



**IPB-ESTIG** INSTITUTO POLITÉCNICO DE BRAGANÇA  
ESCOLA SUPERIOR DE TECNOLOGIA E GESTÃO

# **CONTROLO DIGITAL**

**MATERIAL DE APOIO ÀS AULAS**

Eng. João Paulo Coelho

2005/2006



© 2006 – JOÃO PAULO COELHO

ESTE DOCUMENTO DESTINA-SE, PRIMARIAMENTE, AO APOIO PEDAGÓGICO DA DISCIPLINA DE CONTROLO DIGITAL LECCIONADA NO IPB - INSTITUTO POLITÉCNICO DE BRAGANÇA, ESCOLA SUPERIOR DE TECNOLOGIA E GESTÃO. NÃO É PERMITIDA A UTILIZAÇÃO PÚBLICA DESTE DOCUMENTO, FORA DO CONTEXTO PARA QUE FOI CRIADO, SEM O EXPRESSO CONSENTIMENTO DO AUTOR.

João Paulo Coelho  
Instituto Politécnico de Bragança  
Escola Superior de Tecnologia e Gestão  
5700 Bragança - Portugal  
WebPage: [www.ipb.pt/~jpcoelho.htm](http://www.ipb.pt/~jpcoelho.htm)  
E-Mail: [jpcoelho@ipb.pt](mailto:jpcoelho@ipb.pt)



<b>0</b>	<b>Introdução e Objectivos .....</b>	<b>1</b>
0.1	Controlo Digital: Do que é que se trata? .....	4
0.2	Arquitectura do Documento .....	5
0.3	Pré-Requisitos .....	6
<b>1</b>	<b>Controlo no Domínio Contínuo.....</b>	<b>7</b>
1.1	Conceitos Básicos para Sistemas de Controlo .....	7
1.1.1	Estabilidade dos Sistemas de Controlo .....	10
1.1.2	Figuras de Mérito em Sistemas de Controlo .....	12
1.1.2.1	Critério de Desempenho em Estado Estacionário .....	13
1.1.2.2	Especificações no Domínio do Tempo .....	14
1.1.2.3	Especificações no Domínio da Frequência.....	15
1.1.3	Sistemas de Primeira Ordem em Malha Aberta.....	17
1.1.4	Sistemas de Segunda Ordem em Malha Aberta.....	17
1.1.4.1	Localização dos Pólos e Resposta Transitória .....	19
1.1.5	Redução da Ordem de Sistemas .....	20
1.1.6	Imunidade ao Ruído Vs. Largura de Banda.....	22
1.1.7	Linearização de Sistemas .....	23
1.1.8	Sistemas Realimentados .....	24
1.1.8.1	Sensibilidade de Sistemas em Malha Fechada .....	26
1.1.8.2	Erro em Regime Permanente .....	28
1.1.9	Sistemas de Primeira Ordem em Malha Fechada .....	30
1.1.10	Sistemas de Segunda Ordem em Malha Fechada .....	32
1.1.11	Resposta de Malha Aberta Vs. Malha Fechada.....	34
1.2	Projecto de Sistemas de Controlo.....	36
1.2.1	Lugar das Raízes.....	36
1.2.2	Diagramas de Bode .....	36
1.2.3	Tipos de Controladores.....	37
1.2.4	Projecto por Posicionamento de Pólos .....	38
1.2.5	Sintonia de Controladores PID.....	41

1.2.5.1	Método de Ziegler e Nichols .....	41
1.2.5.2	Projecto pelos Diagramas de Bode .....	44
1.2.5.3	Estratégia Analítica de Projecto .....	45
1.2.6	Projecto de Controladores Avanço e Atraso .....	47
1.2.6.1	Controladores Avanço de Fase .....	47
1.2.6.2	Controladores Atraso de Fase .....	55
<b>2</b>	<b>Controlo no Domínio Discreto .....</b>	<b>59</b>
2.1	Amostragem e Reconstrução.....	59
2.1.1	Processo de Amostragem.....	61
2.1.2	Aspectos Relativos à Distorção por Amostragem.....	67
2.1.3	Quantização.....	71
2.1.4	Reconstrução.....	73
2.1.4.1	Reconstrução Ideal.....	73
2.1.4.2	Reconstrução Real .....	75
2.1.4.3	Efeito da Dinâmica do ZOH .....	80
2.2	A Transformada em Estrela e a Transformada Z.....	84
2.2.1	Avaliação, em Forma Fechada, de $E^*(s)$ .....	88
2.2.2	Transformada em Z .....	90
2.2.3	Transformada Modificada de Z .....	91
2.2.4	Transformada Inversa de Z e Equações às Diferenças .....	96
2.3	Mapeamento Plano $s \rightarrow$ Plano $z$ .....	99
2.3.1	Resposta em Frequência de Sistemas Discretos .....	103
2.3.1.1	Avaliação Geométrica da Resposta em Frequência.....	104
2.3.1.2	Estabilidade de Sistemas Discretos.....	107
2.3.2	Discretização de Funções de Transferência Contínuas.....	109
2.3.2.1	Euler Forward e Backward.....	114
2.3.2.2	Transformação Bilinear ou de "Tustin".....	119
2.3.2.3	Mapeamento Pólo-Zero .....	121
2.4	Escolha do Período de Amostragem.....	124
2.5	Análise de Sistemas de Controlo Digitais .....	127
2.5.1	Sistemas Amostrados em Malha Aberta.....	127
2.5.2	Sistemas Amostrados em Malha Fechada .....	131
2.5.3	Técnicas Algébricas para Análise da Estabilidade.....	133
2.5.3.1	Crítério de Routh-Hurwitz para Sistemas Discretos.....	133

---

2.5.3.2	Critério de Jury .....	134
2.6	Projecto de Controladores Digitais.....	135
2.6.1	Efeito do Retentor de Ordem Zero.....	136
2.6.2	Efeito do Filtro Anti-Aliasing .....	139
2.6.3	Projecto por Emulação.....	143
<b>3</b>	<b>Exercícios .....</b>	<b>151</b>
<b>4</b>	<b>Apêndices .....</b>	<b>163</b>
A1.	Transformada de Laplace .....	163
A2.	Teoria de Fourier.....	167
A3.	Alguns Pares de Transformadas de Laplace .....	171
A4.	Alguns Pares de Transformadas Z.....	173
<b>5</b>	<b>Referências.....</b>	<b>175</b>
<b>6</b>	<b>Índice Remissivo.....</b>	<b>177</b>



## Introdução e Objectivos

**E**M 1859, Charles Darwin, publicou a sua teoria relativa à evolução das espécies, segundo a qual, as variações do fenótipo dos organismos deveu-se a modificações lentas do meio, i.e. quando os critérios de desempenho mudavam, as espécies tendiam a adaptar-se a essas novas condições. Em termos ecológicos este fenómeno descreve uma malha de realimentação entre uma dada espécie e o meio que a circunda.

A regulação por realimentação não é um fenómeno do domínio exclusivo dos sistemas biológicos. De facto, o controlo por realimentação é o mecanismo básico pelos quais os sistemas, sejam eles mecânicos, eléctricos ou biológicos, mantém o seu equilíbrio. As acções de controlo tomadas neste contexto têm por base a diferença entre o estado desejado e o estado actual do sistema, i.e. a adaptação é feita em função do erro.

Em particular, e no que diz respeito a esta disciplina, o controlo por realimentação de um parâmetro ou conjunto de parâmetros relativos a um dado processo (normalmente entidades físicas como posição, temperatura, ou concentração) pode ser esquematizado através do seguinte diagrama [3].

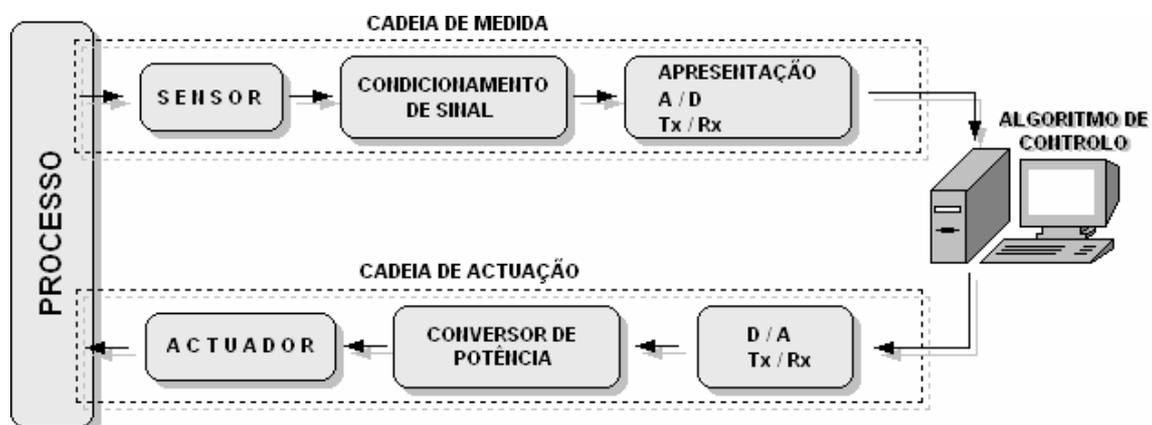


Fig 1. Diagrama de blocos de um sistema de controlo por realimentação.

Como se pode observar, dentro do contexto da regulação automática, é possível identificar três componentes principais sendo eles:

- Cadeia de Medida.
- Cadeia de Actuação.
- Algoritmo de Controlo.

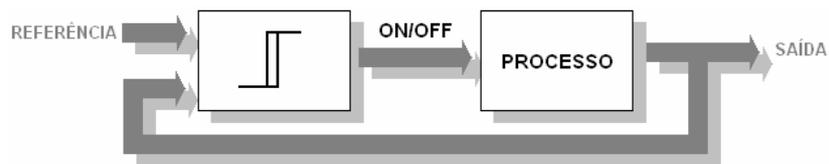
A cadeia de medida é o subsistema responsável pela quantificação da variável a controlar. Este bloco é, em termos fundamentais, constituído por um elemento sensível à propriedade que se pretende medir. Normalmente essa sensibilidade reflecte-se em variações de uma qualquer propriedade eléctrica como por exemplo tensão, impedância ou frequência.

O sinal adquirido, e devidamente condicionado, será o responsável por fornecer a informação associada ao estado presente do sistema. Esse estado será comparado com o desejado resultando num sinal de controlo que é fornecido à cadeia de actuação. Este, depois de devidamente adaptado, será usado para excitar um qualquer actuador. O actuador efectua o papel inverso do sensor convertendo um sinal, normalmente eléctrico, em outro não eléctrico. Exemplos disso são o motor eléctrico, em que corrente eléctrica é convertida em energia de rotação, ou um cilindro pneumático conduzido por uma electroválvula onde corrente eléctrica é convertida, de forma indirecta, em deslocamento axial.

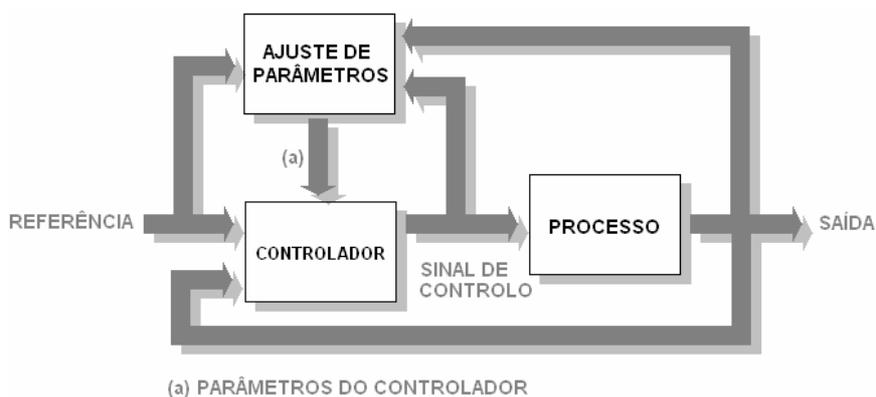
O bloco que, a partir da informação do estado do sistema, fornece o sinal de comando é designado por compensador ou controlador. Numa perspectiva electrotécnica este pode ser analógico ou digital (note-se que, genericamente, o controlador pode ser de outra natureza como por exemplo mecânico, pneumático ou hidráulico). Para qualquer uma das duas estratégias o seu modo de operação é o mesmo: executar operações algébricas entre sinais. No caso analógico as operações matemáticas são executadas recorrendo, por exemplo, a circuitos somadores, integradores e diferenciadores desenvolvidos em torno de amplificadores operacionais. Por outro lado, no caso de controladores digitais, os cálculos são levados a cabo por portas lógicas. Mais concretamente são os microprocessadores que, por norma, se encarregam dessa tarefa.

A complexidade das operações levadas a cabo pelo controlador podem ir de uma simples comparação com histerese (controlo on/off) a uma estratégia de controlo mais elaborada como por exemplo o controlo de três termos (Proporcional-Integral-Derivativo) que será objecto de revisão no capítulo 1 deste documento.

No domínio dos controladores digitais, dada a maior facilidade de implementação de rotinas de cálculo numérico, é possível encontrar estratégias de controlo mais avançadas como por exemplo o controlo adaptativo. Subjacente a esta filosofia encontra-se a possibilidade de adaptação do controlador às mudanças na dinâmica do processo ou no perfil das perturbações. Essa adaptação é conduzida, por alterações nos graus de liberdade do controlador, através de um determinado mecanismo de ajuste dos parâmetros [1].



**Fig 2. Diagrama de blocos de um sistema de controlo do tipo on/off**



**Fig 3. Diagrama de blocos de um sistema de controlo adaptativo**

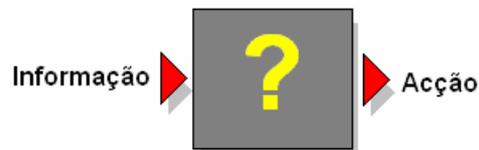
Presentemente, e dada a proliferação e baixo custo dos sistemas computacionais digitais, e atendendo às enormes vantagens que lhe estão associadas, o controlo baseado em sistemas numéricos digitais, tais como DSP's, micro-controladores ou microprocessadores, exonerou quase completamente os controladores analógicos das suas funções.

## 0.1 Controlo Digital: Do que é que se trata?

Como já se afirmou anteriormente, o objectivo de um sistema de controlo é o de obrigar um sistema a se manter o mais próximo possível do estado referência ignorando efeitos desviantes. Para isso, o controlador gera um sinal de controlo a partir da manipulação algébrica do sinal representativo do estado do processo.

Neste contexto, o projecto de controladores prende-se com a resposta à seguinte questão:

*Como estabelecer a relação entre as acções de controlo e a informação proveniente do sistema?*



Até ao século XIX, o projecto de sistemas de controlo envolvia apenas conhecimento empírico, i.e. tentativa e erro e uma boa dose de intuição. Após a primeira apresentação rigorosa da análise da estabilidade de um sistema de controlo por Maxwell em 1868, a teoria do controlo adoptou a sua linguagem formal: a matemática.

Desde o artigo apresentado por Maxwell até aos dias presentes, foram numerosas as pessoas que contribuíram para a maturação científica da teoria de controlo. Entre eles, e só para citar alguns, é bem conhecido o trabalho de Lyapunov, Nyquist, Bode e Popov. As duas grandes guerras assim como a corrida espacial ou o desenvolvimento das telecomunicações foram os grandes motores que impulsionaram, sem precedentes, o desenvolvimento de métodos de análise e projecto de sistemas de controlo.

Neste contexto, o controlo digital aparece como uma forma de "upgrade" do controlo analógico. Além do limite na complexidade das operações realizáveis, os limites e tolerâncias dos componentes físicos constituem, para o controlo analógico, uma séria desvantagem. Mais concretamente, o controlo digital trouxe as seguintes mais-valias aos servo-sistemas:

- Aumento do desempenho
- Diminuição dos custos
- Fiabilidade
- Flexibilidade

Relativamente ao primeiro ponto, e dada a possibilidade de se elevar a complexidade dos compensadores, o desempenho dos sistemas de controlo aumenta. Adicionalmente, e dada a evolução industrial que se tem feito sentir, o custo dos processadores digitais tem vindo, tendencialmente a diminuir. Mais ainda, e dado que os valores dos coeficientes do controlador não são gerados por componentes físicos, não se verificam derivas nos parâmetros do controlador. Deste modo assiste-se a um aumento da fiabilidade assim como da capacidade de replicação dos controladores. A flexibilidade, i.e. a capacidade de alterar o controlador por "software", reflecte uma estratégia mais ágil e menos onerosa de ajuste dos sistemas de controlo.

Voltando à questão levantada inicialmente, é efectivamente o estudo da teoria subjacente à análise e projecto de sistemas de controlo que nos irá mover. Mais concretamente, e dado que nos referimos ao controlo digital, estamos interessados no mapeamento acção/informação para o caso em que esta última não é obtida do sistema de forma contínua mas sim em intervalos de tempo discretos, i.e. amostrada. Assim, e em traços gerais, os objectivos de base que o aluno deve perseguir ao longo desta disciplina são:

- Compreender sistemas em tempo discreto.
- Compreender sistemas controlados por computador.
- Ser capaz de projectar controladores digitais recorrendo a técnicas clássicas.

## **0.2 Arquitectura do Documento**

Este documento está organizado em dois capítulos estando complementado ainda com um conjunto de apêndices cujo objectivo principal é diminuir o tempo de estudo associado a matérias satélite ao controlo de sistemas.

O primeiro capítulo pretende apenas ser uma revisão de alguns conceitos fundamentais do controlo contínuo que serão necessários para o controlo

discreto no tempo. No segundo capítulo apresenta-se a teoria de sistemas amostrados, e técnicas de projecto no domínio da frequência.

Em cada um dos capítulos, e sempre que se achar relevante, apresentam-se em caixas de texto, demonstrações de expressões e equações ou, alternativamente, conceitos que, apesar de não estarem contemplados em termos de conteúdo programático, achou-se por bem incluir.

### **0.3 Pré-Requisitos**

De modo a poder ser possível acompanhar os conteúdos incluídos neste documento, o aluno deverá possuir sólidos conhecimentos nas seguintes áreas do conhecimento:

- Cálculo diferencial e integral
- Análise complexa
- Sistemas e Sinais
- Teoria de controlo no domínio analógico

Deverá ainda possuir conhecimentos de sistemas de aquisição de dados (conversores A/D e D/A) e elevado domínio na utilização da ferramenta informática MatLab<sup>®</sup>¥.

## 1.1 Conceitos Básicos para Sistemas de Controlo

A principal motivação subjacente ao projecto de um sistema de controlo é a de obrigar um dado sistema a apresentar um perfil de resposta o mais coerente possível com aquela que se pretende que este exiba. Esse perfil deve ser o mais independente possível de perturbações que possam acometer o sistema.

Para isso, grande parte dos procedimentos de projecto de um sistema de controlo assenta num modelo (normalmente matemático) do processo a controlar. Dado que o comportamento de um sistema dinâmico real é, frequentemente, demasiado complexo para poder ser modelado completamente, normalmente adopta-se uma aproximação baseada num conjunto de suposições como por exemplo a linearidade e a invariância no tempo.

No que se refere aos sistemas dinâmicos, o seu comportamento, assim como os sinais por eles manipulados, podem ser descritos, no domínio do tempo, através de um conjunto de equações diferenciais. Por exemplo, no domínio contínuo do tempo, um sinal ou sistema determinístico pode ser descrito por uma equação diferencial homogénea do tipo,

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} = \mathcal{F}\left(x(t), \frac{dx(t)}{dt}, \frac{d^2 x(t)}{dt^2}, \dots, \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}}\right) \quad (1)$$

com condições iniciais,

$$\left\{x(0), \frac{dx(0)}{dt}, \frac{d^2 x(0)}{dt^2}, \dots, \frac{d^{n-1} x(0)}{dt^{n-1}}\right\} \quad (2)$$

No caso particular de sistemas lineares e invariantes no tempo, o seu

comportamento dinâmico é normalmente descrito por equações diferenciais de coeficientes constantes da forma:

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u(t-T_0)}{dt^m} + \dots + b_0 u(t-T_0) \quad (3)$$

onde  $T_0 \geq 0$  se refere a um atraso puro no tempo.

