

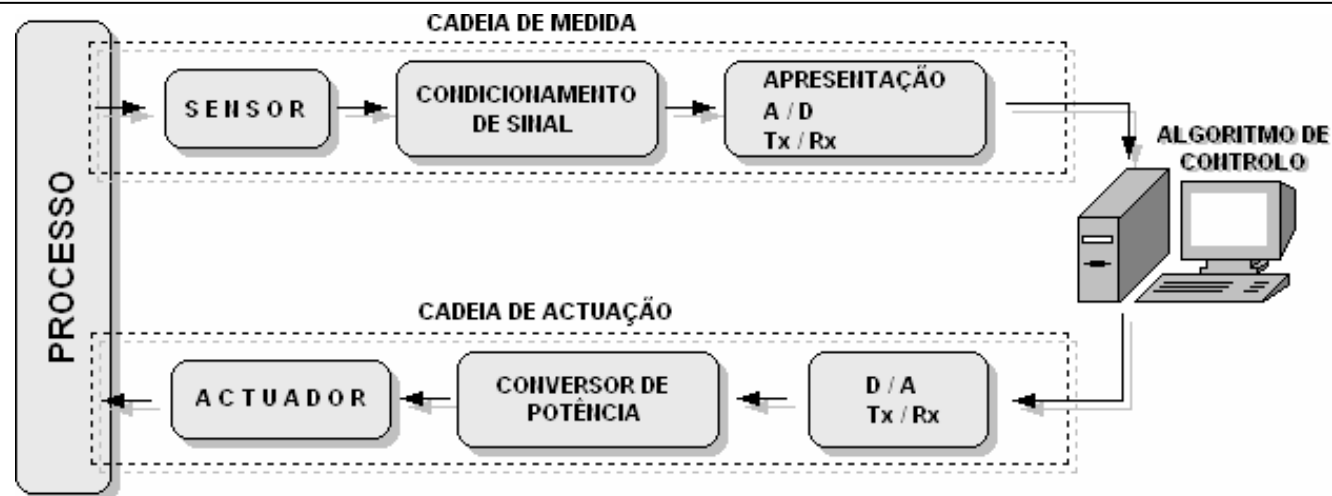
O que é medir?

- Atribuição de um valor numérico: quantificação
- Relativização de uma propriedade ou estado

O objectivo final da medição determina o modo como a medição deve ser alcançada

- Método mais indicado
- Qualidade da medição (como aferi-la?)

Medição...



Caracterização da Qualidade de Medição

- Medição de uma grandeza recorrendo a um instrumento de medição
- O resultado não conduz ao VERDADEIRO valor da mensurada

Quantidade medida afectada por INCERTEZAS

- O verdadeiro valor de uma grandeza é uma abstracção da realidade

>>>> VALOR VERDADEIRO POR CONVENÇÃO

Definição de alguns termos usados na Metrologia:

**Incerteza:** Parâmetro associado ao resultado da medição. Caracteriza a gama de valores entre os quais se espera o valor “real”: DISPERSÃO

**Erro:** Diferença entre o resultado da medição e o valor (convencionalmente) verdadeiro

**Exactidão:** Capacidade de um sistema de medida fornecer resultados próximos do valor real

**Repetibilidade:** Dispersão entre resultados sucessivos feitos nas mesmas condições

Repetibilidade=> Precisão => menor dispersão

**Ex.**

<b>A</b>	<b>3.69</b>	<b>3.71</b>	<b>3.7</b>	<b>3.69</b>
<b>B</b>	<b>3.64</b>	<b>3.79</b>	<b>3.61</b>	<b>3.79</b>

**Pode um método ser preciso e não ser exacto?**

- Uma indicação da precisão da medida pode ser estimada a partir do nº algarismos significativos (aqueles cujos valores são conhecidos + último coberto pelo erro)

**Ex.**

**2,5 V**  
**2,50 V**

**Reprodutibilidade:** Dispersão entre resultados sucessivos com alteração das condições de funcionamento.

Erro de Medição

Não é possível calculá-lo pois o verdadeiro valor da grandeza é desconhecido!

