobina (solenoide): um fio eléctrico enrolado em forma helicoidal.

bobina ou solenoide. Neste caso o campo magnético fora do núcleo da bobina é muito fraco[10] mas no seu interior o seu valor é dado por:

$$B = n \cdot \mu \cdot I \tag{2.10}$$

regra da mão direita. Aconselha-se uma visita à *wikipedia* para quem quiser explorar um pouco mais esta questão.

[9] Para o aluno mais interessado coloquei em anexo a demonstração desta relação.

[10] Esse valor pode ainda ser ainda mais reduzido se a bobina tiver a forma de um toroide. Dê uma vista-de-olhos em http://www.lawebdefisica.com/problemas/id274-sol278.php

onde n é o número de espiras da bobina.

Daqui se nota que a intensidade do vector campo magnético aumenta com o numero de espiras do solenoide. Este aumento implica o aumento de uma das grandezas mais utilizadas para caracterizar uma bobina: a **indutância**.

2.4.2 Indutância

Um indutor consiste num enrolamento condutor, com ou sem núcleo ferromagnético, em que a passagem de uma corrente eléctrica produz, à sua volta, um campo magnético.

Associado a este tipo de dispositivos aparece o conceito de relutância. A relutância magnética indica a quantidade de fluxo magnético susceptível de ser capturada por um dado dispositivo devido a uma corrente eléctrica.

Num indutor com forma helicoidal composta por n espiras a indutância (designada também por coeficiente de auto-indução) L está relacionado com a relutância R da seguinte forma:

$$L = \frac{n^2}{R} \tag{2.11}$$

Para uma bobina cuja hélice possui uma seccção transversal A e comprimento l a relutância é dada por:

$$R = \frac{1}{\mu}\frac{l}{A} \tag{2.12}$$

onde μ se refere à permeabilidade magnética do núcleo.

Das expressões anteriores tira-se que:

$$L = \mu A \frac{n^2}{l} \tag{2.13}$$

A indução magnética é medida em Henry (H). Sendo uma unidade grande normalmente, na prática, os indutores possuem valores de (auto) indutância expressos em sub-múltiplos como o *mili* ou *micro*.

No caso de duas bobinas se encontrarem fisicamente próximas para além da auto-indução de cada uma delas existe ainda a considerar a indução mútua. A indução mútua é uma propriedade que resulta da presença de um fluxo magnético comum. Exemplos disso são os transformadores eléctricos em que os circuitos associados às bobinas primária e secundária se encontram ligados magneticamente através do referido fluxo comum.

2.4.3 Comportamento Eléctrico de um Indutor

Tal como o condensador, se for aplicada aos seus terminais uma tensão sinusoidal, o indutor comporta-se como uma resistência cujo valor depende da frequência do sinal. No entanto, no caso dos indutores, essa dependência éde proporcionalidade directa. Assim se X_L for a reactância da bobina e L a sua indutância, verifica-se a seguinte igualdade:

$$X_C = \omega \cdot L \tag{2.14}$$

Para $\omega = 0$, $X_L = 0\Omega$ ou seja o indutor comporta-se como um curto-circuito aberto. Já quando $\omega \to \infty$, $X_L = \infty\Omega$ ou seja comporta-se como um circuito aberto[11].

Tal como se fez anteriormente para o condensador, observando as formas onda da corrente e da tensão aos terminais de uma bobina verifica-se que estas se encontram também fora de fase. No entanto agora a onda que está em avanço de 90º é a **tensão**. Da mesma forma se a corrente eléctrica for um seno a tensão é um cosseno. Esta observação sugere, mais uma vez, que a relação matemática entre a corrente e a tensão é dada por uma equação diferencial. Em concreto verifica-se a seguinte relação:

$$v(t) = L\frac{d}{dt}i(t) \tag{2.15}$$

2.5 Impedância e Lei de Ohm Generalizada

A variável que se opõe à passagem da corrente eléctrica é a resistência. Num elemento indutivo ou capacitivo essa grandeza designa-se por reactância. A resistência e a reactância são de diferentes naturezas: a resistência dissipa energia e a reactância armazena-a. Para além disso a tensão e a corrente aos terminais de uma resistência estão em fase e num condensador ou indutor estão 90º fora de fase. De modo a adicionar essa informação à reactância recorre-se ao conceito de *impedância*.

Para além do valor da reactância ou resistência a impedância entra em linha de conta com a diferença de fase entre os sinais de tensão e corrente aos terminais dos componentes. A forma mais elegante e inteligente de condensar ambas as informações envolve a utilização de números complexo. Assim a impedância de um condensador é dado por:

$$Z_C = -j \cdot X_C \tag{2.16}$$

e a de um indutor por:

$$Z_L = j \cdot X_L \tag{2.17}$$

onde, por definição, $j = \sqrt{-1}$.

Neste momento deve ser óbvio para todos vocês que, tanto Z_C como Z_L transportam informação sobre a fase. Para o comprovar basta representar as relações anteriores na forma polar de um número complexo. Neste quadro de referência tem-se,

$$Z_C = X_C \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} \tag{2.18}$$

e,

$$Z_L = X_L \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} \tag{2.19}$$

onde o número de *Neper* (e) é aproximadamente igual a 2.7182.