[ nota ]

Para o caso particular do sinal 1-D,  $x(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ , obtém-se, derivando duplamente em ordem ao tempo,

$$\frac{dx(t)}{dt} = A\omega \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -A\omega^2 \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

Por outro lado como  $A \cdot \sin(\omega t + \varphi) = x(t)$  a expressão anterior toma a forma,

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -\omega^2 \cdot x(t) \Rightarrow \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \omega^2 \cdot x(t) = 0$$

A solução desta equação diferencial é do tipo:

$$x(t) = C_1 \cdot e^{j\omega t} + C_2 \cdot e^{-j\omega t}$$

O que leva a que, considerando o sinal inicial e atendendo à relação de Euler,

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi) = \frac{A}{2j} e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t} - \frac{A}{2j} e^{-j\varphi} \cdot e^{-j\omega t} \text{ e logo,}$$

$$C_1 = \frac{A}{2j} e^{j\varphi} \text{ e } C_2 = -\frac{A}{2j} e^{-j\varphi}$$

Deste modo é fácil ver que,

$$x(0) = C_1 \cdot e^{j\omega t} \Big|_{t=0} + C_2 \cdot e^{-j\omega t} \Big|_{t=0} = C_1 + C_2 = A \cdot \sin(\varphi) \text{ e que}$$

$$\frac{dx(0)}{dt} = j\omega C_1 \cdot e^{j\omega t} \Big|_{t=0} - j\omega C_2 \cdot e^{-j\omega t} \Big|_{t=0} = j\omega C_1 - j\omega C_2 = A\omega \cdot \cos(\varphi)$$

Assim, pode concluir-se que  $x(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$  pode ser representado pela equação diferencial:

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \omega^2 \cdot x(t) = 0 \text{ sujeita às condições iniciais}$$

$$\left\{ x(0) = A \cdot \sin(\varphi), \frac{dx(0)}{dt} = A\omega \cdot \cos(\varphi) \right\}$$

Uma forma alternativa de representar um sistema modelado nestes termos decorre da aplicação da transformada de Laplace à equação diferencial. Assim, e para um determinado conjunto de condições iniciais, a equação diferencial genérica apresentada em {3} passa a ter o seguinte aspecto no domínio de Laplace<sup>‡</sup>,

$$Y(s) = \frac{N(s)}{D(s)}U(s) + \frac{CI(s)}{D(s)} \quad (4)$$

onde,

$$\frac{N(s)}{D(s)} = e^{-sT_0} \cdot \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} \quad (5)$$

e  $CI(s)$  refere-se a um polinómio em  $s$  associado às condições iniciais do sistema. Considerando apenas a resposta forçada, i.e. considerando as condições iniciais nulas, a relação entre  $Y(s)$  e  $U(s)$  é designada por função de transferência (F.T.) e possui a forma da razão de dois polinómios em  $s$  como se mostra na equação subsequente.

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{N(s)}{D(s)} = e^{-sT_0} \cdot \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} = G(s) \quad (6)$$

De modo a garantir a causalidade do sistema, o grau do polinómio do denominador deverá ser maior ou igual ao grau do polinómio do numerador, i.e.  $n \geq m$ . A causalidade está, como se sabe, intimamente ligada à existência física do sistema.

[ nota ] Um sistema é dito causal se a sua resposta não depende de valores futuros dos sinais de entrada.

Os valores de  $s$  que tornam a razão nula são chamados de **zeros** do sistema. Por outro lado os valores de  $s$  que tornam  $G(s)$  infinita são designados por **pólos** do sistema. Um sistema com  $n$  pólos é designado por sistema de ordem  $n$ . Por outro lado um sistema com  $l$  pólos na origem (ou seja em  $s = 0$ ) é denominado por sistema de **tipo**  $l$ .

[ nota ] Como se verá mais à frente, o *tipo* de um sistema está intimamente ligado à ordem do polinómio associado ao sinal de entrada que este consegue seguir com erro em regime permanente finito.

<sup>‡</sup> Aconselha-se um estudo prévio ao anexo A1 deste documento.

Dependendo da razão entre o número de pólos e o número de zeros da função de transferência esta pode ser designada por:

- **Própria** se  $\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = C < \infty$ , i.e. existem tantos pólos como zeros finitos.
- **Imprópria** se  $\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = \infty$ , i.e. existem mais zeros finitos do que pólos
- **Estritamente Própria** se  $\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = 0$ , i.e. existem mais pólos finitos do que zeros.

[ nota ] A maior parte dos sistemas físicos são modeláveis por funções de transferência estritamente próprias. Mais ainda, e como já foi dito, todos eles requerem que o número de zeros seja inferior ou igual ao número de pólos por forma a garantir causalidade.

Para finalizar note-se que, na transformada de Laplace,  $s$  é uma variável complexa da forma  $s = \sigma + j\omega$ . Por este motivo, uma das representações mais comuns dos pólos e zeros de um sistema recorre ao seu enquadramento no chamado plano  $s$ . O plano  $s$  não é mais do que o bem conhecido plano de *Argand* para números complexos onde, num par de eixos ortonormados associados à parte real e à parte imaginária, os números complexos podem ser representados.

Por outro lado é de evidenciar que, a função de transferência  $G(s)$ , é também uma entidade complexa. Considerando  $\sigma = 0$ , i.e.  $s = j\omega$  a relação  $G(j\omega)$  em função de  $\omega$  fornece aquilo que se designa por resposta em frequência. Como  $G(j\omega)$  é complexo, esta pode ser expressa por magnitude e fase. Os gráficos da magnitude e da fase de  $G(j\omega)$  em função de  $\omega$  são designados por gráficos da resposta em frequência.

### 1.1.1 Estabilidade dos Sistemas de Controlo

No projecto de um sistema de controlo a estabilidade do sistema sob estudo é uma característica que deve ser tida sempre em consideração. A estabilidade de um sistema causal, linear e invariante no tempo pode ser avaliada a partir da solução da equação característica, i.e. todos os valores de  $s$  que sejam solução da equação  $D(s) = 0$ .

Abreviadamente, um sistema causal, linear e invariante no tempo (LIT) é

assimptoticamente estável se todos os seus pólos (também designados por modos) possuem parte real negativa. Por outro lado, se existir pelo menos um pólo com parte real positiva o sistema é assimptoticamente instável. Define-se ainda estabilidade marginal para os casos em que o sistema possui um pólo com parte real nula.

**[ nota ]**

Um sistema para ser estável é necessário que a sua resposta impulsional seja absolutamente integrável (absolutamente somável para sistemas discretos no tempo), i.e. [11][12]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < \infty \text{ ou } \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| < \infty$$

Essa é também uma das condições necessárias para que um sistema admita representação no domínio de Fourier isto porque:

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

Para o integral convergir é condição necessário que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < \infty \text{ (uma das condições de Dirichlet [11][12])}$$

Assim, se um sistema linear e invariante no tempo  $h(t)$  admitir representação em Laplace  $H(s)$  é necessário que a região de convergência inclua o eixo  $j\omega$  para que o sistema admita representação em Fourier, i.e. para que o sistema seja **estável**. Adicionalmente, se o sistema for causal, a região de convergência é todo o plano à direita do pólo mais à direita. Assim se um sistema for linear, invariante no tempo e causal é necessário que os pólos estejam à esquerda do eixo  $j\omega$  de modo a que o sistema seja assimptoticamente estável, i.e. devem possuir parte real negativa. Como é obvio, se um sistema não for causal, para ser estável os pólos devem estar no semi-plano direito!!

Uma outra alternativa de análise da estabilidade tem a ver com a resposta forçada do sistema. Deste modo diz-se que um determinado sistema é estável segundo o critério **BIBO** (Bounded Input Bounded Output) se a sua resposta a uma entrada delimitada é delimitada, i.e. um sistema LIT é estável no sentido

BIBO se, independentemente do perfil do sinal, uma entrada limitada em amplitude conduzir a um sinal de saída limitado em amplitude.

**[ nota ] Estabilidade BIBO**

Admita-se um sistema linear e invariante no tempo regido pela equação,

$$y = T\{x(t)\}$$

onde  $T\{\cdot\}$  designa uma operação de transformação. Este sistema é estável no sentido BIBO se, garantindo que  $x(t)$  é limitado em amplitude por um valor genérico e finito digamos  $B_x$ , a resposta a esse sinal de excitação conduzir a uma saída  $y(t)$  também ela limitada por um qualquer valor finito arbitrário  $B_y$ , i.e. se  $|x(t)| \leq B_x < \infty \rightarrow |y(t)| \leq B_y < \infty, \forall t$  então o sistema é BIBO estável.

Note-se que um sistema assintoticamente estável é estável no sentido BIBO mas o contrário não é verdade. Por exemplo para um sistema redutível de segunda ordem (um pólo e um zero no mesmo ponto em  $s$ ) do tipo:

$$G(s) = \frac{s+a}{(s+a)(s+b)}$$

se  $a$  for negativo e  $b$  positivo o sistema é estável no sentido BIBO mas não o é no sentido assintótico pois a equação característica possui um pólo com parte real positiva.

**[ nota ]** A localização dos zeros no plano não contribui para a estabilidade dos sistemas. No entanto existem designações distintas para sistemas com todos os zeros no semi-plano direito e sistemas com, pelo menos, um zero no semi-plano esquerdo. Aos sistemas do primeiro tipo são chamados de sistemas de fase mínima e aos segundos de sistemas de fase não-mínima.

### 1.1.2 Figuras de Mérito em Sistemas de Controlo

Em última análise, o projecto de um sistema de controlo prende-se com a satisfação, por parte do sistema, de um conjunto de especificações de desempenho. Algebricamente, as especificações de desempenho são as limitações feitas sobre as funções matemáticas que descrevem as

características do sistema. Essas limitações irão reflectir-se em variações num conjunto de característica no que diz respeito ao comportamento do sistema.

O comportamento do sistema pode ser avaliado em dois domínios distintos:

- Domínio do tempo e
- Domínio da frequência.

No primeiro as figuras de mérito são expressas em função do tempo e no segundo, como o próprio nome indica, são definidas em função da frequência. As características, que um dado sistema deve exibir, podem ser definidas em um ou em ambos os domínios. Normalmente o seu conjunto especifica três figuras de mérito fulcrais em sistemas dinâmicos:

- Velocidade de resposta;
- Estabilidade (relativa);
- Erro admissível em regime permanente.

Nas três secções que se seguem apresentam-se os critérios de desempenho mais comuns no contexto do controlo de sistemas.

### 1.1.2.1 Critério de Desempenho em Estado Estacionário

O desempenho em regime permanente, em termos de erro de estado estacionário, é uma medida da precisão do sistema quando referido a uma entrada específica. Por norma três tipos de entrada são considerados:

- Degrau unitário (sinal de excitação de ordem zero)
- Rampa (sinal de excitação de primeira ordem)
- Parábola (sinal de excitação de segunda ordem)

O primeiro afere a capacidade do sistema reagir a variações bruscas do sinal de referência, e os restantes a capacidade do sistema seguir trajectórias. No domínio do tempo e da frequência os três sinais acima citados possuem a seguinte representação matemática:

	<b>Degrau</b>	<b>Rampa (inclinação <math>m</math>)</b>	<b>Parábola</b>
<b>Tempo</b>	$r(t) = u(t)$	$r(t) = m \cdot t \cdot u(t)$	$r(t) = \frac{1}{2} t^2 u(t)$
<b>Frequência</b>	$R(s) = \frac{1}{s}$	$R(s) = \frac{m}{s^2}$	$R(s) = \frac{1}{s^3}$

O **erro em regime permanente** ( $e_{ss}$ ) é a diferença entre o valor da amplitude, em regime permanente, da amplitude do sinal de entrada face ao sinal de saída. Para sistemas estáveis este valor é determinado recorrendo ao teorema do valor final. Este tema voltará a ser abordado na secção §1.1.8.2.

[ nota ] Teorema do valor final.

O valor final da função  $f(t)$ , cuja transformada de Laplace é  $F(s)$ , é:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

*Exemplo:* Cálculo do erro em regime permanente, face a um degrau unitário, para um sistema de primeira ordem do tipo:

$$G(s) = \frac{\alpha}{s+a}$$

do enunciado sabe-se que,

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\alpha}{s+a}, U(s) = \frac{1}{s} \text{ e o erro é dado por } E(s) = U(s) - Y(s)$$

como

$$Y(s) = \frac{\alpha}{s(s+a)} \text{ e}$$

$$E(s) = \frac{1}{s} - \frac{\alpha}{s(s+a)} = \frac{1}{s} \left( 1 - \frac{\alpha}{s+a} \right)$$

então o erro em regime permanente é dado por:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = 1 - \frac{\alpha}{s+a} = \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{s+a-\alpha}{s+a} \right) = \frac{a-\alpha}{a} \text{ (se } a = \alpha \text{ então } e_{ss} \text{ é nulo)}$$

### 1.1.2.2 Especificações no Domínio do Tempo

As especificações no domínio do tempo são geralmente definidas em termos da resposta do sistema a um degrau unitário. Entre outros destacam-se os seguintes critérios de desempenho:

- *Tempo de Subida* ( $T_R$ ) - Tempo necessário para que a resposta do sistema, a um degrau unitário, cresça de 10% a 90% do seu valor em regime permanente. Tanto o tempo de subida como as três especificações que se seguem referem-se à medida da velocidade de resposta do sistema.

- *Tempo de Atraso* ( $T_D$ ) – Tempo necessário para que a resposta do sistema, a um degrau unitário, atinja 50% do seu valor em regime permanente.
- *Tempo de Estabelecimento* ( $T_S$ ) – Tempo necessário para que a resposta, a um degrau unitário, atinja e permaneça dentro de uma percentagem especificada do seu valor em regime permanente (normalmente  $\pm 1\%$ ,  $\pm 2\%$  ou  $\pm 5\%$ ).
- *Constante de Tempo (Predominante)* ( $\tau$ ) – Refere-se a uma medida alternativa do tempo de estabelecimento. Para um sistema estável de ordem superior a um refere-se ao tempo necessário para que a envolvente da resposta transitória atinja 63% do seu valor em regime permanente.
- *Sobre-elongação* ( $\delta_S$ ) – A sobre-elongação ou sobre-elevação é a diferença máxima entre as soluções transitória e de estado estacionário para uma entrada em degrau. Este critério é representativo da estabilidade relativa e normalmente é apresentado em termos percentuais relativamente ao valor em regime permanente.

### 1.1.2.3 Especificações no Domínio da Frequência

Entre outras, definem-se as seguintes especificações no domínio da frequência:

- *Margem de Ganho* ( $G_m$ ) e *Margem de Fase* ( $P_m$ ) – Definem um critério para a medida da estabilidade relativa do sistema.
- *Largura de Banda* ( $BW$ ) – É uma medida da velocidade de resposta do sistema e é frequentemente definida como a faixa de frequências sobre a qual o ganho não difere em mais de -3dB do seu valor a uma frequência especificada.
- *Pico de Ressonância* ( $M_r$ ) – É uma medida da estabilidade relativa e refere-se ao valor máximo da magnitude da resposta em frequência de malha fechada. Este critério está intimamente ligado à margem de fase recorrendo-se, frequentemente, à seguinte aproximação [6]:

$$M_r \approx \frac{1}{2 \cdot \sin(P_m/2)}$$

[ nota ]

Devido ao facto dos modelos utilizados no projecto de sistemas de controlo serem apenas aproximações, não é suficiente para garantir a estabilidade de um sistema que os pólos de malha fechada estejam no semi-plano direito. Assim, se o sistema é estável pretende-se saber, de modo a projectar um sistema de controlo robusto, quão perto está da instabilidade. Sistemas estáveis com baixas margens de estabilidade apenas funcionam em simulação (o mais provável é que, na prática, o sistema seja instável) [6]. Tipicamente os sistemas são destabilizados quando o ganho excede um determinado limite ou existe demasiado atraso de fase. Estas tolerâncias de ganho e fase são designadas por margens de ganho e margens de fase.

A *margem de ganho* é definida como a grandeza do inverso da função de transferência (malha aberta) avaliada à frequência  $\omega_\pi$  na qual o ângulo de fase é  $-180^\circ$  (frequência de cruzamento de fase), i.e.

$$G_m = |G(j\omega)|^{-1} \Big|_{\omega=\omega_\pi}$$

Por outro lado, a *margem de fase* é definida como  $180^\circ$  mais o ângulo de fase da função de transferência (malha aberta) á frequência  $\omega_{gc}$  em que o ganho é unitário (frequência de cruzamento de ganho), i.e.

$$P_m = 180 + \arg(G(j\omega)) \Big|_{\omega=\omega_{gc} (\omega: |G(j\omega)|=1)}$$

*Empiricamente*, é desejável que a margem de fase de um sistema esteja entre os  $45^\circ$  e os  $60^\circ$  e a margem de ganho entre 2 e 4, i.e.

$$45^\circ < P_m < 60^\circ \quad e \quad 6dB < G_m < 12dB$$

Quando a resposta em frequência de malha aberta produz um deslocamento de fase de  $-180^\circ$  existe o risco de instabilidade se o ganho for superior à unidade. Mais concretamente o sistema é instável em malha fechada se:

$$G_m < 0 \quad e \quad P_m \leq 0$$

Em algumas circunstâncias as margens de ganho e fase não podem ser usadas como indicadores da estabilidade de um sistema. Por exemplo em sistemas de primeira e segunda ordem a fase nunca atravessa a linha dos  $180^\circ$  logo a margem de ganho é sempre infinita.

### 1.1.3 Sistemas de Primeira Ordem em Malha Aberta

A compreensão do comportamento, tanto no domínio do tempo como da frequência, de sistemas de primeira e segunda ordem é muito importante para a análise e projecto de sistemas de controlo. Isto porque muitos dos sistemas físicos possuem comportamentos que podem ser aproximados a sistemas de primeira ou segunda ordem.

Um sistema de primeira ordem possui apenas um pólo e a função de transferência genérica é:

$$G(s) = \frac{a}{s + a} \quad (7)$$

onde o pólo se situa em  $s = -a$ . Por sua vez a resposta deste sistema a um impulso é,

$$h(t) = a \cdot e^{-at} u(t) = a \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} u(t) \quad (8)$$

Desta última relação tira-se que a constante de tempo de um sistema de primeira ordem é igual ao inverso do valor absoluto do pólo. Por outro lado, a sua largura de banda é igual á magnitude do pólo, i.e.  $BW = |a|$ .

Deste modo pode concluir-se que, num sistema de primeira ordem,  $\tau = BW^{-1}$  o que significa que quanto maior for a largura de banda, menor será a constante de tempo e logo mais rápida é a resposta do sistema.

Relativamente a alguns dos critérios de desempenho abordados na secção §1.1.2.2 é fácil verificar que, num sistema de primeira ordem, o tempo de subida é, aproximadamente igual a:

$$T_R = 2.2 \cdot \tau$$

e o tempo de atraso aproximadamente igual a,

$$T_D \approx 0.69 \cdot \tau$$

### 1.1.4 Sistemas de Segunda Ordem em Malha Aberta

As funções de transferência de segunda ordem são de primordial importância no projecto de sistemas de controlo dado que as especificações (i.e. os

critérios de desempenho a satisfazer) são normalmente fornecidas assumindo que o sistema é de segunda ordem. A função de transferência canónica para um sistema de segunda ordem possui o seguinte aspecto:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (9)$$

onde  $\omega_n$  é designado por frequência natural não amortecida e  $\zeta$  (zeta) por razão de amortecimento.

É fácil verificar que os dois pólos deste tipo de funções de transferência estão localizados em:

$$s = -\zeta\omega_n \pm j \cdot \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} = \sigma \pm j\omega_d \quad (10)$$

onde  $\omega_d$  é designada por frequência natural amortecida.

Dependendo da razão de amortecimento o sistema pode possuir:

- Dois pólos reais puros distintos ( $\zeta > 1$ ) - *sistema sobre-amortecido*
- Dois pólos reais idênticos ( $\zeta = 1$ ) - *sistema criticamente amortecido*
- Dois pólos complexos conjugados ( $0 < \zeta < 1$ ) - *sistema sub-amortecido*.

A figura que se segue ilustra a posição dos pólos de um sistema de segunda ordem, na forma canónica, em função do factor de amortecimento. É de notar que, para valores de  $\zeta$  inferiores a zero, os pólos do sistema ocorrem no semi-plano direito indicando um sistema instável.

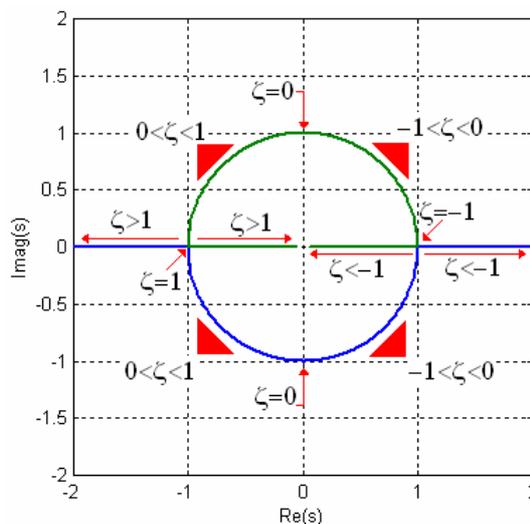


Fig 4. Localização dos pólos de um sistema de segunda ordem em função de  $\zeta$

[ nota ] Como se verá adiante, existe uma relação estreita entre a margem de fase e o factor de amortecimento em malha fechada ( $\zeta_{cl}$ ). Assim, se  $\zeta_{cl} < 0$  a margem de fase é negativa o que implica instabilidade do sistema em malha fechada.