ESTIMATIVA DO VALOR DA INCERTEZA

Os erros de medição são classificados em dois grupos principais:

### ERROS ALEATÓRIOS

- + Variações na medida devido a causas nem sempre identificáveis
- + De pequena amplitude
- + “Resultado da medição subtraído da média tomada sobre um número infinito de medições da mesma mensurada em condições de repetibilidade”

### ERROS SISTEMÁTICOS

- + Refere-se à componente do erro que resulta quando o erro aleatório é subtraído.
  - + Erros Instrumentais (atribuídos ao próprio aparelho)
    - > Efeito de carga
    - > Má calibração
  - + Erros Ambientais:
    - > Interacção do meio sobre a medida (ex. variações térmicas e campos magnéticos)
    - > Podem ser contornados (controlo ambiental, blindagens, etc)
-

O resultado de uma medição, após a correcção dos erros conhecidos, dá origem a uma ESTIMATIVA do valor real.

### Cálculo do Erro de Medição

- O erro de medição é a diferença algébrica entre o resultado da medição e o valor convencionalmente verdadeiro:

$$\Delta x = x - x_v$$

- O seu valor absoluto é determinado por:

$$\delta x = |x - x_v|$$

- Em termos relativos:

$$\varepsilon_x = \delta x / x_v \approx \delta x / x$$

- Frequentemente a medição é obtida, indirectamente, a partir de uma relação funcional.

- Quantificação de uma variável indirectamente

Ex.

- Medir a resistência  $R=V/I$

- Medir a aceleração da gravidade  $g=2h/t^2$

-Cada operando possui um erro associado

### Expressão Fundamental da Propagação dos Erros

Se  $x$  é uma grandeza função de  $n$  grandezas parciais  $x = f(y_1, y_2, \dots, y_n)$

E se cada grandeza possui uma incerteza associada então um majorante do erro relativo de  $x$  pode ser obtido por:

$$\varepsilon_x \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial y_i} \cdot \frac{y_i}{f} \right| \varepsilon_{y_i}$$

### Qualidade da Medição

- Apresentação dos resultados da medida com o número correcto de algarismos significativos
- A expressão numérica de um resultado deve considerar a incerteza na medição indicando um intervalo de valores.

**Ex.**

$$3.50V \pm 2\% \quad \text{ou} \quad 3.21A \pm 0.02A$$

$$1^\circ \text{ caso : } 3.43 \text{ V} \leq V_m \leq 3.57 \text{ V}$$

$$2^\circ \text{ caso : } 3.19 \text{ A} \leq I_m \leq 3.23 \text{ A}$$

(note o número de algarismos significativos)

### Estatística da Medida

- A análise estatística de um conjunto de medidas permite caracterizar analiticamente a incerteza

MÉDIA

$$\mu = \sum_{i=1}^n x_i / n$$

$$n \rightarrow \infty$$

$$\mu \rightarrow x_v$$

DESVIO MÉDIO ABSOLUTO

$$\delta = \sum_{i=1}^n |x_i - \mu| / n$$

DESVIO PADRÃO

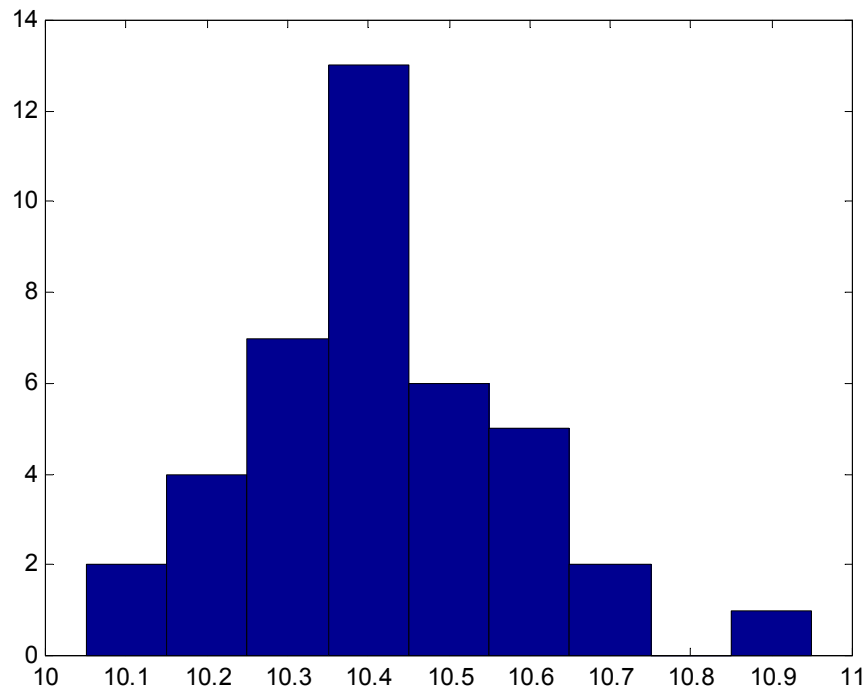
$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 / n}$$