[11] Este fenómeno pode ser comprovado pensando num dispositivo que utilizamos em diversas aplicações: o transformador. No momento em que estou a escrever este texto tenho à minha frente um transformador cuja resistência do primário medi como sendo igual a 230 Ω. Assim, quando submetido à tensão da rede eléctrica, a corrente eficaz drenada por este transformador deveria situar-se em torno de 1A. No entanto as especificações dizem que a sua corrente de primário é de apenas 70mA. Como explicar este fenómeno?

O sinal negativo no expoente de Z_C indica que a tensão está em atraso e o simétrico em Z_L que a tensão está em avanço. O valor desse atraso é, em módulo, $\frac{\pi}{2}$ que, como sabem, é igual a 90º.

O conceito de impedância pode também ser extendido ao caso das resistências. Neste caso a impedância de uma resistência eléctrica é igual ao seu valor. Ou seja,

$$Z_R = R = R \cdot e^{j \cdot 0} \tag{2.20}$$

onde o valor zero no expoente indica que a tensão está em fase com a corrente.

Note que, tal como a resistência ou a reactância, a impedância têm também como unidade o Ohm (Ω).

Conclui-se que a impedância é um conceito muito mais abrangente do que reactância ou resitência no sentido de que pode ser utilizada para descrever qualquer elemento linear de um circuito eléctrico. Uma espécie de denominador comum que deve ser utilizado quendo num circuito eléctrico convivem elementos resistivos com elementos reactivos.

Por exemplo os circuitos representados na figura 2.9 [12] podem ser caracterizados com base na sua impedância equivalente (Z_{eq}) como:

(a) $Z_{eq} = R + j \cdot X_L$

(b) $Z_{eq} = R - j \cdot X_C$

(c) $Z_{eq} = R + j \cdot (X_L - X_C)$

(d) $Z_{eq} = \frac{1}{j \cdot X_L} - \frac{1}{j \cdot X_C} = j\frac{(X_L - X_C)}{X_L \cdot X_C}$

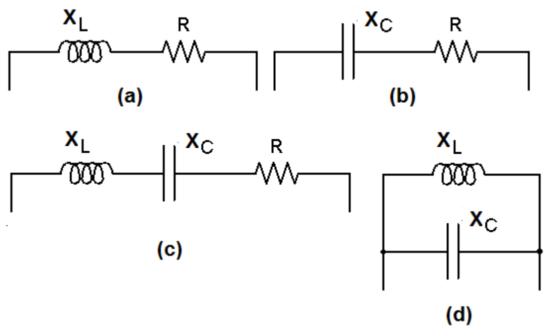


Figura 2.9: Alguns exemplos de circuitos RLC.

Por exemplo determine a impedância de um alto-falante, à frequência de 1 KHz, sabendo que a sua resistência é igual a 6 Ω e a indutância é de 840 μH[13].

Para terminar, e mesmo que não seja muito importante no contexto desta unidade curricular, deixa-se aqui o conceito de Lei de Ohm generalizada. Ou seja a lei de Ohm estudada na aula anterior que também pode ser utilizada com elementos reactivos. Em concreto para um circuito composto por uma fonte

[12]Designados por circuitos RC, RL, LC ou RLC em função do tipo de elementos que envolvem

[13]**R:** ignorando a fase, o valor do módulo da impedância é aproximadamente 8 Ω.

alternada de tensão ligada a uma impedância Z a lei de Ohm generalizada pode ser escrita da seguinte forma:

$$\underline{U} = Z \cdot \underline{I} \tag{2.21}$$

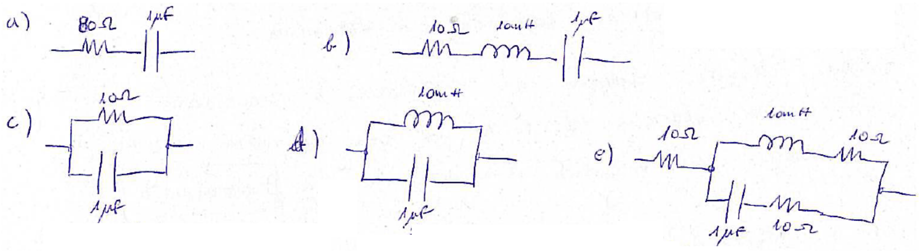
onde $\underline{U}$ e $\underline{I}$ se referem à tensão e corrente expressas sob a forma de **fasor**. A forma fasorial de uma corrente ou tensão não é mais do que a representação, utilizando números complexos, a magnitude e fase dessa grandeza negligenciado a representação do valor da frequência dado que é algo constante num circuito linear.

Por exemplo uma tensão alternada com fasor $\underline{U} = 120 \cdot e^{j \cdot \frac{\pi}{8}} V$ é aplicada aos terminais de uma carga com impedância $Z = 25 \cdot e^{-j \cdot \frac{\pi}{4}} \Omega$. Qual o valor da magnitude da corrente eléctrica e a sua fase[14]?