Ainda para sistemas de segunda ordem apresenta-se, de seguida, um conjunto de relações funcionais que permitem constituir o valor numérico para alguns dos critérios de desempenho estabelecidos em §1.1.2.2 e §1.1.2.3 :

▪ **Percentagem de sobre-elongação**

$$\delta_s = 100 \cdot e^{\left( \frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} \right)} \quad (11)$$

▪ **Tempo de estabelecimento**

$$T_s(\pm 1\%) = \frac{4.6}{|\sigma|} \text{ ou } T_s(\pm 2\%) = \frac{4}{|\sigma|} \quad (12)$$

▪ **Constante de Tempo Predominante**

$$\tau = 1/|\sigma| \quad (13)$$

▪ **Largura de Banda**

A largura de banda depende da frequência natural e de  $\zeta$  :

$$BW = \omega_n \left[ 1 - 2\zeta^2 + (2 - 4\zeta^2 + 4\zeta^4)^{1/2} \right]^{1/2} \quad (14)$$

No entanto, para  $0.3 < \zeta < 1$ ,  $BW \approx \omega_n [1.85 - 1.19 \cdot \zeta]$ .

[ nota ] Frequentemente o projecto de sistemas de controlo assume que a largura de banda pode ser aproximado por  $\omega_n$ , i.e.  $BW = \omega_n$ .

▪ **Pico de Ressonância**

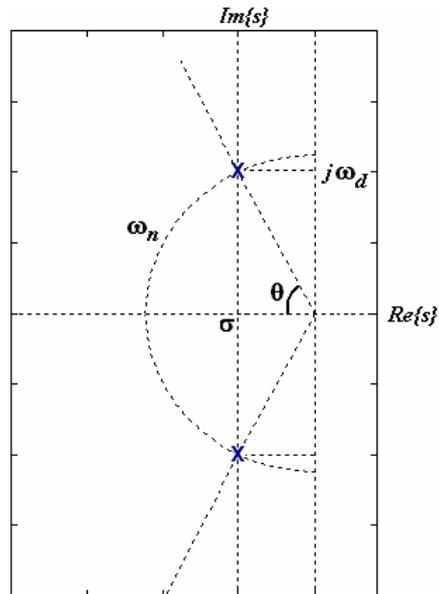
Em sistemas de segunda ordem o pico de ressonância está fortemente ligado ao coeficiente de amortecimento sendo válida a aproximação:

$$M_r = |G(j\omega)|_{@ \omega = \omega_n} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \text{ para } \zeta < \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (15)$$

**1.1.4.1 Localização dos Pólos e Resposta Transitória**

Considere-se um par de pólos genéricos de um sistema de segunda ordem como os fornecidos pela expressão {10}. Geometricamente, no plano  $s$ , cada

um dos coeficientes da igualdade refere-se às características apontadas na figura que se segue.



**Fig 5. Localização do pólos em função dos parâmetros  $\{\sigma, \omega_d, \omega_n, \zeta\}$**

A alteração da localização dos dois pólos implica obviamente uma alteração da resposta do sistema. O efeito, na resposta do sistema a um degrau unitário, face à variação de cada um dos parâmetros  $\{\sigma, \omega_d, \omega_n, \zeta\}$  pode ser sumariada da seguinte forma:

- O tempo de estabelecimento é inversamente proporcional a  $\sigma$
- O tempo de subida é inversamente proporcional ao módulo do vector pólo, i.e. inversamente proporcional a  $\omega_n$ .
- A sobre-elongação é directamente proporcional a  $\theta$  onde  $\theta = \cos^{-1}(\zeta)$
- O tempo de pico é inversamente proporcional a  $\omega_d$
- A largura de banda é proporcional a  $\omega_n$

### 1.1.5 Redução da Ordem de Sistemas

Frequentemente os modelos matemáticos dos sistemas são equações diferenciais de ordem superior a dois. Contudo, muitas vezes, estes modelos podem ser aproximados por equações diferenciais de menor ordem se a perda de informação relativa a essa simplificação não for relevante. A simplificação normalmente levada a cabo consiste na eliminação, no modelo, de modos do sistema com baixa influência na resposta transitória global. A influência de um

pólo particular (ou par de pólos complexos) sobre a resposta é determinada, principalmente, por dois factores:

- A parte real do pólo;
- Grandeza relativa do resíduo no pólo.

A parte real do pólo determina a taxa, segundo a qual, o termo transitório devido a esse pólo decai. Quanto maior for o seu valor absoluto mais acentuada é a taxa de decaimento da componente transitória devido a esse pólo.

Por outro lado a grandeza relativa do resíduo, i.e. o coeficiente associado à exponencial *decrecente* no tempo, determina a percentagem da resposta total devida a esse pólo em particular. A grandeza relativa do resíduo associado a um determinado pólo pode ser reduzida drasticamente devido à presença de um zero geometricamente próximo.

Por norma um pólo, ou par de pólos, considera-se não dominante se estes se situam muito à esquerda, no plano  $s$ , dos pólos considerados dominantes (por exemplo uma década ou mais).

[ nota ] Uma década refere-se a uma razão entre frequências igual a 10 (i.e. dez vezes superior ou inferior). Uma especificação alternativa consiste em exprimir a relação em oitavas (i.e. duas vezes superior ou inferior).

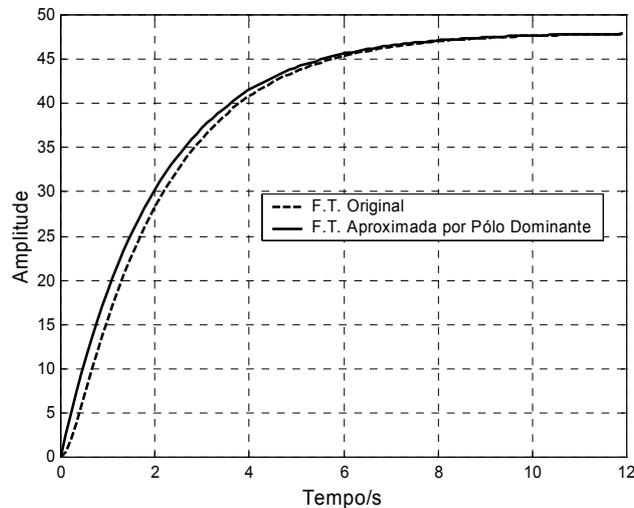
Após a remoção de um ou mais pólos/zeros, o ganho DC da função de transferência deve ser reescalado por forma a que ambas as funções de transferência (primordial e reduzida) exibam o mesmo ganho. De modo a ilustrar o que acabou de ser dito considere-se o sistema:

$$G(s) = \frac{120}{(s+0.5)(s+5)}$$

Este possui dois pólos, um em  $s = -0.5$  e o outro em  $s = -5$  e o ganho DC é 48. Como a resposta transitória relativa ao pólo em  $-5$  decai 10 vezes mais rápido do que a relativa ao pólo em  $-0.5$ , podemos tentar aproximar a função de transferência de 2ª ordem a uma função de 1ª ordem com o seguinte aspecto.

$$G(s) = \frac{24}{s+0.5} \quad (\text{note-se o escalonamento do ganho à frequência zero!})$$

De modo a analisar o comportamento transitório resultante da simplificação efectuada apresenta-se na figura subsequente a resposta ao degrau para ambas as funções de transferência.

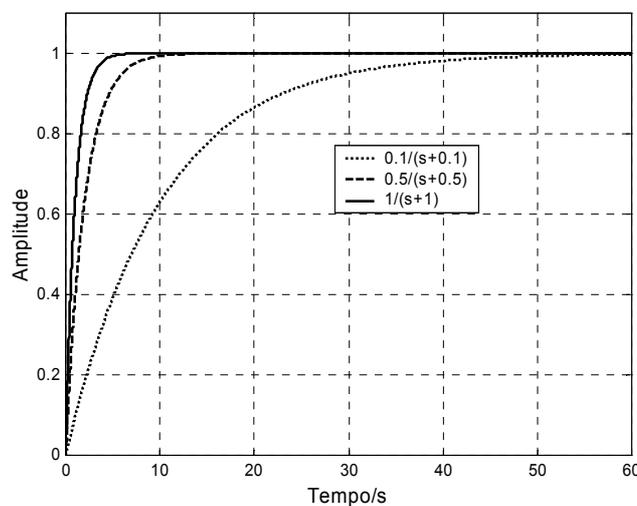


**Fig 6. Resposta ao degrau do sistema original e reduzido**

Como se pode verificar o comportamento de ambos os sistemas é muito próximo possuindo alguma discrepância apenas na parte transitória inicial.

### 1.1.6 Imunidade ao Ruído Vs. Largura de Banda

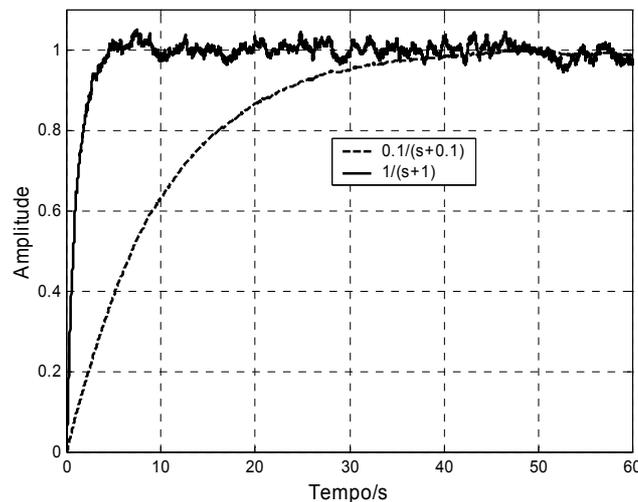
Num sistema, quanto mais afastados estiverem os pólos dominantes da origem maior é a sua largura de banda, i.e. o seu tempo de resposta diminui e a resposta do sistema aproxima-se do sinal de entrada. Por forma a ilustrar o que foi dito atenda-se à seguinte figura.



**Fig 7. Resposta ao degrau de três sistemas de primeira ordem**

*Neste contexto pretende-se que o sistema possua a maior largura de banda possível certo?*

Imagine-se agora a resposta de dois sistemas de primeira ordem, um com um pólo em 0.1 e outro com um pólo em 1, a um degrau contaminado com ruído branco (sinal aleatório com densidade espectral plana)



**Fig 8. Resposta de dois sistemas de primeira ordem a um degrau contaminado com ruído branco (na simulação efectuada a relação sinal ruído é de, aproximadamente, 6dB)**

Da análise à figura 8 verifica-se que o sistema mais rápido possui, no entanto, menor imunidade ao ruído. Assim, existe um claro compromisso entre velocidade de resposta e imunidade ao ruído.

### 1.1.7 Linearização de Sistemas

Todas as técnicas de análise e projecto propostas neste capítulo partem da proposição de que o sistema é linear. Isto porque no domínio clássico, as ferramentas, tanto de análise como síntese, assentam no tratamento matemático de equações diferenciais lineares. Este facto deve-se à mais fácil e rápida manipulação das equações diferenciais lineares quando comparada com o tratamento numérico (imagine-se sem computadores digitais!) de modelos não lineares. Contudo, na realidade, não existem sistemas lineares: mais não seja, um sistema físico está sempre condicionado por fenómenos não-lineares de saturação.

No entanto, frequentemente, um sistema físico opera apenas em torno de um

determinado ponto de funcionamento e, dentro dessa gama dinâmica de operação, o comportamento do sistema é, aproximadamente, linear. Dado que o objectivo de um sistema de controlo é manter as variáveis do processo o mais perto possível de um ponto de equilíbrio, frequentemente um compensador pode ser projectado considerando o sistema linear se a zona de funcionamento puder ser linearizada, i.e. o modelo linear e os métodos de análise linear são usados apenas para o projecto do sistema na região (*quasi*) linear.

[ nota ] Uma vez o sistema de controlo sintetizado é aconselhável levar a cabo uma simulação numérica do sistema com todas as suas não-linearidades de modo a validar o desempenho.

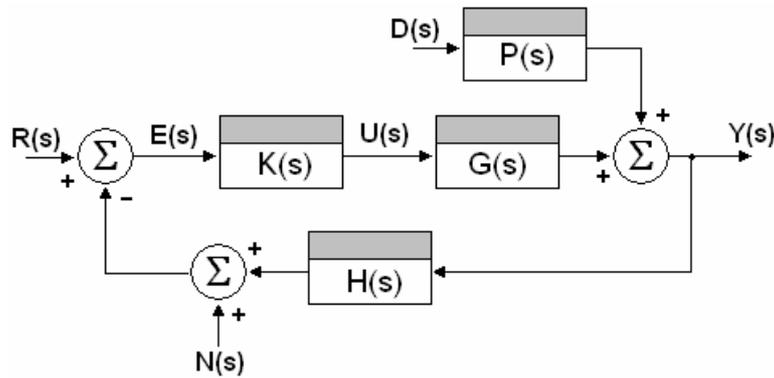
A linearização pode ser encarada como o processo de encontrar um modelo linear que aproxima um não linear. Esta pode ser feita de várias formas dependendo da existência ou não de um modelo matemático do sistema. No caso afirmativo, a linearização pode ser levada a cabo expandindo os termos não lineares em série de Taylor e negligenciando aqueles de ordem superior à unidade. Alternativamente este procedimento pode ser feito a partir de dados obtidos experimentalmente, i.e. a partir dos dados colhidos de um sistema não-linear, e atendendo a que o sistema controlado em malha fechada se mantém próximo de um dado ponto de funcionamento, por técnicas de identificação de sistemas ou mesmo graficamente desenvolve-se um modelo linear válido em torno do ponto de operação considerado [6].

### 1.1.8 Sistemas Realimentados

Um sistema de controlo em malha aberta apenas possui um comportamento adequado se:

- O modelo do sistema é exacto.
- Não existirem perturbações externas.
- Se os parâmetros do sistema variam de uma maneira determinística.

Como estas condições raramente se verificam, a maior parte dos sistemas recorrem a controlo por realimentação. Um sistema simples realimentado pode ser modelado pelo seguinte diagrama de blocos:



**Fig 9. Diagrama de blocos de um sistema de controlo realimentado**

Onde  $R(s)$  se refere ao sinal de referência que o sistema deve seguir,  $E(s)$  o sinal de erro,  $U(s)$  o sinal de saída do controlador  $K(s)$ ,  $Y(s)$  o sinal de saída e  $N(s)$  ruído de medida introduzido pelos sensores (normalmente aleatório de alta-frequência). A função de transferência  $G(s)$  diz respeito ao sistema a controlar,  $P(s)$  às perturbações  $D(s)$  e  $H(s)$  é a função de transferência do sensor (ou algum tipo de compensação por realimentação). Adicionalmente, em algumas circunstâncias, verifica-se a existência de um pré-filtro após o sinal  $R(s)$  cujo objectivo é o de anular o efeito de alguns dos zeros da função de transferência de malha fechada.

O projecto de alguns dos blocos da configuração da figura 9 (nomeadamente o de  $K(s)$ ) deve fazer com que, em termos globais, o comportamento do sistema exhiba as características desejadas. Mais concretamente o sistema deve ser capaz de:

- Seguir o sinal de referência com o menor erro possível.
- Rejeitar perturbações e sinais de erro.

Ainda, e antes de seguir em frente, recapitula-se alguma da nomenclatura associada aos diagramas de blocos de sistemas de controlo. Assim, e tendo presente o diagrama apresentado na figura 9, apresentam-se as seguintes definições:

- $K(s)G(s)$  – função de transferência directa
- $K(s)G(s)H(s)$  – função de transferência de malha aberta
- $Y(s)/R(s) = \frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)H(s)}$  – função de transferência de malha fechada

[ nota ] Se bem que, em termos de senso comum, a F.T. de M.A. devesse ser  $K(s)G(s)$  na verdade, e considerando  $H(s)$  como sendo o elemento sensor, a forma como é medido o parâmetro de saída do sistema é considerado como inerente ao próprio sistema, i.e. a dinâmica da estratégia de sensorização não pode ser separada da dinâmica do próprio sistema.

[ nota ] Ainda relativamente às margens de estabilidade atenda-se à função de transferência de malha fechada. Observa-se que, para uma dada frequência, a magnitude da função de transferência é infinita se o ganho de malha aberta for igual a -1 ao que corresponde, em termos de Bode, a uma magnitude de 0dB e a uma fase de  $-180^\circ$ . É decorrente deste conceito que, a partir da resposta em frequência de malha aberta se conclui quanto à estabilidade em malha fechada.

### 1.1.8.1 Sensibilidade de Sistemas em Malha Fechada

Como já foi dito, um sistema em malha fechada possui maior imunidade às variações da dinâmica do sistema, i.e. possui a capacidade de lidar com variações nos parâmetros do sistema. De modo a validar o que acabou de ser dito considere-se um sistema de controlo com realimentação unitária como se mostra na figura que se segue.

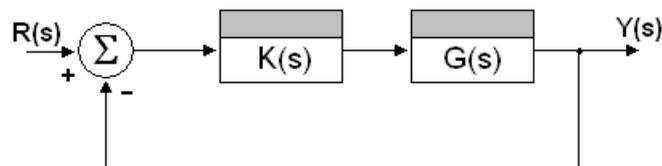


Fig 10. Sistema em malha fechada com realimentação unitária.

A função de transferência de malha fechada possui a seguinte expressão:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = T(s) = \frac{K(s)G(s)}{1 + K(s)G(s)} \quad (16)$$

Avaliemos agora a sensibilidade da função de transferência de malha fechada relativamente a variações no sistema. Para isso calculemos  $\partial T(s)/\partial G(s)$

$$\frac{\partial T(s)}{\partial G(s)} = \frac{K(s)(1 + K(s)G(s)) - K^2(s)G(s)}{(1 + K(s)G(s))^2} = \frac{K(s)}{(1 + K(s)G(s))^2} \quad (17)$$

Multiplicando e dividindo por  $G(s)$  vêm:

$$\frac{\partial T(s)}{\partial G(s)} = \frac{K(s)G(s)}{G(s)(1+K(s)G(s))^2} = T(s) \frac{1}{G(s)(1+K(s)G(s))} \quad (18)$$

O que leva a que a variação relativa da F.T. de malha fechada face a uma variação relativa da dinâmica do processo seja dada pela seguinte expressão:

$$\frac{\partial T(s)}{T(s)} = \frac{1}{(1+K(s)G(s))} \cdot \frac{\partial G(s)}{G(s)} \quad (19)$$

De onde se conclui que a função de transferência em malha fechada é insensível a variações na função de transferência do processo para as frequências às quais a função de transferência de malha aberta é elevada, i.e. se

$$K(s)G(s) \Big|_{s=s_0} \rightarrow \infty \quad (20)$$

então

$$\frac{\partial T(s)}{T(s)} \Big|_{s=s_0} \rightarrow 0 \quad (21)$$

Deste modo, para o projecto de um controlador robusto (i.e. insensível a variações na dinâmica do sistema), é necessário encontrar  $K(s)$  de modo a que, a magnitude da função de transferência de malha aberta, seja elevada para as frequências às quais existem variações significativas na função de transferência do sistema.

Outra das particularidades de um sistema de controlo em malha fechada tem a ver com a sua capacidade de contornar o efeito de perturbações na variável controlada. De facto, analisando o efeito de  $D(s)$  na saída do sistema da figura 9 (considerando realimentação unitária e nulos os sinais  $R(s)$  e  $N(s)$ ), vêm que

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = S(s) = \frac{P(s)}{1+G(s)K(s)} \quad (22)$$

Esta expressão refere-se à chamada função de sensibilidade. Verifica-se assim que, para reduzir a influência de perturbações, a função de sensibilidade deve fornecer valores baixos para as frequências presentes na perturbação. O mesmo é dizer que, considerando  $P(s)$  constante e igual a um, a função de transferência de malha aberta deve possuir um ganho o mais elevado possível na gama de frequências da perturbação.

O mesmo raciocínio pode ser levado a cabo atendendo agora ao erro de medida. Ainda tendo como base a imagem da figura 9, considerando realimentação unitária e os sinais  $R(s)$  e  $D(s)$  nulos, a influência do erro de medida no sinal de saída é modelado pela seguinte função de transferência:

$$\frac{Y(s)}{N(s)} = -\frac{G(s)K(s)}{1+G(s)K(s)} \quad (23)$$

Assim, para reduzir a influência do erro de medida, a função de transferência de malha fechada deve fornecer valores baixos para a gama de frequências presentes no ruído.

Para concluir note-se que, de modo a minimizar o erro no seguimento da referência, a função de transferência de malha fechada deve ser constante e estar perto da unidade para a gama de frequências presentes no sinal de referência [8]. Deste modo, e tendo em consideração a sensibilidade do sistema em malha fechada em função dos sinais de perturbação e ruído, verifica-se que existe compatibilidade entre o critério de seguimento de referência e a rejeição de perturbações. No entanto existe incompatibilidade entre este objectivos e a redução do erro de medida.