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 / (n - 1)}$$



Medição de uma tensão:

<b>Leitura</b>	10.1	10.2	10.3	10.4	10.5	10.6	10.7	10.8	10.9
<b>Freqência</b>	2	4	7	13	6	5	2	0	1



Erro avaliado estatisticamente...

Analiticamente:

$$\bar{x} = 10,415V$$

$$s = 0.16725537053966V$$

$$\delta = 0.1245V$$

$$\varepsilon = 1.19539126\%$$

Com três algarismos significativos

$$\bar{x} = 10,4V$$

$$s = 0.167V$$

$$\delta = 0.125V$$

$$\varepsilon = 1.20\%$$

Importante...

- O resultado de uma medição só estará completo quando acompanhado por uma expressão quantitativa da sua incerteza.
- O número de algarismos significativos que acompanham o valor medido deve estar em concordância com a incerteza na medição
- A incerteza reflecte o grau de desconhecimento do valor “real”

INSTRUMENTOS DE MEDIÇÃO

Vasta gama de aparelhos que permitem a obtenção de medidas

Agrupados em diferentes tipos conforme os critérios:

- Forma como apresentam a medida (indicador ou registador)
- Método de medição utilizado (instantânea ou totalizante)
- Sistema de visualização (analógico ou digital)

- **Aparelho Indicador**

obtém-se uma indicação directa e temporária (ex. Voltímetro)

- **Aparelho Registador**

é fornecido um registo permanente do valor da grandeza medida

- **Aparelho Totalizador**

soma dos valores parciais da grandeza (ex. Wattímetro totalizador)

- **Aparelho Integrador**

o valor da grandeza é obtido por integração de uma grandeza em função de outra. (ex. Contador de energia eléctrica)

- **Medidas Analógicas**

monitorização contínua de grandezas (ex. posição de um ponteiro)

- **Medidas Digitais:**

apresentação de forma discreta normalmente através de visualizadores numéricos

**vantagens:**

- melhor exactidão, menos susceptibilidades de erros de leitura
  - facilidade de armazenamento e processamento
-

Caracterização dos Instrumentos de Medida

A qualidade da medição depende da qualidade dos instrumentos.

Caracterização dos aparelhos:

- Características Estáticas
- Características Dinâmicas

Características Estáticas

Para além da exactidão e repetibilidade à ainda a salientar:

**- sensibilidade**

quociente entre a variação da grandeza de saída em função da variação da grandeza de entrada.

$$S = \frac{\Delta O}{\Delta I}$$

$$S = \frac{dO}{dI}$$

Derivada da curva de calibração

Expressa em diversas unidades...

ex. Voltímetro Analógico mm/V

É desejável

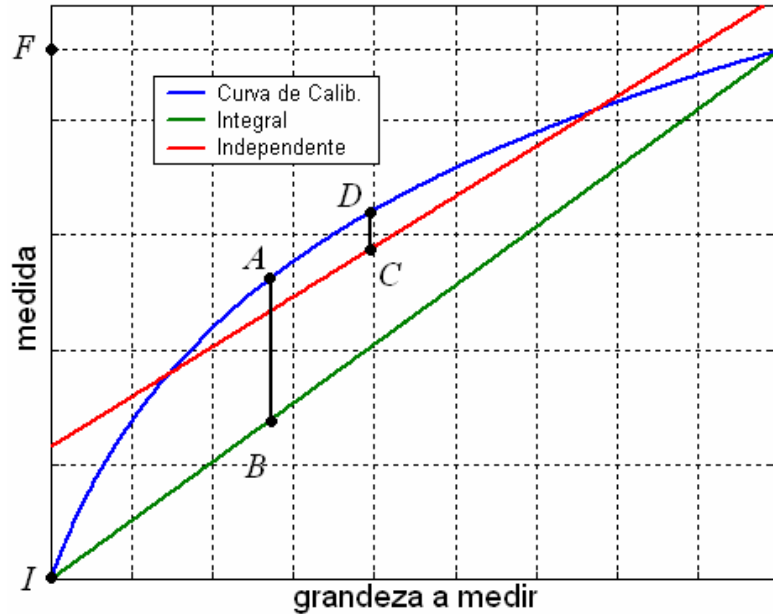
-Elevada sensibilidade independente da entrada, desgaste, influencias.