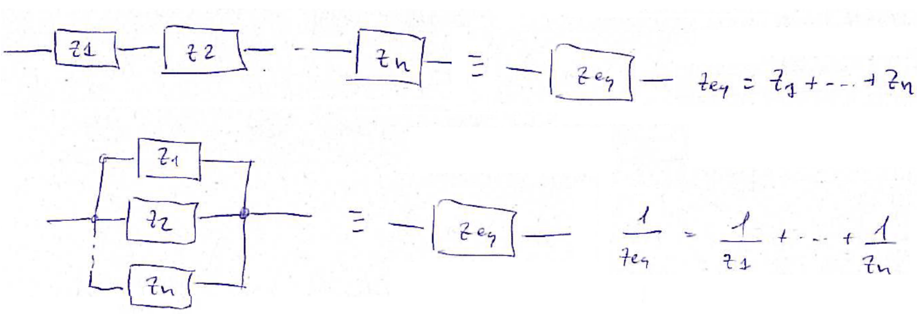
[14]**R:** Atendendo à lei de Ohm, $\underline{I} = \frac{\underline{U}}{Z} = 4.8 \cdot e^{j \cdot \frac{3\pi}{8}} A$ ou seja a corrente tem uma magnitude de 4.8 A e uma fase de 135°.

2.6 Sugestões para Trabalho de Casa

Ex1 Calcule o valor da impedância equivalente dos seguintes circuitos (considere ω igual a 10 000 rad/s.



Nota: Impedâncias em série e em paralelo.



Bibliografia

[1] ...

[2] ...

Apêndice A

Apendice

A.1 Vector campo magnético ao redor de um condutor infinito

Considere-se um condutor infinito percorrido por uma corrente eléctrica cujo sentido é sul para norte conforme se mostra na figura subsequente.

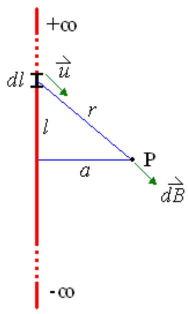


Figura A.1: Definição do sentido de circulação de malha.

A lei de Biot-Savart diz-nos que, um condutor quando atravessado por uma corrente eléctrica constante produz ao seu redor um campo magnético cuja intensidade, direcção e sentido pode ser calculado por:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{id\vec{l} \times \hat{u}_r}{r^2} \tag{A.1}$$

ou seja, a contribuição no campo magnético devido a um elemento infinitesimal de corrente comprimento é:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{id\vec{l} \times \hat{u}_r}{r^2} \tag{A.2}$$

Neste caso particular, e considerando que a corrente circula de Sul para Norte,

$$d\vec{l} = dl \cdot \hat{j} \tag{A.3}$$

O versor $\hat{u}_r$ pode ser obtido como:

$$\hat{u}_r = \frac{\langle a, -l \rangle}{\sqrt{a^2+l^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+l^2}}\hat{i} - \frac{l}{\sqrt{a^2+l^2}}\hat{j} \tag{A.4}$$

O produto vectorial de dl com $\hat{u}_r$ é:

$$d\vec{l} \times \hat{u}_r = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & dl & 0 \\ \frac{a}{\sqrt{a^2+l^2}} & -\frac{l}{\sqrt{a^2+l^2}} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{adl}{\sqrt{a^2+l^2}}\hat{k} \tag{A.5}$$

Assim,

$$d\vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{iadl}{\sqrt{a^2+l^2} \cdot r^2}\hat{k} \tag{A.6}$$

Por outro lado, a distância do elemento de comprimento ao ponto depende de l. Ou seja $r = \sqrt{a^2+l^2}$. Assim,

$$d\vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{iadl}{\sqrt{a^2+l^2} \cdot (a^2+l^2)}\hat{k} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{iadl}{(a^2+l^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{k} \tag{A.7}$$

Integrando ao longo de todo o circuito condutor,

$$\vec{B} = -\frac{ia\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dl}{(a^2+l^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{k} \tag{A.8}$$

Primitivando por substituição, considerando para isso as seguintes identi:

$$\begin{aligned} l &= a\tan(\theta) \\ dl &= a\sec^2(\theta)d\theta \end{aligned} \tag{A.9}$$

obtém-se:

$$\begin{aligned} \vec{B} &= -\frac{ia\mu_0}{4\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{a\sec^2(\theta)d\theta}{\left(a^2+(a\tan(\theta))^2\right)^{\frac{3}{2}}}\hat{k} \\ &= -\frac{ia\mu_0}{4\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{a\sec^2(\theta)d\theta}{a^3\sec^3(\theta)}\hat{k} \\ &= -\frac{i\mu_0}{4\pi a} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta)d\theta\hat{k} \end{aligned} \tag{A.10}$$

Levando finalmente a:

$$\vec{B} = -\frac{i\mu_0}{2\pi a}\hat{k} \tag{A.11}$$

A.2 Exercícios

$$\ddot{x} \tag{A.12}$$