### 1.1.8.2 Erro em Regime Permanente

No projecto de muitos sistemas de controlo um dos critérios impostos tem a ver com a resposta, em estado estacionário, do sistema. Para um sistema estável, em malha fechada, o nível do sinal de saída do sistema,  $y(t)$ , tende a estar, em regime permanente, o mais próximo possível da magnitude do sinal de comando  $r(t)$ . A diferença entre esses dois valores é designada por erro em regime permanente, i.e.,

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [r(t) - y(t)] \quad (24)$$

ou, alternativamente, no domínio de Laplace,

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s [R(s) - Y(s)] \quad (25)$$

#### 1.1.8.2.1 Sistema com Realimentação Unitária

Para o caso de um sistema com realimentação unitária, como aquele apresentado na figura 10, o erro em regime permanente pode ser determinado a partir da função de transferência em malha aberta,

$$E(s) = R(s) - Y(s) = R(s) - K(s)G(s)E(s) = R(s) - G_{OL}(s)E(s) \quad (26)$$

Resolvendo em ordem a  $E(s)$  fica,

$$E(s) = \frac{1}{1 + G_{OL}(s)} R(s) \quad (27)$$

Aplicando o teorema do valor final,

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G_{OL}(s)} \quad (28)$$

Para um sinal de excitação polinomial de grau  $k$  do tipo,

$$R(s) = \frac{1}{s^{k+1}}, \forall k \in \mathbb{N}_0^+ \quad (29)$$

A expressão do erro em regime permanente toma o seguinte aspecto:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{(1 + G_{OL}(s))s^k} \quad (30)$$

Considerando que o sistema é de tipo  $l$  e possui função de transferência com a forma;

$$G_{OL}(s) = \frac{N(s)}{s^l \cdot D(s)} \quad (31)$$

verifica-se, substituindo {31} em {30}, que:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^l D(s)}{(s^l D(s) + N(s))s^k} \quad (32)$$

Da análise à expressão anterior é possível tecer as seguintes conclusões:

- Se  $l > k$  o erro em regime permanente é nulo.
- Se  $l < k$  o erro em regime permanente é infinito.
- Se  $l = k$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{\left(1 + \frac{N(s)}{s^l D(s)}\right)s^l} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{(1 + G_{OL}(s))s^l} \quad (33)$$

Os sistemas de tipo 0, I e II são os mais comuns assim como os sinais de excitação de grau 0, I e II (degraus, rampas e parábolas). Na tabela que se segue resumem-se os valores de  $e_{ss}$  para todas as combinações entre esses três pares de casos.

	Grau 0	Grau 1	Grau 2
Tipo 0	$1/(1+K_p)$	$\infty$	$\infty$
Tipo I	0	$1/K_v$	$\infty$
Tipo II	0	0	$1/K_A$

**Tabela 1. Erros em regime permanente em função do tipo de sistema e sinal de excitação (para realimentação unitária)**

Nesta as constantes  $K_p$ ,  $K_v$  e  $K_A$  são designadas por constantes de posição, velocidade e aceleração respectivamente. Estas constantes são calculadas atendendo-se às seguintes relações (derivadas da equação {32}):

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G_{OL}(s), \quad K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG_{OL}(s) \quad \text{e} \quad K_A = \lim_{s \rightarrow 0} s^2G_{OL}(s)$$

[ nota ] Frequentemente, o erro em regime permanente de um sistema face a uma entrada em degrau, rampa ou parábola é chamado de erro de posição, velocidade e aceleração respectivamente.

### 1.1.8.2.2 Sistema com Realimentação Não-Unitária

Para o caso de um sistema genérico com função de transferência na malha de realimentação igual a  $H(s)$  (como aquele ilustrado na figura 9), o erro em regime permanente pode ser determinado a partir da seguinte relação,

$$E(s) = R(s) - Y(s) = R(s) - \frac{K(s)G(s)}{1 + K(s)G(s)H(s)} R(s) = R(s) - G_{CL}(s)R(s) \quad (34)$$

ou seja,

$$E(s) = (1 - G_{CL}(s))R(s) \quad (35)$$

Aplicando o teorema do valor final, e para um sinal de excitação de grau  $k$ , a expressão do erro em regime permanente toma o seguinte aspecto:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1 - G_{CL}(s)}{s^{k+1}} \quad (36)$$

## 1.1.9 Sistemas de Primeira Ordem em Malha Fechada

Considere-se o sistema de 1ª ordem (causal e estável) na forma:

$$\kappa G(s) = \frac{\kappa}{s + a} \quad (37)$$

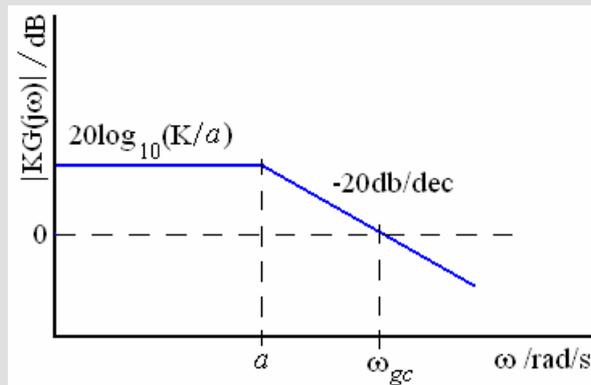
Como já se viu anteriormente, a largura de banda do sistema é igual à magnitude do pólo. Adicionalmente, e para  $\kappa/a > 1$ , a frequência de cruzamento do ganho em malha aberta é  $\omega_{gc} = \kappa$ .

[ demonstração ]

Recorrendo aos diagramas de Bode para,

$$\kappa G(j\omega) = \left(\frac{\kappa}{a}\right) \cdot \frac{1}{j(\omega/a) + 1}$$

Obtém-se o seguinte esboço assimpótico:



Como entre  $a$  e  $\omega_{gc}$  existem  $\log_{10}(\omega_{gc}/a)$  décadas, a atenuação acima da frequência  $a$  é portanto  $-20 \cdot \log_{10}(\omega_{gc}/a)$ . Sabe-se que para  $\omega = \omega_{gc}$  a magnitude é de 0dB logo,

$$20 \log_{10}(\kappa/a) - 20 \log_{10}(\omega_{gc}/a) = 0$$

o que implica que  $\omega_{gc} = \kappa$  *c.e.d.*

Em malha fechada, com realimentação unitária, a função de transferência passa a ser:

$$\frac{\kappa G(s)}{1 + \kappa G(s)} = \frac{\kappa}{s + a + \kappa} \tag{38}$$

Mudando a parametrização vêm que:

$$\frac{\kappa G(j\omega)}{1 + \kappa G(j\omega)} = \left(\frac{\kappa}{\kappa + a}\right) \cdot \frac{1}{\frac{j\omega}{\kappa + a} + 1} \tag{39}$$

Da equação anterior pode concluir-se que, como  $\kappa/(\kappa + a)$  é inferior à unidade, a magnitude da resposta em frequência nunca cruza a linha dos 0dB (não existem picos de ressonância para sistemas de primeira ordem).

Adicionalmente, e relativamente ao sistema em malha aberta, verifica-se um aumento da largura de banda. Para valores elevados do ganho, a largura de banda de malha fechada é aproximadamente igual à frequência de cruzamento de ganho. Esta afirmação é validada através da figura que se segue.

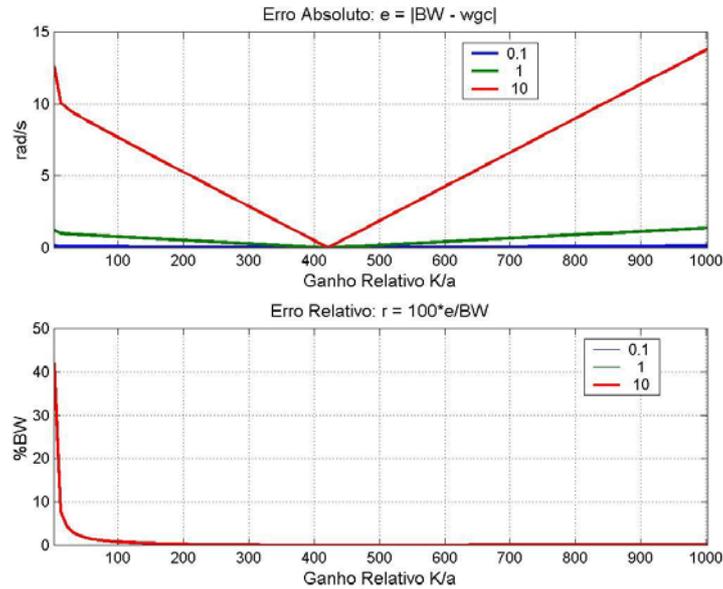


Fig 11. Erro relativo e absoluto da aproximação  $BW_{cl} \approx \omega_{gc}$

Verifica-se assim que a aproximação  $BW_{cl} \approx \omega_{gc}$  é válida, dentro de uma tolerância de  $\pm 1\%$ , para valores de ganho DC de malha aberta superiores a 40dB. Ou seja, se o ganho for 100 vezes superior ao módulo do pólo, a relação em análise mantém-se dentro do limite estabelecido. Note-se no entanto que, para valores inferiores, o erro cometido na aproximação pode ser bastante elevado. Para os casos simulados um erro relativo em torno dos 45% foi obtido para o caso de um ganho relativo de 2, i.e.  $\kappa/a = 2$ .

### 1.1.10 Sistemas de Segunda Ordem em Malha Fechada

Considere-se o sistema de 2ª ordem (causal e estável) na forma canónica:

$$\kappa G(s) = \frac{\kappa \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2} \quad (40)$$

Em malha fechada, com realimentação unitária, a função de transferência é:

$$\frac{\kappa G(s)}{1 + \kappa G(s)} = \frac{\kappa \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2 + \kappa \omega_n^2} = \frac{\kappa \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + (\omega_n \sqrt{1 + \kappa})^2} \quad (41)$$

que pode ser rescrita como

$$\frac{\kappa G(s)}{1 + \kappa G(s)} = \frac{\kappa \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_{ncl}^2} = \frac{\kappa_{cl} \omega_{ncl}^2}{s^2 + 2\zeta_{cl} \omega_{ncl} s + \omega_{ncl}^2} \quad (42)$$

onde,

$$\omega_{ncl} = \omega_n \sqrt{\kappa + 1} \quad (43)$$

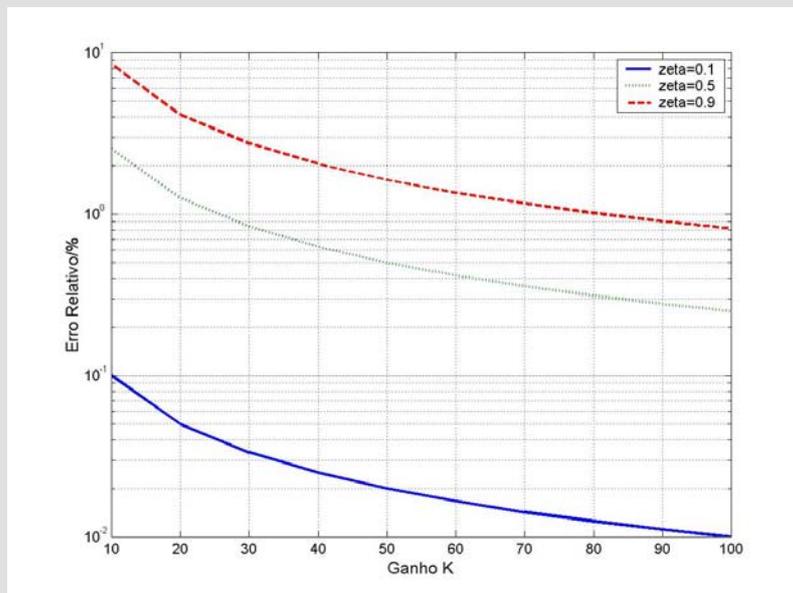
$$\zeta_{cl} = \frac{\zeta}{\sqrt{\kappa + 1}} \quad (44)$$

$$\kappa_{cl} = \frac{\kappa}{\kappa + 1} \quad (45)$$

- De {43} conclui-se que a largura de banda em malha fechada é superior à largura de banda do sistema em malha aberta ( $BW_{cl} \approx \omega_{ncl}$ ).
- De {44} conclui-se que o factor de amortecimento em malha fechada é inferior ao factor de amortecimento de malha aberta. Logo a sobre-elongação será superior.
- De {45} conclui-se que o ganho em malha fechada é inferior ao ganho em malha aberta e inferior à unidade.

**[ nota ]**

Para valores elevados de  $\kappa$ , a frequência de cruzamento de ganho,  $\omega_{gc}$ , é aproximadamente igual à frequência natural não amortecida de malha fechada, i.e.  $\omega_{gc} \approx \omega_{ncl}$ . Mais concretamente a aproximação é válida, com erro inferior a 10%, para valores de  $\kappa > 10$  e  $\zeta < 1$  como se ilustra na figura subsequente.



[ nota ]

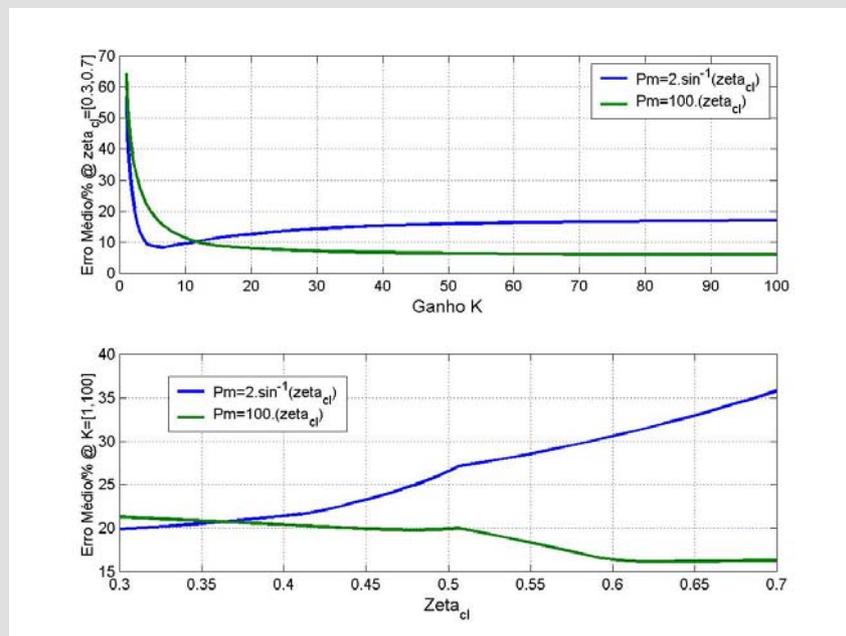
Como já se referiu anteriormente, existe uma relação estreita entre margem de fase e coeficiente de amortecimento de malha fechada. Uma relação aproximada é dada pela seguinte fórmula [14]:

$$P_m \approx 2 \cdot \sin^{-1}(\zeta_{cl}) \quad (1)$$

Outra aproximação, para margens de fase inferiores a 70°, consiste em [6],

$$\zeta_{cl} \approx \frac{P_m \text{ (em graus)}}{100} \quad (2)$$

A figura que se segue ilustra a qualidade de cada uma das aproximações.



Verifica-se que, para valores de ganho inferiores a 3, o erro relativo médio aumenta exponencialmente. Mais ainda, observa-se que a aproximação por (1) apenas produz resultados satisfatórios para ganhos entre 3 e 10. A partir desse ponto aconselha-se a utilização da relação (2).

### 1.1.11 Resposta de Malha Aberta Vs. Malha Fechada

As técnicas de projecto e análise clássicas partem da resposta do sistema em malha aberta tentando prever o seu comportamento em malha fechada. Se bem que apenas um juízo aproximado do comportamento, em malha fechada do sistema, possa ser feito a aproximação que se segue pode ser tida em consideração como auxiliar no projecto de sistemas de controlo.

Assim, considere-se um sistema com função de transferência directa  $G_D(s)$ . Avaliando-se  $G_D(s)$  ao longo do eixo  $j\omega$  obtém-se a resposta em frequência directa  $G_D(j\omega)$ . Em malha fechada, e considerando realimentação através de  $H(s)$ , a resposta em frequência será:

$$G_{CL}(j\omega) = \frac{G_D(j\omega)}{1 + G_D(j\omega)H(j\omega)} = \frac{G_D(j\omega)}{1 + G_{OL}(j\omega)} \quad (46)$$

Para valores de  $|G_{OL}(j\omega)| \gg 1$ ,

$$G_{CL}(j\omega) \approx \frac{G_D(j\omega)}{G_D(j\omega)H(j\omega)} = \frac{1}{H(j\omega)} = \frac{1}{|H(j\omega)|} e^{-j\angle H(j\omega)} \quad (47)$$

Verifica-se então que, para valores elevados de magnitude da função de transferência de malha aberta, a resposta em frequência de malha fechada possui magnitude aproximadamente igual à do inverso da função de transferência da realimentação e fase com sinal contrário. No caso particular de realimentação unitária ( $H(j\omega) = 1$ ) a magnitude da resposta em frequência em malha fechada é aproximadamente constante e igual a 0dB e a fase também constante e igual a 0°.

Por outro lado, para valores de  $|G_{OL}(j\omega)| \ll 1$ ,

$$G_{CL}(j\omega) \approx G_D(j\omega) \quad (48)$$

Verifica-se neste caso que a resposta em frequência de malha fechada é aproximadamente igual à resposta em frequência directa (tanto em magnitude como em fase).

Na vizinhança da frequência de cruzamento do ganho, (i.e. para  $|G_{OL}(j\omega)| \approx 1$ ) a magnitude da resposta em frequência de malha fechada depende fortemente da margem de fase. Decorrente deste facto, a relação entre a frequência de cruzamento de ganho e a largura de banda de malha fechada sofre um deslizamento que é tanto maior quanto menor for o valor de zeta de malha fechada. Assim, e de forma empírica, pode dizer-se que a largura de banda em malha fechada está, normalmente, balizada por valores entre uma a duas vezes a frequência de cruzamento do ganho, i.e.

$$\omega_{gc} \leq BW_{CL} \leq 2 \cdot \omega_{gc} \quad (49)$$

Mais concretamente, e segundo Franklin, *et. al* (1994), uma heurística útil para o projecto de sistemas de controlo consiste em considerar a largura de banda igual à frequência de cruzamento de ganho no caso de uma margem de fase de 90° ou uma largura de banda dupla da frequência de cruzamento de ganho no caso do sistema exibir, em malha aberta, uma margem de fase de 45°, i.e.

$$BW_{CL} = \omega_{gc} \Big|_{Pm=90^\circ} \text{ ou } BW_{CL} = 2\omega_{gc} \Big|_{Pm=45^\circ} \quad (50)$$

## 1.2 Projecto de Sistemas de Controlo

Nesta secção trata-se do projecto de controladores analógicos para sistemas lineares, invariantes no tempo, causais e de fase mínima. As técnicas utilizadas assentam, na sua grande parte, em duas vertentes: o lugar das raízes e os diagramas de Bode. Para além do facto da primeira ser uma técnica de análise e projecto no domínio do tempo e a segunda no domínio da frequência, uma das grandes diferenças entre ambas assenta no facto de, no caso do lugar de raízes, existir a necessidade de se possuir um modelo matemático que descreva de forma satisfatória o comportamento dinâmico do processo em estudo. Por outro lado, um diagrama de Bode pode ser obtido experimentalmente em laboratório e então ser utilizado para análise e síntese.

[ **nota** ] Não é demais reiterar que as técnicas de projecto clássicas se baseiam na utilização da função de transferência de malha aberta por forma a **prever** a resposta do sistema em malha fechada.

### 1.2.1 Lugar das Raízes

O lugar das raízes mostra a localização dos pólos de malha fechada em função da variação de um determinado parâmetro da função de transferência (normalmente, mas não exclusivamente, o ganho). Para além da possibilidade de se determinar a estabilidade e estabilidade relativa em malha fechada, o lugar das raízes é também uma ferramenta comum no projecto de controladores [4][10].

### 1.2.2 Diagramas de Bode

Em sistemas de controlo, os diagramas de Bode podem ser usados para

diversas finalidades entre as quais a determinação de algumas figuras de mérito ou o projecto de controladores. Adicionalmente, para a análise e projecto de sistemas de controlo, existem dois tipos de diagramas de Bode:

- Diagramas de malha aberta: Podem servir para,
  - Determinar margens de estabilidade relativa.
  - Determinar tipo de sistema (observando a inclinação da magnitude da resposta em frequência a baixas frequências)
  - Projecto de compensadores (controladores) – Devido à natureza aditiva dos diagramas, o efeito da associação de um determinado compensador pode ser facilmente determinado.
- Diagramas de malha fechada: Utilizados para,
  - Determinar a largura de banda (medida da resposta do sistema e da imunidade ao ruído)
  - Determinar a estabilidade relativa (o pico de ressonância no diagrama de Bode de malha fechada é um indicador fiável da estabilidade relativa)

### 1.2.3 Tipos de Controladores

Presentemente, e no domínio teórico ou académico, existe um sem número de tipos e estratégias de controlo. Como é obvio apenas é possível, devido às restrições impostas pelo programa, um breve tratamento de um número extremamente limitado de casos.

Assim sendo, neste documento, abordam-se os dois tipos mais comuns de controladores para a compensação de sistemas de controlo por realimentação.

Fala-se mais concretamente:

- Do controlador **PID** (proporcional, integral e derivativo) e
- Do compensador **Avanço/Atraso** de Fase (Lead/Lag)

As funções de transferência canónicas para cada um dos dois tipos de controladores são.