Se a sensibilidade for constante o instrumento de medição é **linear**

Grau de **não-linearidade** expressa, a partir da curva de calibração, em função de uma recta especificada.

- Linearidade Integral

- Linearidade Independente



$$L_{INT} = \frac{|AB|}{|FI|} \times 100 \quad (\%)$$

$$L_{IND} = \frac{|CD|}{|FI|} \times 100 \quad (\%)$$

Características Estáticas (cont.)

**Gama de Medida**

Intervalo de valores da mensurada que o dispositivo consegue medir com o erro especificado

**Deriva**

Variação lenta de uma característica metrológica de um instrumento de medição

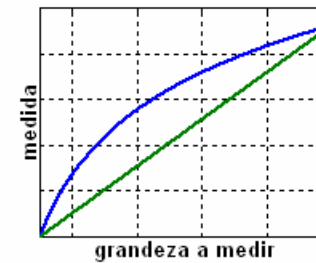
**Histerese**

Propriedade em que a saída depende não só do valor da entrada mas também da direcção em que essa entrada é aplicada.

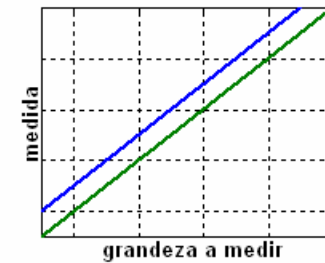
Definida, em percentagem do valor de fim de escala, pela máxima diferença entre leituras idênticas obtidas em sentidos opostos.

**Resolução**

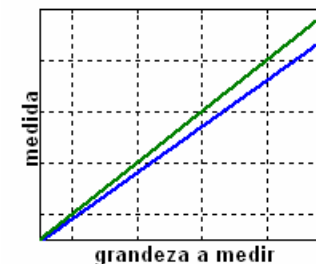
Menor diferença entre indicações capaz de ser distinguida pelo dispositivo.



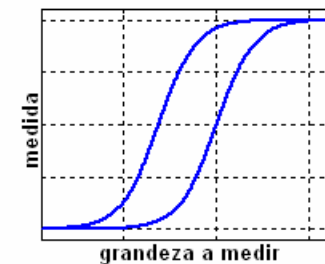
(a)



(b)



(c)



(d)

## Características Dinâmicas

Para os casos em que a entidade a medir varia com o tempo

Por forma a caracterizar o comportamento do instrumento são utilizadas:

- Entradas em Degrau
- Entradas Sinusoidais

Da relação I/O os dispositivos de medida podem ser classificados em:

- Ordem Zero
- 1ª Ordem
- 2ª Ordem

A ordem do instrumento influencia a sua precisão e velocidade

Um aparelho de medida pode ser caracterizado dinamicamente por:

- Tempo de Resposta
- Erro Dinâmico
- Largura de Banda

Do ponto de vista dos sistemas de controlo, a caracterização dinâmica de um sensor é fundamental.

## Sistemas de Ordem Zero

Para este tipo de dispositivos, a saída está relacionada com a entrada através de

$$s(t) = k \cdot e(t) \quad k - \text{sensibilidade estática}$$

A saída do sensor é independente da frequência

- O erro dinâmico é nulo
- Largura de Banda Infinita

## Sistemas de Primeira Ordem

Para este tipo de sensores, a saída está relacionada com a entrada através de

$$a \frac{ds(t)}{dt} + b \cdot s(t) = e(t)$$

$$\frac{S(s)}{E(s)} = \frac{k}{\tau s + 1}$$

**Recorrendo à TL**

Onde a sensibilidade estática (K) é igual a  $1/b$  e  $\text{Tau} = a/b$



Em regime Sinusoidal ( $s=j\omega$ )

$$\left| \frac{S(s)}{E(s)} \right| = \frac{k}{\sqrt{1 + \left( \frac{f}{f_c} \right)^2}} \quad \psi = -\arctan\left( \frac{f}{f_c} \right)$$

Para sistemas de 1ª Ordem, a saída é função da frequência e da sensibilidade

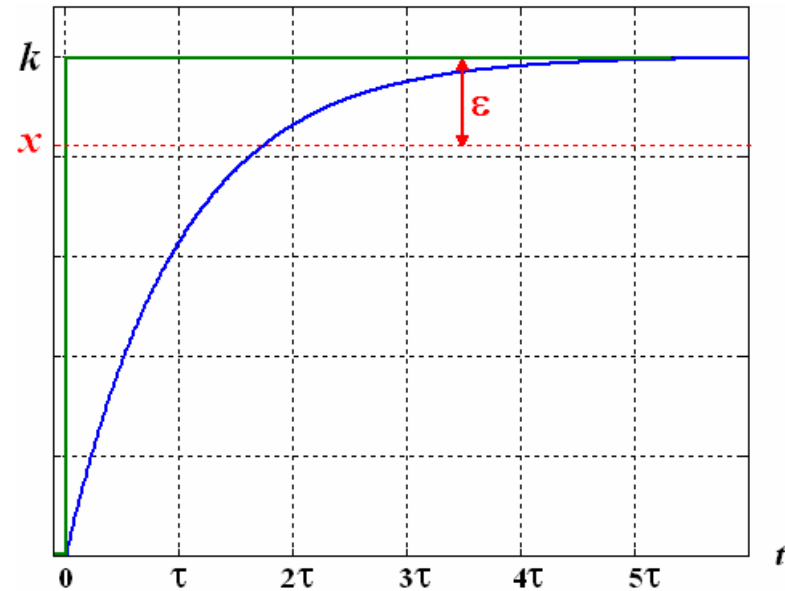
**Tempo de Resposta**

pode ser aferido a partir da resposta ao degrau

$$s(t) = k \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

$$\varepsilon(\%) = \frac{k - x}{k} \times 100$$

$$\varepsilon(\%) = \frac{1}{k} \left( k - k \left( 1 - e^{-\frac{t_R}{\tau}} \right) \right) \times 100$$



Sistemas de Segunda Ordem

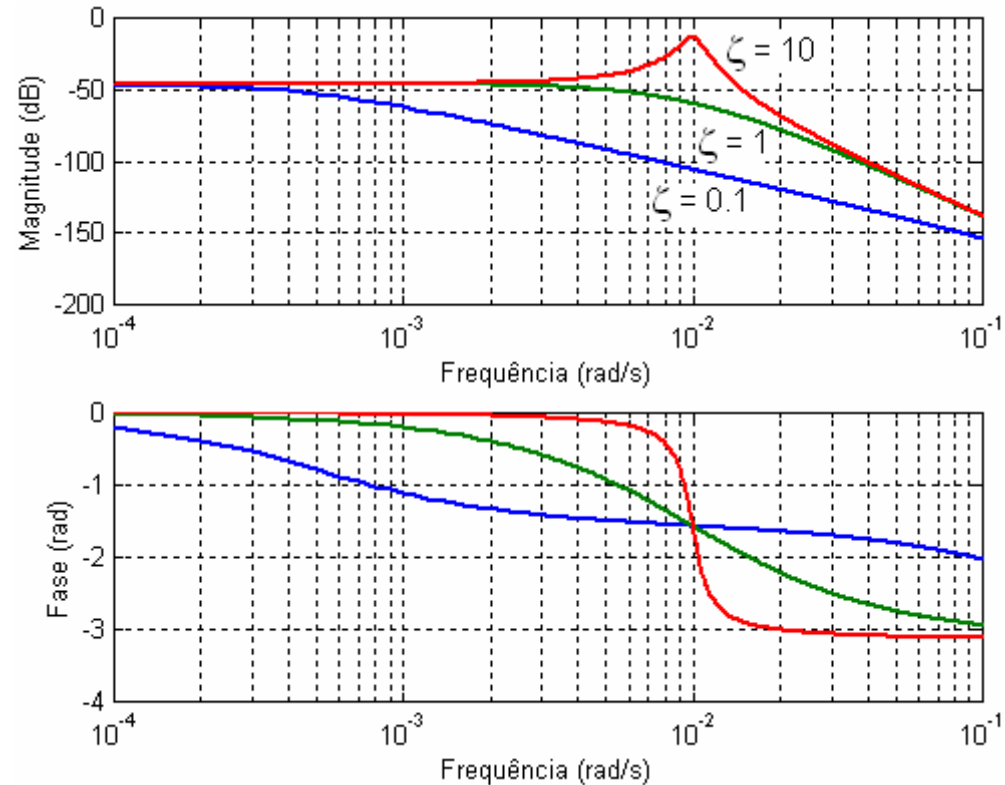
A saída está relacionada com a entrada através de