- **PID**  $K(s) = K_p + K_d s + \frac{K_i}{s}$
- **Avanço/Atraso**  $K(s) = \kappa \frac{aTs + 1}{Ts + 1}$  (avanço se  $|a| > 1$  ou atraso se  $|a| < 1$ )

Os controladores **PID** são o tipo de controladores mais utilizados na indústria de processos. Com três graus de liberdade, este controlador é capaz de satisfazer a maior parte das especificações que o sistema deve exibir em malha fechada (ex. margem de ganho, fase ou erro de estado estacionário).

Para além destes, e no domínio clássico, apresenta-se também um método algébrico de projecto designado por configuração por realimentação unitária (**UFC**). Este método consiste numa estratégia de posicionamento de pólos a partir da função de transferência de malha aberta e dos pólos desejados de malha fechada. Outras estratégias de compensação por posicionamento de pólos serão objecto de revisão no terceiro capítulo quando se tratar do controlo moderno de sistema.

### 1.2.4 Projecto por Posicionamento de Pólos

Mais uma vez, o objectivo de um sistema de controlo é o de moldar o comportamento natural de um sistema de modo a que um novo sistema, desenvolvido em torno do original, possua as características desejadas. Como se sabe existem muitas formas de o fazer. Uma das quais, e aquela de qual este documento se ocupa, é a realimentação negativa. Assim, considere-se o seguinte sistema com realimentação unitária:

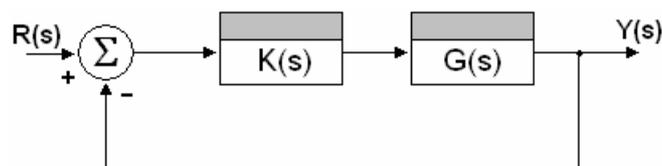


Fig 12. Sistema em M.F. com realimentação unitária.

Considerando a função de transferência do sistema  $G(s) = N(s)/D(s)$  e a função de transferência do compensador como  $K(s) = B(s)/A(s)$ , o objectivo do sistema de controlo é o de fazer com que, em malha fechada, o sistema exiba uma função de transferência cujo comportamento dinâmico seja o desejado, i.e. a função de transferência desejada deve ser do tipo  $G_{CL}(s) = P(s)/Q(s)$ .

Como a função de transferência do sistema é considerada fixa (de contrário envolveria a alteração física da planta) a manipulação da dinâmica é feita envolvendo a alteração do comportamento do compensador.

Como a função de transferência de malha fechada do sistema apresentado na figura 12 é:

$$G_{CL}(s) = \frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)} = \frac{B(s)N(s)}{A(s)D(s) + B(s)N(s)}$$

e dado que se pretende que o sistema exiba o comportamento ditado pela função de transferência  $G_{CL}(s)$  então a seguinte relação deve ser verificada:

$$\frac{B(s)N(s)}{A(s)D(s) + B(s)N(s)} = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

o que leva ao seguinte par de equações de projecto:

$$N(s)A(s) = P(s) \tag{51}$$

e

$$A(s)D(s) + B(s)N(s) = Q(s) \tag{52}$$

Note-se que o numerador é fixo por  $N(s)$  e  $B(s)$ . Isto porque  $N(s)$  é intrínseco ao sistema a controlar e  $B(s)$  depende da solução da equação {52}. Deste modo, e recorrendo a esta estratégia de projecto, apenas se possui controlo sobre os pólos do sistema não sendo possível o posicionamento dos zeros de malha fechada. Assim, e dado que a localização dos zeros também contribui para o comportamento dinâmico do sistema (por exemplo o erro em regime permanente), em geral não é possível validar todas as restrições impostas pela proposta de projecto.

Dado que, como já foi dito, a dinâmica do sistema original é considerada inalterável a equação {52} é do tipo,

$$a \cdot X + b \cdot Y = c \tag{53}$$

conhecida da teoria dos números como equação de *Diophantine*. Assim, o objectivo desta técnica de projecto passa então pela resolução de uma equação polinomial.

É de notar que, frequentemente, a solução da equação de *Diophantine* não é única. Mais ainda, por vezes o projecto resulta num compensador impróprio e logo irrealizável fisicamente. No entanto é possível garantir a existência de um controlador próprio de forma a garantir um posicionamento arbitrário dos pólos desde que se verifique a seguinte condição:

Se o sistema é de ordem  $n$ , estritamente próprio e irredutível, então existe um controlador de ordem  $n-1$  para um qualquer polinómio característico  $Q(s)$  de ordem  $2n-1$ .

A solução geral da equação de *Diophantine* é apresentada pelas expressões que se seguem considerando, para isso, as seguintes funções de transferência para o processo e controlador,

$$G(s) = \frac{N_n s^n + N_{n-1} s^{n-1} + \dots + N_0}{D_n s^n + D_{n-1} s^{n-1} + \dots + D_0} \quad (54)$$

$$K(s) = \frac{B_{n-1} s^{n-1} + B_{n-2} s^{n-2} + \dots + B_0}{A_{n-1} s^{n-1} + A_{n-2} s^{n-2} + \dots + A_0} \quad (55)$$

e considerando o polinómio característico de malha fechada da forma:

$$Q(s) = R_{2n-1} s^{2n-1} + \dots + R_1 s + R_0 \quad (56)$$

Multiplicando os termos apropriados e equacionando os coeficientes de potências idênticas leva ao seguinte conjunto de equações expresso de forma matricial,

$$S(N, D) \cdot X = R \quad (57)$$

onde,

$$S(N, D) = \begin{bmatrix} D_0 & N_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ D_1 & N_1 & D_0 & N_0 & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & D_1 & N_1 & \dots & 0 & 0 \\ D_n & N_n & \vdots & \vdots & \dots & D_0 & N_0 \\ 0 & 0 & D_n & N_n & \dots & D_1 & N_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & D_n & N_n \end{bmatrix} \quad (58)$$

é chamada matriz de *Sylvester* e possui ordem  $2n$ . Por outro lado  $X$  e  $R$  são vectores com a seguinte forma:

$$X = [A_0 \quad B_0 \quad A_1 \quad B_1 \quad \dots \quad A_{n-1} \quad B_{n-1}]^T \quad (59)$$

$$R = [R_0 \quad R_1 \quad R_2 \quad R_3 \quad \dots \quad R_{2n-2} \quad R_{2n-1}]^T \quad (60)$$

Por fim, os coeficientes da função de transferência do controlador são obtidos resolvendo a equação matricial,

$$X = S(N, D)^{-1} R \quad (61)$$

## 1.2.5 Sintonia de Controladores PID

Nesta secção apresentam-se algumas técnicas para o projecto de controladores de três termos vulgarmente designados por PID. O primeiro método apresentado é, subjacentemente, empírico e foi desenvolvido tendo por base a resposta livre ou forçada do sistema. Alternativamente apresenta-se também um método analítico de sintonia semelhante ao posicionamento de pólos revisto na secção §1.2.4. Métodos baseados na resposta em frequência também são possíveis e serão endereçados nos exercícios propostos.

### 1.2.5.1 Método de Ziegler e Nichols

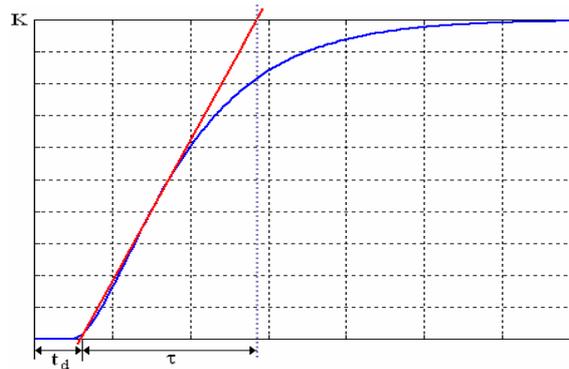
Um dos métodos para a sintonia de controladores PID recorre a um conjunto de regras empíricas propostas, em 1942, por Ziegler e Nichols. A partir da resposta ao degrau de um sistema em malha aberta ou avaliando a resposta do sistema em malha fechada no limite da instabilidade foi possível derivar um conjunto de heurísticas que tornaram fácil a sintonia de um regulador com três graus de liberdade. É de notar no entanto que, apesar de simples, um controlador sintonizado por este método não permite atingir um comportamento do sistema em malha fechada capaz de obedecer a requisitos específicos (ex. sobre-elongação, tempo de estabelecimento, etc.). No entanto, a sua grande vantagem prende-se com o facto de não ser necessário um modelo matemático do sistema para o processo de projecto (ao contrário da maior parte das técnicas). Derivado do trabalho de Ziegler e Nichols apresentam-se de seguida dois métodos para a sintonia de controladores para sistemas estáveis

#### 1.2.5.1.1 Método da Curva de Reacção

A primeira técnica deriva da observação da resposta ao degrau do sistema em malha aberta. No caso da resposta poder ser aproximada à de um sistema de primeira ordem com atraso puro no tempo obtém-se os seguintes pontos:

- Inclinação da recta tangente no ponto de inflexão da resposta;
- Intercepção dessa recta tangente com o eixo do tempo.

Como se pode observar da figura 13, a inclinação da tangente é obtida a partir de  $m = K/\tau$  e o atraso no tempo  $t_d$  a partir do ponto onde a recta cruza o eixo dos tempos.



**Fig 13. Procedimento para sintonia através da curva de reacção.**

A partir destes valores e recorrendo à tabela que se segue obtém-se os parâmetros de sintonia para o controlador PID.

	<b>Kp</b>	<b>Ki</b>	<b>Kd</b>
<b>P</b>	$1/(m \cdot t_d)$		
<b>PI</b>	$0.9/(m \cdot t_d)$	$0.3K_p/t_d$	
<b>PID</b>	$1.2/(m \cdot t_d)$	$K_p/(2 \cdot t_d)$	$0.5 \cdot K_p \cdot t_d$

**Tabela 2. Regras de sintonia de Ziegler-Nichols para o método da curva de reacção.**

É de notar que os critérios de sintonia definidos na tabela conduzem normalmente a um decaimento de  $1/4$ , i.e. a magnitude da resposta transitória de malha fechada decai para 25% após um período de oscilação. Este critério de desempenho implica um zeta de malha fechada aproximadamente igual a 0.22 o que pode ser considerado um bom compromisso entre velocidade de resposta e margens de estabilidade adequadas.

**[ nota ]**

Para um sistema de segunda ordem os pólos estão localizados, considerando a forma canónica, em  $s = -\zeta\omega_n \pm j\omega_d$ . Deste modo a resposta impulsional do sistema é do tipo:

$$h(t) = \frac{\omega_n^2}{\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \cdot \sin(\omega_d t)$$

Verifica-se que a componente transitória decai exponencialmente. Para que a atenuação da componente sinusoidal seja de 25% ao fim de um período é necessário que,

$$e^{-\zeta\omega_n t} \Big|_{t=T} = \frac{1}{4} \Rightarrow e^{-\zeta\omega_n T} = 0.25 \Rightarrow e^{-\zeta\omega_n \frac{2\pi}{\omega_d}} = 0.25 \Rightarrow e^{-\frac{\zeta 2\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = 0.25$$

Resolvendo em ordem a zeta vêem que  $\zeta \approx 0.2155$ .

**1.2.5.1.2 Método da Sensibilidade Limite**

Neste segundo método, o critério para o ajuste dos parâmetros é baseado na avaliação do sistema no limite da estabilidade. Mais concretamente, e para o caso particular de um sistema assintoticamente estável na região  $0 \leq \kappa \leq K_C$ , são especificadas as seguintes regras de sintonia:

	<b>Kp</b>	<b>Ki</b>	<b>Kd</b>
<b>P</b>	$0.5 \cdot K_C$		
<b>PI</b>	$0.45 \cdot K_C$	$0.6 K_p \omega_C / \pi$	
<b>PID</b>	$0.6 \cdot K_C$	$K_p \omega_C / \pi$	$K_p \pi / (4 \cdot \omega_C)$

**Tabela 3. Regras de sintonia de Ziegler-Nichols para controladores PID**

Onde  $K_C$  se refere ao ganho crítico e  $\omega_C$  a frequência de oscilação (parte imaginária dos pólos de malha fechada para  $\kappa = K_C$ ). Os valores de  $K_C$  e  $\omega_C$  podem ser determinados algebricamente pelo critério de Routh.

[ nota ]

O critério de estabilidade de Routh é um método para determinar a existência de pólos no semi-plano direito e pode ser aplicado a sistemas do tipo:

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}$$

A estabilidade é analisada a partir da equação característica:

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

O critério é aplicado através da construção de uma tabela ou matriz da forma:

$s^n$	$a_n$	$a_{n-2}$	$a_{n-4}$	$\dots$
$s^{n-1}$	$a_{n-1}$	$a_{n-3}$	$a_{n-5}$	$\dots$
$\vdots$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\dots$
$\vdots$	$\beta_1$	$\beta_1$	$\beta_1$	$\dots$

onde,  $\alpha_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$ ,  $\alpha_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$ , ...

e  $\beta_1 = \frac{\alpha_1 a_{n-3} - a_{n-1} \alpha_2}{\alpha_1}$ ,  $\beta_2 = \frac{\alpha_1 a_{n-5} - a_{n-1} \alpha_3}{\alpha_1}$ , ...

[ continua ]

Todas as raízes da equação característica possuem valores negativos se, e somente se, os elementos da primeira coluna da tabela de Routh possuem o mesmo sinal. De contrário, o número de raízes com partes reais positivas é igual ao número de mudanças de sinal.

**Obs1:** Uma linha de zeros para a linha  $s$  indica que o polinómio possui um par de raízes que satisfazem a equação auxiliar  $A \cdot s^2 + B = 0$  onde  $A$  e  $B$  são os primeiros e segundos elementos da linha  $s^2$ .

**Obs2:** Se algum dos elementos da primeira coluna for nulo (excepto o último) o zero é substituído por uma quantidade infinitesimal  $\varepsilon$  no que se refere ao cálculo dos factores subsequentes.

Alternativamente, o ganho e a frequência crítica podem ser derivados a partir da observação do lugar das raízes ou diagramas de Bode. No lugar de raízes pesquisa-se o valor do ganho que coloca os pólos de malha fechada sobre o eixo imaginário. O valor desse ganho refere-se ao ganho crítico e a magnitude do vector pólo nesse ponto define a frequência de oscilação.

Por outro lado, recorrendo aos diagramas de Bode, o ganho crítico é aquele que torna o sistema com margem de ganho nulo e a frequência crítica é a frequência de cruzamento de fase.

### 1.2.5.2 Projecto pelos Diagramas de Bode

Uma forma alternativa para o dimensionamento dos três graus de liberdade de um controlador PID parte do esboço da resposta em frequência em malha aberta do sistema. Tendo em mente esse perfil assim como a resposta em frequência de malha fechada desejada e atendendo ao carácter aditivo dos diagramas de Bode muitas vezes é possível determinar, de uma forma expedita, os coeficientes do controlador.

Para estes casos utiliza-se uma parametrização alternativa àquela apresentada anteriormente. Assim, para o case do projecto recorrendo aos diagramas de Bode utiliza-se, por norma, a seguinte estrutura para a função de transferência do controlador.

$$K(s) = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s} = \frac{K_i \left( \frac{s}{\omega_1} + 1 \right) \left( \frac{s}{\omega_2} + 1 \right)}{s} \quad (62)$$

onde

$$K_p = \frac{K_i}{\omega_1} + \frac{K_i}{\omega_2} \quad (63)$$

e

$$K_d = \frac{K_i}{\omega_1 \omega_2} \quad (64)$$

**[ demonstração ]**

$$K(s) = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s} = K_d \frac{s^2 + K_p/K_d s + K_i/K_d}{s}$$

as raízes do numerador são:

$$\begin{cases} s = -\frac{1}{2K_d} \left( K_p + \sqrt{K_p^2 - 4K_i K_d} \right) = -\omega_1 \\ s = -\frac{1}{2K_d} \left( K_p - \sqrt{K_p^2 - 4K_i K_d} \right) = -\omega_2 \end{cases}$$

logo  $K(s)$  pode ser rescrita da seguinte forma:

$$K(s) = K_d \frac{(s + \omega_1)(s + \omega_2)}{s}, \text{ i.e.}$$

$$K(s) = \omega_1 \omega_2 K_d \frac{\left( \frac{s}{\omega_1} + 1 \right) \left( \frac{s}{\omega_2} + 1 \right)}{s}$$

O produto  $\omega_1 \omega_2$  é:

$$\begin{aligned} \omega_1 \cdot \omega_2 &= \left[ \frac{1}{2K_d} \left( K_p + \sqrt{K_p^2 - 4K_i K_d} \right) \right] \cdot \left[ \frac{1}{2K_d} \left( K_p - \sqrt{K_p^2 - 4K_i K_d} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{4K_d^2} \left( K_p^2 - (K_p^2 - 4K_i K_d) \right) = \frac{1}{4K_d^2} (4K_i K_d) = \frac{K_i}{K_d} \end{aligned}$$

logo,

$$K(s) = K_i \frac{\left( \frac{s}{\omega_1} + 1 \right) \left( \frac{s}{\omega_2} + 1 \right)}{s} \text{ c.e.d.}$$

É fácil verificar que as constantes  $K_p$  e  $K_d$  podem ser tomadas a partir dos valores das variáveis  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  e  $K_i$  da seguinte forma:

$$K_d = \frac{K_i}{\omega_1 \omega_2} \text{ e } K_p = K_i \frac{\omega_1 + \omega_2}{\omega_1 \omega_2}$$

### 1.2.5.3 Estratégia Analítica de Projecto

Uma técnica analítica pode ser derivada para determinar os três parâmetros de um controlador PID se estiverem estabelecidos, *à priori*, os seguintes critérios de desempenho:

- Erro em estado estacionário;
- Largura de Banda;
- Margem de Fase.

A margem de fase pode ser derivada, por exemplo, da máxima sobre-elongação admissível e a largura de banda do tempo de estabelecimento (isto no caso das especificações estarem no domínio do tempo).

De modo a ilustrar o procedimento considere-se a função de transferência de malha aberta (com malha de realimentação igual à unidade) de um sistema controlado por um PID:

$$G_{OL}(s) = \left( K_p + K_d s + \frac{K_i}{s} \right) G(s) \quad (65)$$

Se o sistema é de tipo  $p$  o sistema compensado é do tipo  $p+1$  (devido ao pólo na origem adicionado pelo controlador). Sabe-se da secção §1.1.8.2 que a constante de erro é igual ao inverso do erro em estado estacionário e é dado por:

$$K_{p+1} = \lim_{s \rightarrow 0} s^{p+1} \left( \frac{K_p s + K_d s^2 + K_i}{s} \right) G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s^p K_i G(s) = \frac{1}{e_{ss}} \quad (66)$$

Assim, para um dado erro em regime permanente obtém-se imediatamente um dos parâmetros do controlador:  $K_i$

Já foi dito anteriormente que a frequência natural de malha fechada corresponde à frequência de cruzamento de ganho de malha aberta. Sabe-se também que a margem de fase pode ser obtida do coeficiente de amortecimento de malha fechada. Assim, para a frequência  $\omega = \omega_{gc}$  o compensador deve possuir um ganho unitário e uma fase igual a  $\theta_{\omega=\omega_{gc}} = P_m - 180^\circ$ .

Decorrente destes factos, e atendendo a que a constante integral é conhecida, pode escrever-se [14]:

$$\left( K_p + j\omega_{gc} K_d + \frac{K_i}{j\omega_{gc}} \right) G(j\omega_{gc}) = 1e^{j\theta_{\omega=\omega_{gc}}} \quad (67)$$

ou seja,

$$K_p + j\omega_{gc} K_d = \frac{1e^{j\theta_{\omega=\omega_{gc}}}}{G(j\omega_{gc})} + j \frac{K_i}{\omega_{gc}} \quad (68)$$

o que leva a que,

$$K_p = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1e^{j\theta_{\omega=\omega_{gc}}}}{G(j\omega_{gc})} + j \frac{K_i}{\omega_{gc}} \right\} \text{ e } K_d = \operatorname{Im} \left\{ \frac{1e^{j\theta_{\omega=\omega_{gc}}}}{G(j\omega_{gc})} + j \frac{K_i}{\omega_{gc}} \right\} \cdot \frac{1}{\omega_{gc}} \quad (69)$$

## 1.2.6 Projecto de Controladores Avanço e Atraso

Uma das formas mais simples de um compensador é simplesmente um filtro com um pólo e um zero. Neste contexto dois tipos de controladores elementares serão objecto de revisão: o controlador avanço de fase e o controlador atraso de fase.

Um controlador avanço, como o seu próprio nome indica, adiciona ao sistema fase positiva. Já um controlador atraso torna mais negativa a fase de um sistema. A aplicação de um controlador em detrimento do outro depende da aplicação em concreto. Contudo, normalmente, um controlador avanço de fase é utilizado nos casos em que se pretende um aumento da largura de banda e aumento da margem de fase. Por outro lado, um controlador atraso possui um efeito contrário, i.e. tende a diminuir a largura de banda aumentando no entanto o desempenho em estado estacionário.

### 1.2.6.1 Controladores Avanço de Fase

Entre outros, um controlador avanço de fase, têm normalmente os seguintes efeitos no comportamento de um sistema de controlo

- Aumento da estabilidade relativa por aumento da margem de fase
- Aumento da largura de banda
- Aumentam o erro em estado estacionário
- Aumento do tempo de resposta
- Diminuição da sobre-elongação (maior zeta)
- Pobre imunidade ao ruído.