$$a \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + b \cdot \frac{ds(t)}{dt} + c \cdot s(t) = e(t)$$

**Função de Transferência em s**

$$\frac{S(s)}{E(s)} = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n \cdot s + \omega_n^2}$$

Para este tipo de sistemas a RF depende da frequência de corte, e do coeficiente de amortecimento.



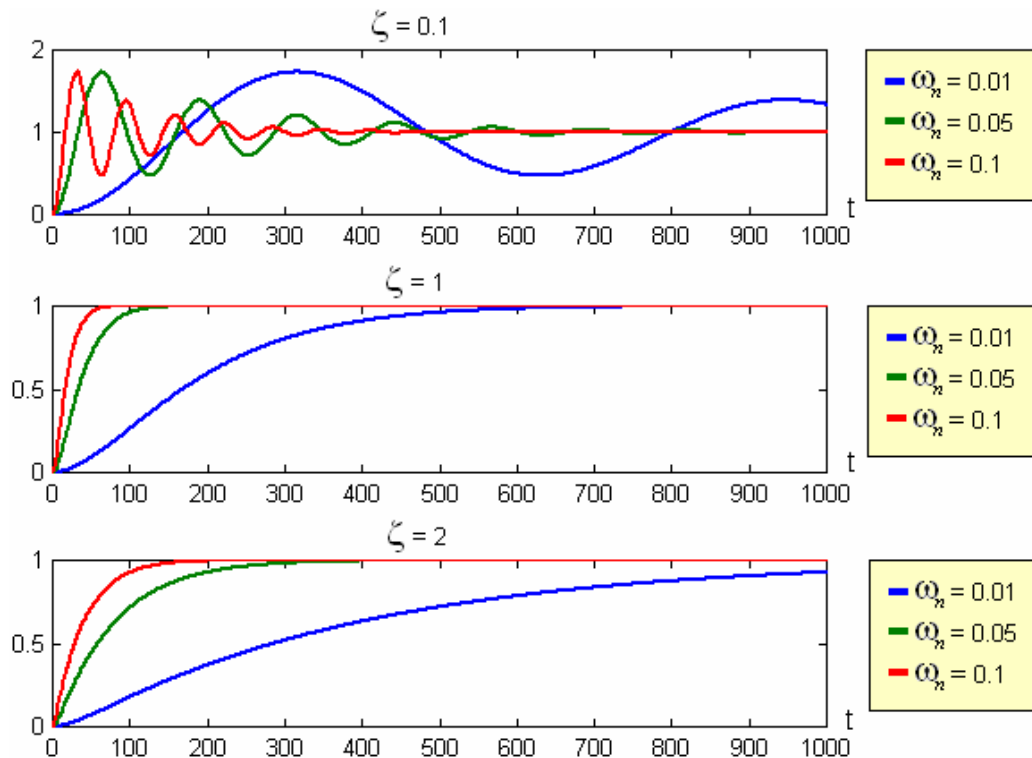
Em termos de resposta ao degrau existem três situações:

$0 < \zeta < 1$     Resposta sub-amortecida

$\zeta = 1$         Resposta criticamente amortecida

$\zeta > 1$         Resposta sobre-amortecida

A resposta temporal é determinada, não só por  $\zeta$  mas também por  $\omega_n$



## EXACTIDÃO NA INSTRUMENTAÇÃO ANALÓGICA

- A indicação de um instrumento não representa o valor exacto
- Erro de Leitura + Atritos + Envelhecimento + ruído +...
- O erro de medição MAXIMO é caracterizado de forma diferente da instrumentação analógica e na digital

- Na I.A. o limite do Erro é representado pelo índice de classe (IC)
- O IC é indicado no próprio aparelho ou na documentação que o acompanha

Tabela dos IC (CEI – Comissão Electrotécnica Internacional)

IC	0.2	0.3	0.5	1.0
Limite Erro/%	±0.2%	±0.3%	±0.5%	±1.0%

- O índice de classe é, em valor absoluto, a razão entre o erro absoluto máximo do ERRO (suposto constante em toda a gama) e o valor máximo da escala!

Ex: Voltímetro de 10 V pertence à classe 0.5. O erro absoluto é

$$\delta_{\max} = ic \cdot \frac{V_{FE}}{100} = 0.05V$$

O erro relativo (á leitura) é:  $\varepsilon_{\max} = ic \cdot \frac{V_{FE}}{\textit{leitura}} (\%)$

O erro relativo tende para INFINITO quando a leitura se aproxima do início da escala

**Recomenda-se a selecção conveniente da escala de modo a garantir a máxima deflexão do ponteiro.**

### EXACTIDÃO NA INSTRUMENTAÇÃO DIGITAL

Normalmente especificada em duas parcelas:

- percentagem da leitura
- erro de resolução

Exemplo: Num indicador digital de três dígitos a especificação da exactidão é:

**$\pm[0,1\% \text{ da entrada} + 1 \text{ dígito (LSD)}]$**

**>> Exemplo...**

Voltímetro Digital

Nº de dígitos : 4 ½

Escala: dc 200mV

Exactidão:  $\pm[0.04\% \text{ da leitura} + 3 \text{ digitos (LSD)}]$

Erro relativo máximo uma leitura de 100mV?

$$\delta_{\max} = 0.04 \frac{100}{100} + 3 \times 0.01 = 0.07 mV$$

**NOTA:**

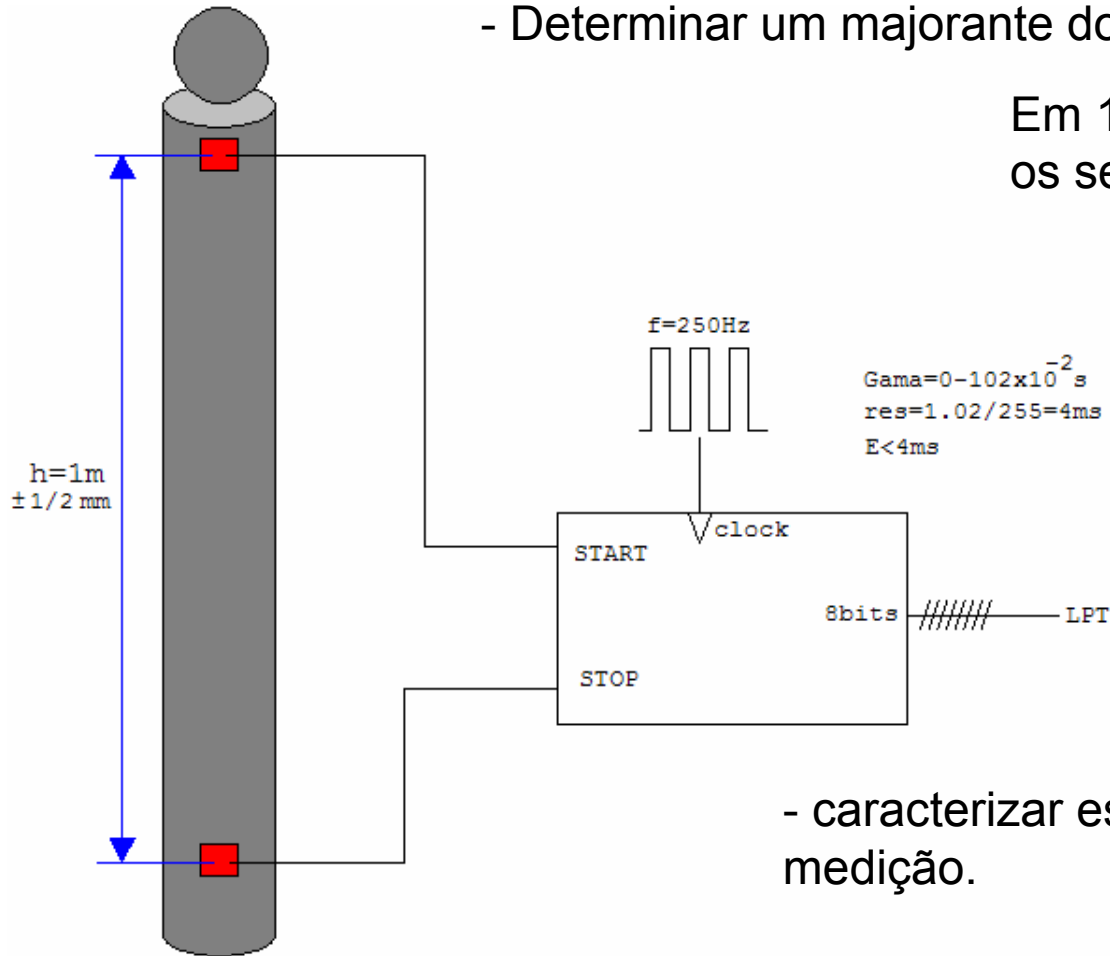
- O erro de medida aumenta com a distância da leitura ao fim de escala.
- Recomenda-se a selecção apropriada de escalas