### 1.2.6.1.1 Estratégia de Projecto: Diagramas de Bode

A ideia subjacente ao projecto por diagramas de bode consiste no esboço da resposta em frequência de malha aberta. Considere a função de transferência de um compensador avanço parametrizada da seguinte forma:

$$K(s) = \kappa \frac{aTs + 1}{Ts + 1}, \quad a > 1 \quad (70)$$

No domínio  $s = j\omega$

$$K(j\omega) = \kappa \frac{j\omega aT + 1}{j\omega T + 1} = |K(j\omega)| \angle K(j\omega)$$

Assim, o controlador avanço apresenta uma fase que pode ser calculada como:

$$\angle K(j\omega) = \Phi = \tan^{-1}(aT\omega) - \tan^{-1}(T\omega) \quad (71)$$

A frequência à qual o avanço de fase é máximo pode ser calculado tomando-se a primeira derivada da expressão anterior, i.e.

$$\Phi_{MAX} = \frac{d}{d\omega} (\tan^{-1}(aT\omega) - \tan^{-1}(T\omega)) = 0$$

ou seja,

$$\frac{d}{d\omega} (\tan^{-1}(aT\omega) - \tan^{-1}(T\omega)) = \frac{aT}{1+(aT\omega)^2} - \frac{T}{1+(T\omega)^2} = 0$$

Para que a equação anterior seja nula é necessário que,

$$aT \cdot [1+(T\omega)^2] - T \cdot [1+(aT\omega)^2] = 0$$

logo,

$$\begin{aligned} aT + aT^3\omega^2 - T - a^2T^3\omega^2 &= 0 \Rightarrow \\ aT^3\omega^2(1-a) &= T(1-a) \Rightarrow \\ \omega^2 &= \frac{1}{aT^2} \end{aligned}$$

e assim,

$$\omega = \frac{1}{T\sqrt{a}} \quad (72)$$

ou seja, à frequência,

$$\omega = \frac{1}{T\sqrt{a}} = \omega_\phi$$

o avanço de fase é máximo e tem como valor:

$$\Phi_{MAX} = \tan^{-1}(\sqrt{a}) - \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right) \quad (73)$$

o que leva a que,

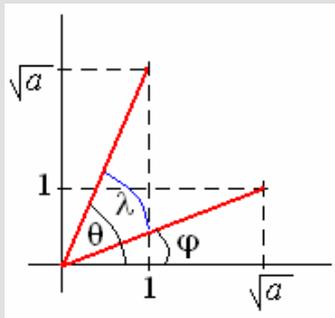
$$\sin(\Phi_{MAX}) = \frac{a-1}{a+1}$$

e em última análise, à constante  $a$  em função do máximo avanço de fase

$$a = \frac{1 + \sin(\Phi_{MAX})}{1 - \sin(\Phi_{MAX})} \quad (74)$$

**[ demonstração ]**

Considere-se  $\Phi_{MAX} = \tan^{-1}(\sqrt{a}) - \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right) = \theta - \varphi = \lambda$ . Geometricamente, a expressão possui o seguinte aspecto:



*Nota:*  $\tan(\tau) = \frac{y}{x}$

Pela teoria do cálculo vectorial sabe-se que o produto interno entre dois vectores  $\vec{a} = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$  e  $\vec{b} = \langle b_1, b_2, \dots, b_n \rangle$  é dado por:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varepsilon)$$

onde  $\varepsilon$  se refere ao ângulo formado pelos dois vectores e  $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$

e  $|\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2}$  refere-se ao valor absoluto dos vectores  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$

respectivamente. Assim é fácil verificar que,

$$\cos(\lambda) = \frac{\langle \sqrt{a}, 1 \rangle \cdot \langle 1, \sqrt{a} \rangle}{|\langle \sqrt{a}, 1 \rangle| \cdot |\langle 1, \sqrt{a} \rangle|} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{a}}{\sqrt{1+a} \cdot \sqrt{1+a}} = \frac{2\sqrt{a}}{1+a}$$

Pela teorema fundamental da trigonometria,

$$\cos(\lambda) = \sqrt{1 - \sin^2(\lambda)} = \frac{2\sqrt{a}}{1+a} \text{ logo,}$$

[ continua ]

$$\sin(\lambda) = \sqrt{1 - \frac{4a}{(1+a)^2}} = \sqrt{\frac{1-2a+a^2}{(1+a)^2}} = \sqrt{\frac{(a-1)^2}{(1+a)^2}} = \frac{a-1}{a+1}$$

$$a-1 = (a+1) \cdot \sin(\lambda) \Rightarrow a = \frac{1+\sin(\lambda)}{1-\sin(\lambda)} \stackrel{\lambda=\Phi_{MAX}}{\rightarrow} \Phi_{MAX} = \frac{1+\sin(\lambda)}{1-\sin(\lambda)} \text{ c.e.d.}$$

**[ demonstração alternativa ]**

Tendo em consideração que,

$$\tan^{-1}\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(a) \text{ vêm que,}$$

$$\Phi_{MAX} = \tan^{-1}(\sqrt{a}) - \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right), \quad \Phi_{MAX} = \tan^{-1}(\sqrt{a}) - \frac{\pi}{2} + \tan^{-1}(\sqrt{a})$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)\left(\Phi_{MAX} + \frac{\pi}{2}\right) = \tan^{-1}(\sqrt{a})$$

$$\tan\left(\left(\frac{1}{2}\right)\left(\Phi_{MAX} + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \sqrt{a} \text{ o que implica que } a = \tan^2\left(\left(\frac{1}{2}\right)\left(\Phi_{MAX} + \frac{\pi}{2}\right)\right). \text{ Assim,}$$

$$a = \left(\frac{\sin(0.5 \cdot (\Phi_{MAX} + 0.5\pi))}{\cos(0.5 \cdot (\Phi_{MAX} + 0.5\pi))}\right)^2 = \left(\frac{(\sin(0.5 \cdot \Phi_{MAX}) + \cos(0.5 \cdot \Phi_{MAX}))}{(\cos(0.5 \cdot \Phi_{MAX}) - \sin(0.5 \cdot \Phi_{MAX}))}\right)^2$$

$$a = \left(\frac{\sin^2(0.5 \cdot \Phi_{MAX}) + \cos^2(0.5 \cdot \Phi_{MAX}) + 2 \cdot \sin(0.5 \cdot \Phi_{MAX}) \cdot \cos(0.5 \cdot \Phi_{MAX})}{\cos^2(0.5 \cdot \Phi_{MAX}) - 2 \cdot \sin(0.5 \cdot \Phi_{MAX}) \cdot \cos(0.5 \cdot \Phi_{MAX}) + \sin^2(0.5 \cdot \Phi_{MAX})}\right)$$

$$a = \left(\frac{1 + 2 \cdot \sin(0.5 \cdot \Phi_{MAX}) \cdot \cos(0.5 \cdot \Phi_{MAX})}{1 - 2 \cdot \sin(0.5 \cdot \Phi_{MAX}) \cdot \cos(0.5 \cdot \Phi_{MAX})}\right) = \frac{1 + \sin(\Phi_{MAX})}{1 - \sin(\Phi_{MAX})} \text{ c.e.d.}$$

A contribuição adicional de ganho, pela componente transitória, para a frequência  $\omega = \omega_\phi$  é:

$$M = \left| \frac{j\omega_\phi aT + 1}{j\omega_\phi T + 1} \right| \Leftrightarrow M_{dB} = 20 \log_{10} \left( \left| \frac{j\omega_\phi aT + 1}{j\omega_\phi T + 1} \right| \right)_{dB}$$

$$M_{dB} = 20 \log_{10} \left( \left| \frac{j\sqrt{a} + 1}{ja^{-0.5} + 1} \right| \right)_{dB} = 20 \log_{10}(\sqrt{1+a}) - 20 \log_{10} \left( \sqrt{\frac{1+a}{a}} \right)$$

ou seja

$$M_{dB} = 10 \log_{10}(1+a) - 10 \log_{10} \left( \frac{1+a}{a} \right) = 10 \log_{10}(a) \quad (75)$$

Tendo em consideração as equações derivadas até aqui, apresenta-se nos pontos subsequentes uma espécie de algoritmo que pode ser seguido de modo a projectar um controlador atraso de fase [14].

[ nota ] Com este algoritmo não é possível especificar a frequência de cruzamento de ganho

**Algoritmo:**

**Passo 1 de 7:** Calcular o ganho  $\kappa$  de modo a que a constante de erro possua o valor desejado

**Passo 2 de 7:** Esboçar o diagrama de bode de  $\kappa G(j\omega)$  e determinar a margem de fase.

**Passo 3 de 7:** Determinar a quantidade de avanço de fase necessária  $\Phi$  majorando-a em cinco ou dez graus.

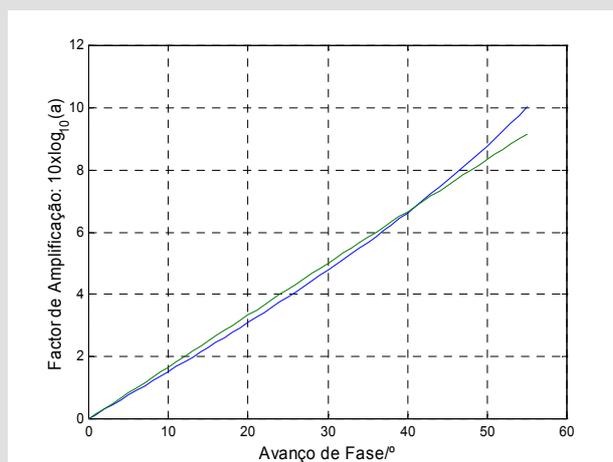
**Passo 4 de 7:** Calcular  $a$  a partir de  $a = \frac{1 + \sin(\Phi)}{1 - \sin(\Phi)}$

[ nota ] O limite prático para  $a$  é 10 o que equivale a um máximo aumento de fase de  $55^\circ$ . Para adicionar mais fase é necessário colocar compensadores em cascata.

**Passo 5 de 7:** Determinar a frequência à qual o ganho é  $|\kappa G(j\omega)|_{dB} = -10 \log_{10}(a)$ . O valor dessa frequência será a frequência de cruzamento do ganho.

[ nota ] Relação entre atenuação e avanço de fase.

Para um avanço de fase entre  $0$  e  $55^\circ$ , a relação entre a amplificação do sinal devido ao controlador e o avanço de fase possui, em dB, o seguinte aspecto



Se compararmos o perfil do resultado com uma recta que passa pela origem pode-se dizer que, a menos de um erro máximo de 0.85dB (0.25dB entre  $0$  e  $45^\circ$ ) que a atenuação a considerar no algoritmo de projecto é aproximadamente  $1/6$  do avanço de fase (em graus) necessário.

**Passo 6 de 7:** Calcular  $T$  a partir de  $T = \frac{1}{\omega_{gc} \sqrt{a}}$

**Passo 7 de 7:** Desenhar os diagramas de Bode de  $K(j\omega)G(j\omega)$  para confirmar o projecto. Convém também simular a resposta do sistema em malha fechada

### 1.2.6.1.2 Estratégia de Projecto: Analiticamente

Outra estratégia de sintonia pode ser obtida, tal como foi feito para o controlador PID, analiticamente. Assim, considere-se um sistema com função de transferência  $G(s)$  em série com um controlador avanço de fase com função de transferência:

$$K(s) = \kappa \frac{aTs + 1}{Ts + 1}$$

Considere-se ainda que o sistema deve possuir, em malha fechada, um erro em regime permanente inferior ou igual a  $\delta$  e uma largura de banda  $\omega_c$ . Adicionalmente a margem de fase deve ser igual a  $P_m$  graus.

Atendendo à primeira especificação, e dependendo da ordem do polinómio de entrada (degrau, rampa ou parábola), o ganho  $\kappa$  é obtido a partir do teorema do valor final. Por exemplo se a entrada for um degrau e o sistema for tipo 0 então,

$$\varepsilon = \frac{1}{1 + K_p} \leq \delta$$

onde

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} K(s)G(s) = \kappa \cdot \lim_{s \rightarrow 0} G(s)$$

assim,

$$\kappa \geq \frac{1 - \delta}{\delta \cdot \lim_{s \rightarrow 0} G(s)}$$

Os parâmetros  $a$  e  $T$  são obtidos a partir dos restantes critérios de desempenho. Considerando que a largura de banda é aproximadamente igual à frequência de cruzamento do ganho então, à frequência  $\omega = \omega_{gc} = \omega_c$  a fase que o sistema deve exibir é  $\phi = P_m - 180$ . Assim sendo,

$$K(j\omega)G(j\omega)|_{\omega=\omega_c} = e^{j\phi}$$

Considerando que à frequência  $\omega = \omega_c$   $|G(j\omega)| = M$  e  $\angle G(j\omega) = \theta$  então,

$$K(j\omega)G(j\omega)|_{\omega=\omega_c} = K(j\omega)|_{\omega=\omega_c} M \cdot e^{j\theta} = e^{j\phi}$$

ou seja,

$$K(j\omega)|_{\omega=\omega_c} = \frac{1}{M} e^{j(\phi-\theta)}$$

como

$$K(j\omega) = \kappa \frac{jaT\omega + 1}{jT\omega + 1}$$

então,

$$K(j\omega)|_{\omega=\omega_c} = \kappa \frac{jaT\omega_c + 1}{jT\omega_c + 1} = \frac{1}{M} e^{j(\phi-\theta)}$$

ou seja,

$$\frac{jaT\omega_c + 1}{jT\omega_c + 1} = \frac{1}{\kappa \cdot M} e^{j(\phi-\theta)} = \frac{1}{\kappa \cdot M} e^{j(Pm-180-\theta)}$$

resolvendo a equação vêem que:

$$a = - \left( \frac{(\kappa \cdot M) \cos(Pm - \theta) + 1}{\kappa \cdot M [\kappa \cdot M + \cos(Pm - \theta)]} \right) \text{ e } T = \frac{\kappa \cdot M + \cos(Pm - \theta)}{\omega_c \sin(Pm - \theta)}$$

i.e.,

$$aT = - \left( \frac{(\kappa \cdot M) \cos(Pm - \theta) + 1}{\kappa \cdot M \cdot \omega_c \sin(Pm - \theta)} \right) \text{ e } T = \frac{\kappa \cdot M + \cos(Pm - \theta)}{\omega_c \sin(Pm - \theta)} \quad (76)$$

**[ demonstração ]**

$$\frac{jaT\omega_c + 1}{jT\omega_c + 1} = \frac{1}{\kappa \cdot M} e^{j(Pm-180-\theta)} \text{ multiplicando o termo à esquerda pelo conjugado e}$$

aplicando a identidade de Euler ao termo à direita vêem que:

$$\frac{(jaT\omega_c + 1)(-jT\omega_c + 1)}{(T\omega_c)^2 + 1} = \frac{1}{\kappa \cdot M} (\cos(Pm - 180 - \theta) + j \sin(Pm - 180 - \theta))$$

$$\frac{1 + a(T\omega_c)^2 + jT\omega_c(a-1)}{(T\omega_c)^2 + 1} = \frac{1}{\kappa \cdot M} (\cos(Pm - 180 - \theta) + j \sin(Pm - 180 - \theta))$$

separando a parte real da parte imaginária tem-se que:

[ continua ]

$$\frac{1 + a(T\omega_c)^2}{(T\omega_c)^2 + 1} = \frac{1}{\kappa \cdot M} \cos(Pm - 180 - \theta) = -\frac{1}{\kappa \cdot M} \cos(Pm - \theta) \quad (1)$$

$$\frac{T\omega_c(a-1)}{(T\omega_c)^2 + 1} = \frac{1}{\kappa \cdot M} \sin(Pm - 180 - \theta) = -\frac{1}{\kappa \cdot M} \sin(Pm - \theta) \quad (2)$$

Resolvendo (1) em ordem a  $a$

$$a = -\frac{1}{\kappa \cdot M (T\omega_c)^2} \cos(Pm - \theta) \left[ (T\omega_c)^2 + 1 \right] - \frac{1}{(T\omega_c)^2} \quad (3)$$

Substituindo (3) em (2) e simplificando fica:

$$-\frac{\cos(Pm - \theta)}{\kappa \cdot M (T\omega_c)^2} \left[ (T\omega_c)^2 + 1 \right] - \frac{1}{(T\omega_c)^2} = -\frac{\sin(Pm - \theta)}{\kappa \cdot M \cdot T\omega_c} \left[ (T\omega_c)^2 + 1 \right] + 1$$

$$\frac{\cos(Pm - \theta)}{\kappa \cdot M (T\omega_c)^2} \left[ (T\omega_c)^2 + 1 \right] - \frac{T\omega_c \cdot \sin(Pm - \theta)}{\kappa \cdot M (T\omega_c)^2} \left[ (T\omega_c)^2 + 1 \right] = -\left( \frac{(T\omega_c)^2 + 1}{(T\omega_c)^2} \right)$$

$$\frac{(T\omega_c)^2 + 1}{\kappa \cdot M (T\omega_c)^2} \left[ \cos(Pm - \theta) - T\omega_c \sin(Pm - \theta) \right] = -\left( \frac{(T\omega_c)^2 + 1}{(T\omega_c)^2} \right)$$

$$T = \frac{\kappa \cdot M + \cos(Pm - \theta)}{\omega_c \sin(Pm - \theta)}$$

substituindo este último resultado em (3) vêm que:

$$a = -\frac{1}{\kappa \cdot M (T\omega_c)^2} \cos(Pm - \theta) \left[ (T\omega_c)^2 + 1 \right] - \frac{1}{(T\omega_c)^2}$$

$$a = -\frac{\cos(Pm - \theta)}{\kappa \cdot M} - \left( \frac{\cos(Pm - \theta) + \kappa \cdot M}{\kappa \cdot M} \right) \left( \frac{1}{(T\omega_c)^2} \right)$$

$$a = -\frac{\cos(Pm - \theta)}{\kappa \cdot M} - \left( \frac{\cos(Pm - \theta) + \kappa \cdot M}{\kappa \cdot M} \right) \left( \frac{\omega_c^2 \sin^2(Pm - \theta)}{\omega_c^2 [\kappa \cdot M + \cos(Pm - \theta)]^2} \right)$$

$$a = -\frac{\cos(Pm - \theta)}{\kappa \cdot M} - \left( \frac{\cos(Pm - \theta) + \kappa \cdot M}{\kappa \cdot M} \right) \left( \frac{\sin^2(Pm - \theta)}{[\kappa \cdot M + \cos(Pm - \theta)]^2} \right)$$

$$a = -\frac{\cos(Pm - \theta)}{\kappa \cdot M} - \left( \frac{\sin^2(Pm - \theta)}{\kappa \cdot M [\kappa \cdot M + \cos(Pm - \theta)]} \right)$$

$$a = -\left( \frac{(\kappa \cdot M) \cos(Pm - \theta) + \cos^2(Pm - \theta) + \sin^2(Pm - \theta)}{\kappa \cdot M [\kappa \cdot M + \cos(Pm - \theta)]} \right)$$

$$a = -\left( \frac{(\kappa \cdot M) \cos(Pm - \theta) + 1}{\kappa \cdot M [\kappa \cdot M + \cos(Pm - \theta)]} \right)$$

[ nota ] Para que o controlador seja estável é necessário que  $T$  seja positivo. Adicionalmente, e por forma a garantir que o sistema seja de fase mínima o valor de  $aT$  também deve ser positivo. Ao fim de alguns testes verificou-se que, recorrendo a esta estratégia, a frequência de cruzamento de ganho não pode ser arbitrária. De facto, a frequência de cruzamento está restringida aos valores que tornam o controlador de fase mínima.

### 1.2.6.2 Controladores Atraso de Fase

Entre outras, um controlador avanço de fase normalmente contribui para que um sistema exiba as seguintes alterações comportamentais:

- Aumento da estabilidade relativa por aumento da margem de fase
- Diminuição da largura de banda
- Diminuição do erro em estado estacionário
- Diminuição da sobre-elongação (maior zeta)

#### 1.2.6.2.1 Estratégia de Projecto: Diagramas de Bode

Considere a função de transferência de um compensador atraso parametrizada da seguinte forma:

$$K(s) = \kappa \frac{aTs + 1}{Ts + 1}, \quad a < 1 \quad (77)$$

À semelhança do que foi feito para o compensador avanço, a constante de ganho é estimada por forma a satisfazer os requisitos de erro em regime permanente e os parâmetros  $a$  e  $T$  são projectados de modo a que a margem de fase requerida seja satisfeita. Para este tipo de controladores, o ganho diminui com o aumento da frequência e verifica-se que a máxima redução de ganho é de  $20 \cdot \log_{10}(a)$ .