Exemplos de Aplicação

**MEDIÇÃO INDIRECTA DA ACELERAÇÃO DA GRAVIDADE**

- Determinar um majorante do erro de medida do processo

Em 100 experiências obtiveram-se os seguintes resultados....



LPT	Frequência Absoluta
111	4
112	20
113	41
114	28
115	6
116	1

- caracterizar estatisticamente o método de medição.

Medição indirecta da aceleração: **Expressão Funcional**

$$g = \frac{2h}{t^2}$$

Incertezas associadas as medições:

- Altura  $\delta h = 0.0005 \Rightarrow \varepsilon_h = \frac{0.0005}{1} \times 100 = 0,05\%$

-Tempo  $\delta t = 0,004s \Rightarrow \varepsilon_t = \frac{0,004}{1,02} \times 100 = 0,4\%$

$$\varepsilon_g \leq \left| \frac{\partial g}{\partial h} \cdot \frac{h}{g} \right| \varepsilon_h + \left| \frac{\partial g}{\partial t} \cdot \frac{t}{g} \right| \varepsilon_t \Rightarrow \varepsilon_g \leq \left| \frac{2}{t^2} \cdot \frac{t^2 h}{2h} \right| \varepsilon_h + \left| -\frac{4ht}{t^4} \cdot \frac{t \cdot t^2}{2h} \right| \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_g \leq \varepsilon_h + 2\varepsilon_t \Rightarrow \varepsilon_g \leq 0,05 + 0,8 \Rightarrow \varepsilon_g \leq 0,85$$

$$\boxed{\varepsilon_g \leq 0,9\%}$$

com apenas um algarismo significativo...



- Caracterização Estatística

LPT	Frequência Absoluta
111	4
112	20
113	41
114	28
115	6
116	1

Determinação do tempo por *software*



$$Tempo = Leitura * 4ms$$

Leitura	Tempo/ms
111	0,444
112	0,448
113	0,452
114	0,456
115	0,46
116	0,464

**Com quantos algarismos significativos deve ser expresso o tempo?**

- Erro ~ 0,004 (casa das milésimas)
- Algarismos que conhecemos + último coberto pelo erro

**R:** 3 Algarismos Significativos

**NOTA** O número de algarismos significativos usados para representar a incerteza deve ser baixo (tipicamente 1 ou 2). Assim não seria boa prática dizer que a incerteza é 0,00432s

Leitura	Frequência Absoluta	Tempo/ms	Aceleração Calculada
111	4	0,444	10.2
112	20	0,448	9,97
113	41	0,452	9.79
114	28	0,456	9.62
115	6	0,460	9.45
116	1	0,464	9.29

Note o nº de algarismos significativos

$\bar{x} / \text{ms}^{-2}$	$s / \text{ms}^{-2}$	$\overline{\delta x} / \text{ms}^{-2}$	$\overline{\varepsilon}_x / \%$
9,77	0,174	0,132	1,35%

Desvio Padrão das Medidas

$$s_m = \frac{s}{\sqrt{N}}$$

Desvio Padrão da Média das Medidas

$$s_m = \frac{0,174}{\sqrt{100}} = 0,0174$$

Se  $N(u,s)$   
IC ~68%