[ demonstração ]

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{aTs + 1}{Ts + 1} = a \Rightarrow 20 \cdot \log_{10}(a) \Big|_{dB}$$

Normalmente considera-se, para fins de projecto, que a mínima contribuição da fase de um controlador atraso ocorre uma década à frente do zero, i.e.

$$\omega_{\min\phi} = 10 \cdot \omega_z \quad (78)$$

onde,

$$\omega_z = \frac{1}{aT} \quad (79)$$

ou seja ,

$$\omega_{\min\phi} = \frac{10}{aT} \quad (80)$$

Assim, uma vez o  $a$  seleccionado,  $T$  é escolhido de modo a que a frequência de cruzamento do zero esteja afastada (para a esquerda do diagrama de bode) da frequência crítica do sistema (de contrário o atraso de fase adicional pode destabilizar o sistema). Atendendo ao que foi dito um possível algoritmo de projecto para controladores atraso pode ser estruturado pela seguinte sequência [1]:

**Algoritmo:**

**Passo 1 de 6:** Calcular o ganho  $\kappa$  de modo a que a constante de erro possua o valor desejado

**Passo 2 de 6:** Esboçar o diagrama de bode de  $\kappa G(j\omega)$

**Passo 3 de 6:** Se a margem de fase é insuficiente, estimar o valor da frequência à qual a margem de fase é satisfeita (adicionar 5° por segurança). Esta frequência será a frequência de cruzamento de ganho desejada ( $\omega_{gc}$ )

**Passo 4 de 6:** Determinar o ganho  $P = |\kappa G(j\omega)|_{dB}$  à frequência  $\omega = \omega_{gc}$ .  
Calcular  $a$  a partir de  $a = 10^{-P/20}$ .

[ nota ] O limite prático para  $a$  é 0.1. Para adicionar mais atraso de fase é necessário colocar compensadores em cascata.

**Passo 5 de 6:** De modo a minimizar a contribuição na fase pelo controlador estimar  $T$  através de  $T = \frac{10}{a\omega_{gc}}$ .

**Passo 6 de 6:** Desenhar os diagramas de Bode de  $K(j\omega)G(j\omega)$  para confirmar o projecto. Simule também a resposta do sistema em malha fechada

### 1.2.6.2.2 Estratégia de Projecto: Analiticamente

Outra estratégia de sintonia pode ser obtida analiticamente, tal como foi feito para o controlador PID e avanço de fase. De facto, a estratégia subjacente a este método têm muito em comum com a técnica analítica usada no projecto de compensadores avanço. Assim, considerando um sistema com função de transferência  $G(s)$  em série com um controlador atraso de fase com função de transferência:

$$K(s) = \kappa \frac{aTs + 1}{Ts + 1} \text{ com } a < 1 \quad (81)$$

E supondo que o sistema deve possuir, em malha fechada, um erro em regime permanente inferior ou igual a  $\delta$ , uma largura de banda  $\omega_c$  e uma margem de fase de  $Pm$  graus verifica-se que:

$$a = - \left( \frac{(\kappa \cdot M) \cos(Pm - \theta) + 1}{\kappa \cdot M [\kappa \cdot M + \cos(Pm - \theta)]} \right) \quad (82)$$

e

$$T = \frac{\kappa \cdot M + \cos(Pm - \theta)}{\omega_c \sin(Pm - \theta)} \quad (83)$$

onde  $M$  e  $\theta$  se referem ao ganho e fase (em graus) exibidas pelo sistema à frequência  $\omega_c$ . O ganho  $\kappa$  é obtido através do erro máximo admissível em regime permanente.

[ nota ] Como na técnica analítica se obtém as constantes de tempo para os pólos e zeros através da divisão por  $\sin(Pm - \theta)$ , este método não funciona se o argumento do seno se aproximar de  $180^\circ$ . Assim, é possível que um dado conjunto de critérios de desempenho não sejam atingíveis com este método. Na minha perspectiva o argumento do seno não deve ser superior ou igual a  $180^\circ$  pois nesses casos o seno retorna um número negativo ou zero fornecendo um controlador impossível ou de fase não-mínima.



### 2.1 Amostragem e Reconstrução

O controlo digital tem a ver com a substituição dos controladores analógicos revistos anteriormente por algoritmos executados em processadores digitais sejam eles computadores, micro-controladores, ASIC's ou DSP's. No entanto, como normalmente os sinais presentes numa malha de controlo são analógicos, i.e. contínuos no tempo, para a adição de um controlador digital numa malha do sistema é necessário uma etapa de discretização ou digitalização de sinais (conversão A/D.) Como veremos adiante, na maior parte das vezes existe também a necessidade da conversão inversa, i.e. transformar um sinal do domínio digital para o domínio analógico (operação realizada por conversores D/A). As figuras que se seguem pretendem ilustrar o que acabou de ser dito. Na figura 15 os interruptores pretendem representar os dispositivos básicos do processo de amostragem : os amostradores

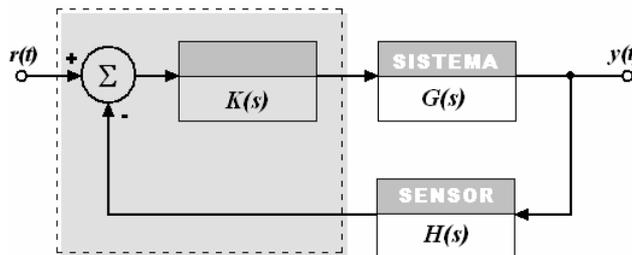


Fig 14. Controlador contínuo

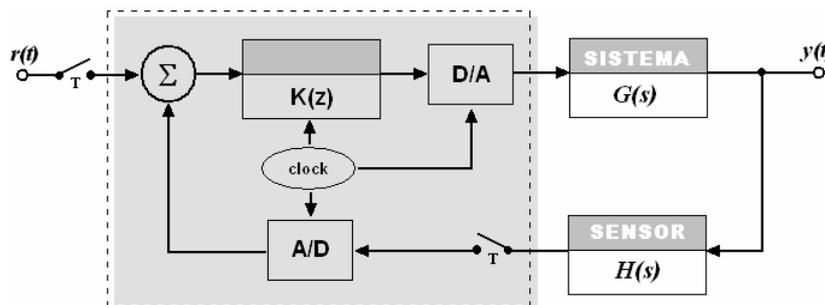
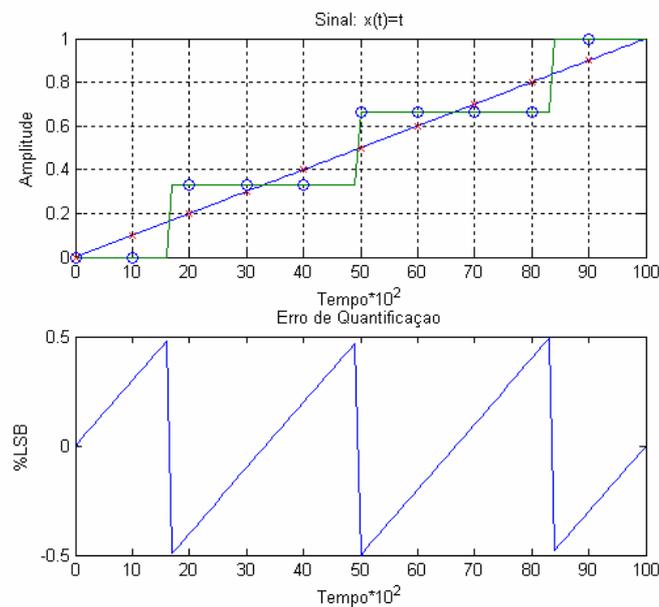


Fig 15. Controlador digital

A etapa de digitalização requer:

- Uma amostragem do sinal em intervalos de tempo  $T$  normalmente regulares (é possível a existência de amostragem a razões variáveis). Após este processo, obtém-se um sinal discreto no tempo mas contínuo na amplitude. Contudo, os processadores não conseguem executar operações com precisão infinita. Assim, também a amplitude deve ser discretizada através de uma operação de quantização.
- A quantização de um valor analógico no seu equivalente discreto depende do número de dígitos binários usados (bits). Assim, por exemplo, recorrendo a uma quantização de 10 bits é possível representar 1024 níveis distintos. Se se pretendesse quantizar um sinal com excursão de amplitudes entre 0 e 1, a resolução seria de uma parte em 1024. Se a amplitude do sinal não coincidir com um múltiplo inteiro da resolução o processo de quantização fornece como saída o equivalente binário mais próximo do valor a quantificar. Assim é fácil ver que a quantização adiciona erro à medida cujo valor mínimo teórico é igual a metade do bit menos significativo i.e.  $\pm \frac{1}{2} LSB$ .

De modo a ilustrar o que foi dito observe-se o seguinte exemplo de um sinal contínuo quantizado em 2 bits.



**Fig 16. Erro de quantização devido a um conversor A/D de 2 bits**

O fenómeno da quantização, assim como o seu efeito num sistema de controlo, será endereçado, mais à frente, na secção §2.1.3.

Como se pode presumir, a amostragem é uma operação fundamental no contexto do controlo digital. Assim sendo, na secção que se segue, estabelecem-se as bases matemáticas imprescindíveis para a análise e projecto de sistemas de controlo digitais.

### 2.1.1 Processo de Amostragem

Sempre que um processador digital é envolvido, quer para medidas, processamento de sinal ou controlo, os dados e os sistemas envolvidos são, na sua natureza, discretos no tempo. Este fenómeno prende-se com o facto das instruções serem executadas, pelo processador, em instantes discretos de tempo. Em termos de concepção, esses instantes são marcados fisicamente por um sinal de sincronismo (*clock*). Neste contexto, o objectivo desta secção é o de estabelecer um modelo matemático para o processo de amostragem<sup>‡</sup>. Esse modelo será útil de modo a poder ter em consideração possíveis alterações da dinâmica do sistema em malha fechada (face ao homólogo analógico) decorrente do processo de amostragem. Assim, considere-se a seguinte figura:

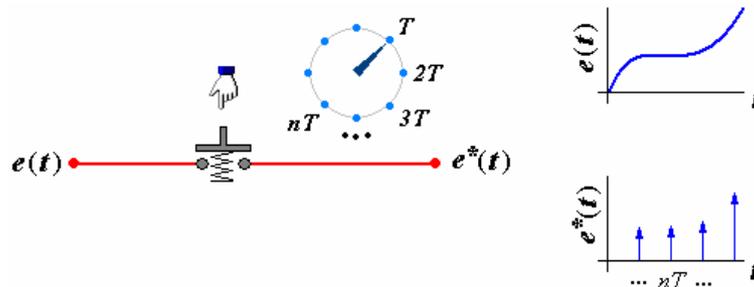
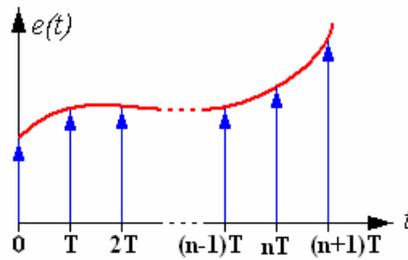


Fig 17. Modelo alegórico de um processo ideal de amostragem

Imagine-se um sinal eléctrico aplicado a montante do interruptor da figura anterior. Considere ainda que o interruptor é premido em intervalos de tempo regulares  $0, T, \dots, nT, \dots, \forall n \in \mathbb{N}_0$  e durante um instante infinitamente pequeno. Decorrente deste processo observa-se, a jusante do interruptor, o aparecimento de um sinal que, idealmente, se pode assemelhar aquele apresentado na figura subsequente.

[ nota ] Este é um modelo ideal de amostragem dado que à saída aparecem sinais não-físicos: impulsos (simbolizados por setas). Na realidade à saída não se verificam impulsos mas sim pulsos de curta duração [12].

<sup>‡</sup> Aconselha-se um estudo prévio ao anexo A2 deste documento.



**Fig 18. Relação entre os sinais a montante e a jusante do amostrador ideal.**

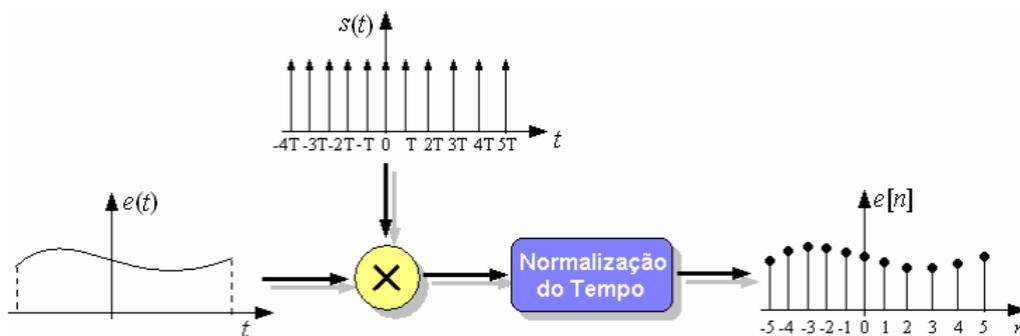
Pode ver-se que o sinal amostrado consiste numa sequência ponderada de impulsos (*trem* de impulsos). O factor de ponderação não é mais do que a amplitude do sinal em cada instante  $nT$ . Assim, o sinal amostrado pode ser escrito como uma soma ponderada de impulsos deslocados no tempo da forma:

$$e^*(t) = e(0)\delta(t) + e(T)\delta(t-T) + \dots + e(nT)\delta(t-nT) + \dots = e(t) \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \delta(t-nT) \quad (84)$$

[ nota ] A função  $\delta(t)$ , apelidada por impulso ou delta de *Dirac*, representa um sinal teórico sem existência física. Conceptualmente descreve um pulso com existência infinitamente pequena e amplitude infinitamente elevada. Este sinal também admite representação no domínio discreto possuindo, neste caso, amplitude unitária. Concretamente,

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t \neq 0 \\ \infty, & \text{se } t = 0 \end{cases} \text{ e no domínio discreto } \delta[n] = \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq 0 \\ 1, & \text{se } n = 0 \end{cases}$$

Deste modo, e decorrente da expressão anterior, o processo de amostragem ideal pode ser visto como a multiplicação de uma sequência periódica de impulsos com período  $T$  pelo sinal a amostrar  $e(t)$ , i.e. assiste-se a uma modulação em amplitude da portadora (sequência de impulsos) pelo sinal modulante  $e(t)$ . Este conceito é ilustrado na figura que se segue [12].



**Fig 19. A amostragem vista como uma modulação em amplitude.**

Analisemos agora qual o efeito da amostragem do sinal no domínio da frequência. Assim vamos aplicar a transformada de Fourier a  $e^*(t)$  :

$$e^*(t) = e(t) \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \delta(t - nT) \xrightarrow{F} E^*(j\omega) = \frac{1}{2\pi} E(j\omega) * \Delta(j\omega) \quad (85)$$

onde  $E(j\omega)$  se refere à transformada de Fourier de  $e(t)$  e  $\Delta(j\omega)$  diz respeito à transformada de Fourier do *trem* de impulsos.

[ nota ]

$$r(t) = s(t) \cdot p(t) \xrightarrow{F} R(j\omega) = \frac{1}{2\pi} [S(j\omega) * P(j\omega)]$$

$$R(j\omega) = S(j\omega) * P(j\omega) \xrightarrow{F^{-1}} r(t) = s(t) \cdot p(t)$$

A transformada de Fourier da sequência de impulsos, sendo este um sinal periódico com período  $T$ , é:

$$\Delta(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2\pi \cdot C_k \cdot \delta(\omega - k\omega_o) \quad (86)$$

onde,

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) \cdot e^{-jk\omega_o t} dt = \frac{1}{T} \quad (87)$$

[ nota ] Propriedade de anteparo [4]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t - t_o) dt = f(t_o)$$

$$\int_a^b f(t) \delta(t - t_o) dt = \begin{cases} f(t_o) & \text{se } a \leq t_o \leq b \\ 0 & \text{restantes casos} \end{cases}$$

Deste modo,

$$\Delta(j\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - k\omega_o) \quad (88)$$

o que leva a concluir que, no domínio de Fourier, um *trem* de impulsos no tempo é também um *trem* de impulsos na frequência. Neste domínio os impulsos aparecem espaçados de  $\omega_o = 2\pi/T$  ponderados por um factor constante ao longo de todo o espectro e igual a  $2\pi/T$ .

Não perdendo de vista o objectivo que é determinar o espectro de frequências do sinal amostrado têm-se, como já foi referido, que:

$$E^*(j\omega) = \frac{1}{2\pi} E(j\omega) * \Delta(j\omega) \quad (89)$$

A convolução entre os dois espectros é calculada recorrendo ao integral de convolução da seguinte forma:

$$E^*(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} E(j\Omega) \cdot \Delta(j(\omega - \Omega)) d\Omega \right] \quad (90)$$

Substituindo  $\Delta(j\omega)$  por  $\frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - k\omega_o)$  têm-se:

$$E^*(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} E(j\Omega) \cdot \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - k\omega_o - \Omega) d\Omega \right] \quad (91)$$

ou seja,

$$E^*(j\omega) = \frac{1}{T} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} E(j\Omega) \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - k\omega_o - \Omega) d\Omega \right]$$

$$E^*(j\omega) = \frac{1}{T} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} E(j\Omega) \cdot \delta(\omega - k\omega_o - \Omega) d\Omega \right]$$

como o integral da soma é igual à soma dos integrais,

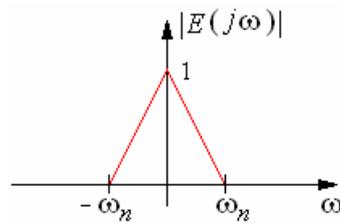
$$E^*(j\omega) = \frac{1}{T} \left[ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E(j\Omega) \cdot \delta(\omega - k\omega_o - \Omega) d\Omega \right]$$

pela propriedade de anteparo, e como  $\delta(\omega - k\omega_o - \Omega)$  só é diferente de zero para  $\omega - k\omega_o - \Omega = 0$ , i.e.  $\Omega = \omega - k\omega_o$  vêm que,

$$E^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} E(j(\omega - k\omega_o)) \quad (92)$$

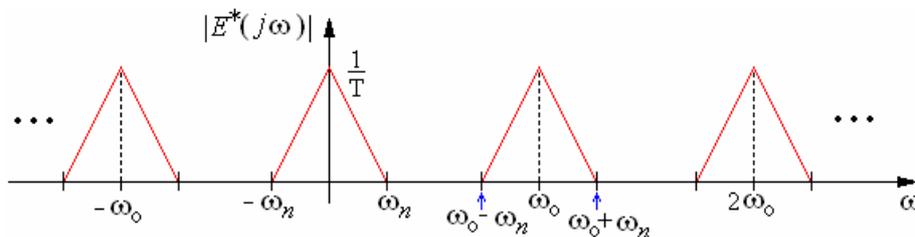
Esta expressão final significa que o espectro do sinal amostrado é periódico na frequência com período fundamental  $\omega_o$ . Mais concretamente, o espectro do sinal amostrado é igual ao espectro do sinal contínuo repetido indefinidamente com um período que depende do período de amostragem. Em termos de energia verifica-se que o espectro do sinal amostrado é  $T$  vezes inferior ao espectro do sinal contínuo.

Com o propósito de ilustrar o efeito, na frequência, do processo de amostragem considere-se um sinal  $e(t)$  limitado em banda cujo espectro possui, genericamente, o seguinte perfil:



**Fig 20. Espectro de frequências (magnitude) de um sinal genérico**

Graficamente a expressão {92} representa a sobreposição de réplicas de  $|E(j\omega)|$ , deslocadas na frequência de  $k\omega_o$  e com amplitude escalonada por  $1/T$ , como se mostra na figura subsequente.



**Fig 21. Espectro de frequências do sinal depois de amostrado**

Da figura anterior pode presumir-se que é possível reconstruir o sinal contínuo no tempo a partir da sua versão amostrada. Para isso basta *eliminar* as componentes espectrais do sinal amostrado acima e abaixo de  $\pm\omega_n$ . Essa operação pode ser realizada recorrendo a um filtro do tipo passa-baixo.

Verifica-se assim que, teoricamente, é possível, a partir de filtragem do sinal amostrado, obter o sinal contínuo no tempo que lhe deu origem. No entanto, para que esta possibilidade exista é necessário que se cumpram duas condições: a primeira refere-se à forma como o sinal é filtrado e a segunda à forma como o espectro está distribuído. Relativamente à primeira, esta será objecto de estudo na secção §2.1.4.

No que se refere à segunda condição, e observando a figura 21, conclui-se que, para a recuperação do sinal original ser possível, não é permitida a sobreposição de bandas entre réplicas adjacentes. Visto que a posição relativa entre espectros adjacentes depende da frequência da amostragem  $\omega_o$  então, é condição necessária para a invertibilidade da operação de amostragem que  $\omega_n < \omega_o - \omega_n$ , i.e.  $\omega_o > 2\omega_n$ . Esta condição reporta ao teorema de Nyquist (também designado por teorema de Shannon) que estabelece a frequência de

amostragem como sendo maior que o dobro da componente de máxima frequência (de amplitude significativa) do sinal a amostrar.

[ nota ] À frequência igual a metade da frequência de amostragem é vulgar designar por frequência de Nyquist. Esta convenção será seguida no decurso deste documento.

Caso esta condição não se cumpra, observa-se a ocorrência de um fenómeno designado por *aliasing*, i.e. assiste-se a uma forma de distorção em que as componentes do sinal com frequência maior do que metade da frequência de amostragem são transladadas para o intervalo limitado  $[-\omega_o/2, \omega_o/2]$ . O efeito da sub-amostragem de sinais contínuos no tempo será objecto de uma análise mais profunda na secção que se segue.

Para terminar adverte-se que, no domínio discreto, é frequente representar o espectro de um sinal recorrendo a uma normalização do eixo  $\omega$  por um factor igual ao período de amostragem, i.e. o eixo  $\omega$  passa a ser o eixo  $\omega_d$  e a relação entre eles pode ser expresso pela seguinte afectação:

$$\omega_d = \omega T \tag{93}$$

A frequência  $\omega_d$  é designada normalmente por frequência digital e, como se pode inferir da expressão anterior, esta frequência não tem explicitamente a noção de tempo sendo medida em radianos/amostra [12]. Decorrente desta transformação a figura 21 passa a ter a seguinte representação alternativa:

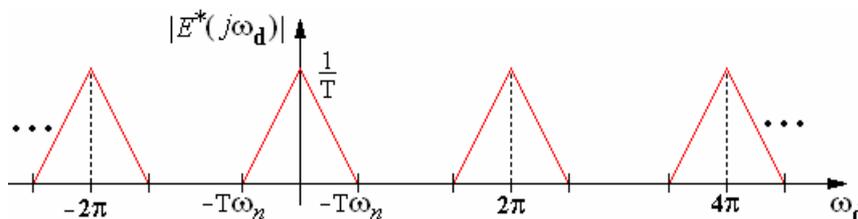


Fig 22. Espectro de frequências em função da frequência digital.

Verifica-se assim que, no domínio digital, a frequência de amostragem é igual a  $2\pi$ . De facto, substituindo na expressão {93}  $\omega$  por  $\omega_o = 2\pi/T$  obtém-se  $\omega_d = 2\pi$ . Adicionalmente, e tendo em consideração a figura anterior, a relação

entre a transformada de Fourier do sinal contínuo e da sua versão amostrada é:

$$E(j\omega) = T \cdot E^*(j\omega_d) \text{ para } -\pi < \omega_d < \pi \quad (94)$$

onde  $\pi$  corresponde a metade da frequência de amostragem, i.e. à frequência de Nyquist.

### 2.1.2 Aspectos Relativos à Distorção por Amostragem

Como já referido, um fenómeno singular pode ocorrer quando um sinal contínuo no tempo é amostrado: componentes de alta frequência do sinal analógico podem aparecer como componentes de baixa frequência (mas com amplitude inalterada) no sinal discreto. Este fenómeno é designado por *aliasing* e ocorre, como já foi visto, sempre que a frequência de amostragem é inferior ao dobro da máxima componente em frequência do sinal amostrado.

De modo a ilustrar o que acabou de ser dito considere o exemplo de um sinal simples monocromático amostrado a duas taxas distintas. O resultado pode ser avaliado atendendo à figura que se segue onde, a traço cheio, se apresenta o sinal original,

$$x(t) = \sin(4\pi t)$$

que não é mais do que um sinal sinusoidal a "girar" a uma frequência de 2Hz. Por outro lado os marcadores da figura representam as amostras adquiridas do sinal com uma frequência de 10 Hz e 2.5 Hz.

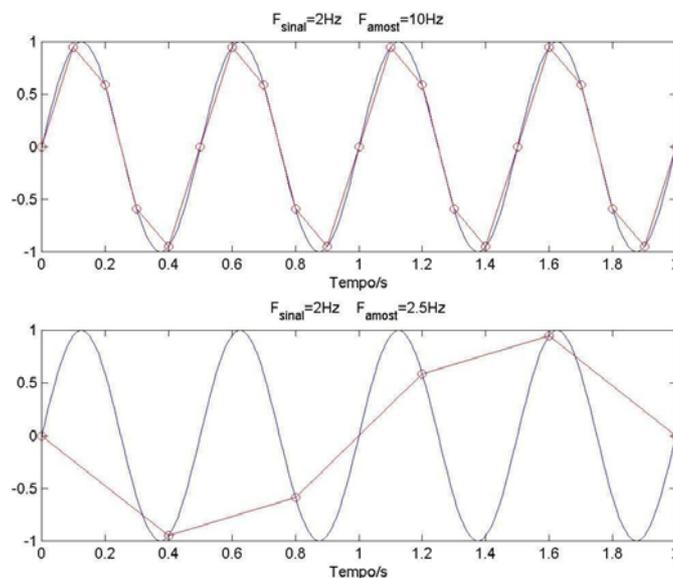


Fig 23. Efeito da frequência de amostragem: exemplo de aliasing

Note-se que, e ao contrário do que possa parecer à primeira vista, apenas as amostras fazem parte do sinal discreto. No entanto para uma melhor percepção visual do fenómeno de *aliasing* apresentam-se os marcadores unidos por um segmento de recta. Na realidade, o que se está a fazer quando se unem os pontos com segmentos de recta é uma reconstrução do sinal amostrado recorrendo a uma interpolação linear de 1ª ordem.

$$x(t) = \frac{x[k+1] - x[k]}{T}t + x[k] \quad kT \leq t \leq (k+1)T$$

Reportando-nos ainda à figura anterior verifica-se que o sinal discreto que foi sub-amostrado aparenta uma frequência inferior à frequência do sinal analógico que lhe deu origem. Mais concretamente verifica-se que a frequência do sinal digital (após a sua reconstrução) é igual a 0.5Hz!

De uma forma geral, o valor da frequência de uma dada componente de um sinal sub-amostrado pode ser calculada por [1]

$$\omega_{alias} = \left| \left( \left( \omega + \frac{\omega_o}{2} \right) \% \omega_o \right) - \frac{\omega_o}{2} \right| \quad (95)$$

onde a operação % se refere ao resto da divisão.

Outra alternativa consiste em subtrair, de forma recorrente, a frequência de amostragem da componente em frequência do sinal até que a resultante seja menor, em módulo, que a frequência de Nyquist. Nesse momento a frequência resultante é a frequência aparente do sinal. Este procedimento pode ser sumariado pela seguinte equação,

$$\omega_{alias} = \left| \omega - \omega_o \left\lfloor \frac{2\omega + \omega_o}{2\omega_o} \right\rfloor \right| \quad (96)$$

onde o operador  $\lfloor \cdot \rfloor$  retorna o valor inteiro mais próximo, por defeito, do resultado da expressão transportada como argumento.

Assim, por exemplo, se  $\omega_o = 2.5$  e  $\omega = 26$  leva a que, recorrendo à equação 95,

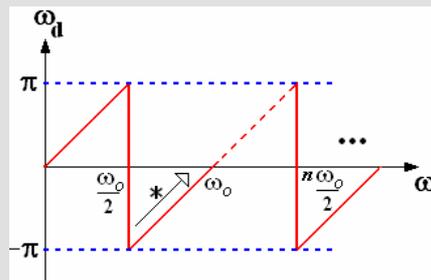
$$\omega_{alias} = \left| (27.25 \% 2.5) - 1.25 \right| = |2.25 - 1.25| = 1 \text{ rad/s}$$

Por outro lado, e atendendo ao que foi acima referido,

$$\omega_{alias} = 26 - 2.5 - 2.5 - \dots - 2.5 = 26 - 10 \cdot 2.5 = 1 \text{ rad/s}$$

[ nota ] Em sistemas de controlo o aliasing causa outro problema mais subtil. Como se sabe, num sistema contínuo no tempo, se o sinal está contaminado com ruído de alta-frequência fora da largura de banda do sistema de controlo, este normalmente não afecta a resposta do sistema. O mesmo não se passa em sistemas amostrados dado que frequências acima e abaixo de  $\pi$  serão transportadas para o intervalo de frequências de interesse.

[ nota ] Além da possível transformação de altas frequências em baixas frequências, a sub-amostragem possui também um efeito de inversão do espectro, i.e. para algumas gamas de frequências assiste-se a uma diminuição/aumento da frequência digital quando a frequência analógica aumenta/diminui. Este fenómeno pode ser evidenciado observando a figura que se segue.



Observa-se que, para frequências analógicas entre  $k\omega_0/2$  e  $k\omega_0$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}$ , o aumento da frequência analógica implica uma diminuição, em módulo, da frequência digital (lembre-se que o sinal negativo na frequência refere-se apenas a informação de fase!).

Aparentemente o problema ilustrado pela figura 23 parece simples de contornar: se se pretender amostrar um sinal analógico basta garantir que a frequência de amostragem verifica o teorema de Nyquist.

Contudo as coisas não são assim tão simples. Isto porque o espectro de frequências de um sinal analógico real nunca termina abruptamente a uma dada frequência, i.e. por norma não é possível definir um sinal analógico, adquirido num sistema real, que esteja limitado em banda como é o caso do sinal apresentado na figura 20. Genericamente o espectro estende-se de menos infinito a mais infinito o que implica que, por maior que seja a frequência

de amostragem, existirá sempre sobreposição de bandas laterais. No entanto a quase totalidade da energia do sinal está contida num intervalo finito de frequências. Deste modo as componentes em frequência a partir de um dado ponto do espectro podem (e devem) ser eliminadas ou fortemente atenuadas. Essa rejeição/atenuação está normalmente a cargo de um filtro do tipo passa-baixo colocado antes do amostrador como se mostra na figura subsequente.

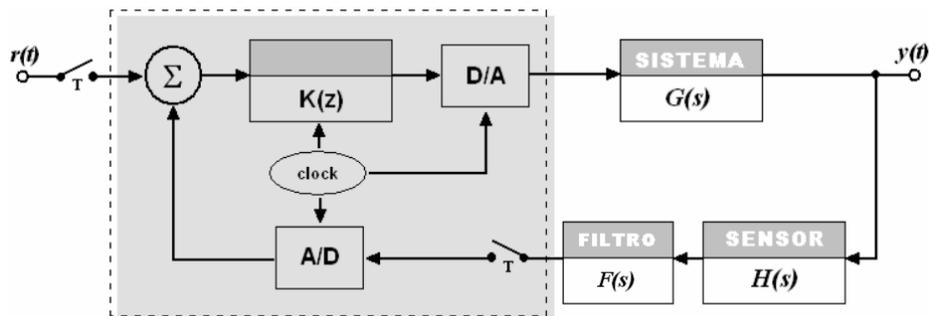


Fig 24. Redução do efeito de aliasing por introdução de um pré-filtro  $F(s)$

Como é óbvio este filtro deve ser analógico sendo, frequentemente, implementado electronicamente recorrendo a componentes activos e passivos como por exemplo amplificadores operacionais, condensadores e resistências.

Normalmente esses pré-filtros, introduzidos a montante do amostrador, são designados por filtros *anti-aliasing* e a escolha mais frequente recai num filtro do tipo passa-baixo de primeira ordem com função de transferência:

$$F(s) = \frac{\omega_o}{2} \cdot \frac{1}{s - (\omega_o/2)} \quad (97)$$

Alternativamente também é frequente encontrar filtros de ordem superior à unidade como é o caso de filtros de Butterworth e de Bessel. Estes últimos possuem a vantagem de possuir uma fase praticamente linear (dentro da gama de frequência de interesse) o que implica uma baixa distorção do perfil do sinal.

Note-se que a largura de banda do filtro anti-aliasing é, normalmente, muito superior à largura de banda do sistema. Este facto implica que a dinâmica adicional introduzida pelo filtro pode ser negligenciada no procedimento de projecto. No entanto a influência do filtro deve ser tida em consideração na simulação global do sistema de controlo. Este tema será objecto de uma análise mais profunda na secção §2.6.2.

### 2.1.3 Quantização

No contexto do controlo digital existem três factos que são, na maioria dos casos, incontornáveis.

- Um controlador digital assenta num processador digital (computador,  $\mu\text{C}$ , DSP, ASIC, etc.). É este componente o responsável por estabelecer a relação entre o sinal de controlo e a informação proveniente do sistema.
- Um processador digital trata a informação codificada em binário. Decorrente deste facto, as operações aritméticas num processador digital são efectuadas sempre com precisão finita e essa precisão depende do número de bit de resolução do dispositivo.
- Os processos a controlar são normalmente de natureza "analógica". Deste modo existe a necessidade de descodificação do sinal de controlo debitado pelo processador.

Estas considerações estão objectivamente ilustradas na figura 15 ou 24. Ignorando o tipo de processador digital identificam-se na imagem dois blocos: um conversor A/D e um conversor D/A. Cada um dos componentes executa, internamente, duas funções distintas. No que se refere ao conversor A/D este é responsável por:

- Amostrar o sinal (sample & hold);
- Codificar o sinal. i.e. atendendo a um limiar máximo e mínimo pré-definido, converte um dado valor relativo no equivalente mais próximo em binário com  $n$  bits de resolução.

[ nota ] Na prática as conversões A/D e D/A são realizadas, sobre sinais eléctricos, recorrendo a circuitos integrados.

Por outro lado o conversor D/A toma, a montante, uma "*string*" binária e, a partir de um par de limites fixo, converte-a num valor real. Para além da descodificação executa também uma operação de reconstrução que será objecto de estudo na secção subsequente.

Voltando à conversão A/D, a codificação do sinal implica a perda de informação. Isto porque, visto de outra perspectiva, um sinal com um número infinito de níveis é transformado num com um número finito de níveis, i.e.

*quantizado*. Num conversor A/D o número de níveis de quantização depende do número de bits de resolução e é da ordem de  $2^n - 1$ . Para o caso de um conversor A/D com referência balizada por  $[X_{MIN}, X_{MAX}]$ , o efeito da quantização pode ser modelada pela seguinte expressão:

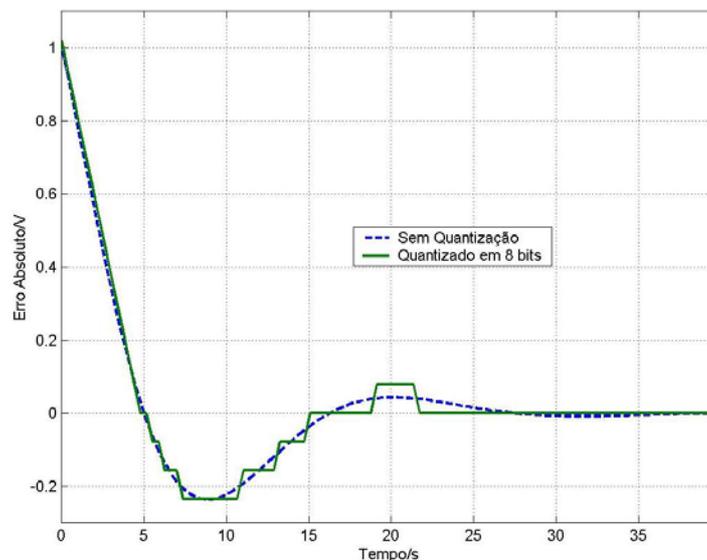
$$x_{quant}(t) = q \cdot \text{round} \{x(t)/q\} \quad (98)$$

onde,

$$q = \frac{X_{MAX} - X_{MIN}}{2^n - 1}$$

e  $n$  se refere ao número de bits do conversor. Na figura 25 mostra-se o efeito da quantização, em 8 bits, de um sinal de erro submetido a um controlador. Note-se que o desempenho da quantização depende da gama dinâmica em que a conversão se faz sentir, i.e. da relação entre os limites da amplitude do sinal e os limites do conversor A/D.

Adicionalmente, e devido à precisão finita do processador digital, um erro de truncatura ou arredondamento resultante das operações aritméticas também deve ser considerado. Se bem que este último problema não é observável quando se utiliza, por exemplo, o MatLab<sup>®</sup>, mas é por demais evidente se se pretender executar uma multiplicação num micro-controlador de 8 bits!



**Fig 25. Efeito da quantização num sinal aplicado a um controlador. (gama dinâmica de conversão entre -10 e 10 V e codificação em 8 bits)**

[ nota ] Os erros de quantização introduzidos por processadores de 16 ou 32 bits são, normalmente, negligenciáveis no contexto do controlo digital.

Por norma, nos procedimentos de projecto, o efeito da quantização é negligenciado sendo apenas analisado, no final, num ambiente de simulação.

### 2.1.4 Reconstrução

Nesta secção trata-se da problemática da reconstrução de um sinal discreto no tempo. A bem dizer, na prática, está-se mais interessado na "construção" do que na "reconstrução". Isto porque o sinal de controlo é criado discretamente e não por amostragem. Quando se fala em reconstrução normalmente têm-se em mente a recuperação de um sinal que, tendo sido contínuo, foi amostrado.

Assim sendo, numa primeira iteração, apresentam-se os conceitos matemáticos subjacentes à reconstrução de um sinal amostrado. Adicionalmente apresentam-se as condições em que esta recuperação se pode realizar. Numa segunda iteração trata-se da problemática da reconstrução (leia-se conversão!) no contexto do controlo digital. No seguimento deste assunto analisa-se a influência da dinâmica adicional introduzida pelo conversor D/A na malha de controlo.

#### 2.1.4.1 Reconstrução Ideal

Teoricamente, e se devidamente amostrado, um sinal contínuo no tempo pode ser reconstruído recorrendo a um filtro passa-baixo ideal. Para uma reconstrução conveniente é necessário que o filtro possua frequência de corte  $\omega_n < |\omega_c| < \omega_o/2$  e magnitude, na banda passante, igual a  $T$  como se mostra na figura que se segue.

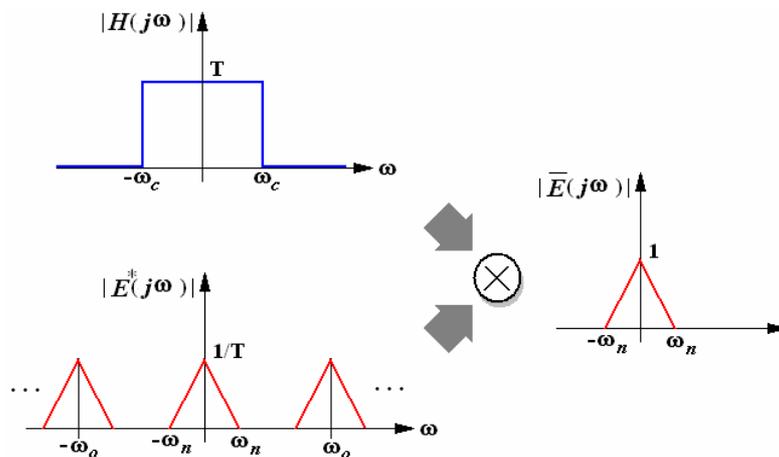


Fig 26. Reconstrução de um sinal amostrado (magnitude normalizada)

A sequência de reconstrução de um sinal contínuo no tempo a partir da sua versão amostrada passa pelo produto das transformadas de Fourier (caso existam) da sequência discreta pelo filtro passa-baixo ideal. Matematicamente o mesmo é dizer que o sinal reconstruído é:

$$\bar{E}(j\omega) = E^*(j\omega) \cdot H(j\omega) \quad (99)$$

No domínio do tempo significa que,

$$\bar{e}(t) = e^*(t) * h(t) \quad (100)$$

Por outro lado, a resposta impulsional do filtro passa-baixo ideal pode ser facilmente derivada atendendo à definição de transformada inversa de Fourier.

Deste modo,

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} T e^{j\omega t} d\omega$$

e logo,

$$h(t) = \frac{T}{2\pi} \cdot \left[ \frac{e^{j\omega t}}{jt} \right]_{-\omega_c}^{\omega_c} = \frac{T}{2\pi jt} \cdot [e^{j\omega_c t} - e^{-j\omega_c t}] = \frac{T}{\pi t} \cdot \sin(\omega_c t) = \frac{\omega_c T}{\pi} \text{sinc}(\omega_c t)$$

Considerando a equação {100} e pela definição de convolução têm-se que;

$$\bar{e}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e(kT) h(t - kT)$$

e finalmente,

$$\bar{e}(t) = \frac{\omega_c T}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e(kT) \cdot \text{sinc}(\omega_c(t - kT))$$

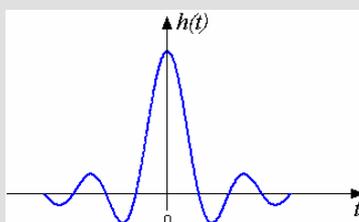
Para  $\omega_c = \frac{\omega_o}{2}$  e atendendo a que  $T = \frac{2\pi}{\omega_o}$

$$\bar{e}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e(kT) \cdot \text{sinc}\left(\frac{\omega_o}{2}(t - kT)\right) \quad (101)$$

Se bem que, matematicamente, a operação de reconstrução ideal possa ser realizável, na prática esta parte de um pressuposto inválido: a existência de um filtro ideal. De facto, e analisando a resposta impulsional do filtro, verifica-se que este é não causal e logo fisicamente irrealizável.

**[ nota ]**

Um sistema linear e invariante no tempo com resposta impulsional  $h(t)$  é causal se e só se a resposta impulsional é nula para valores de  $t < 0$ . Esta consideração é bastante intuitiva bastando, por exemplo, considerar a seguinte resposta impulsional (seno cardinal):



Como se sabe a resposta impulsional é a resposta de um sistema a um impulso. Uma resposta impulsional como aquela esboçada na figura anterior sugere que, mesmo antes de um impulso ser aplicado ao sistema já este está a responder, i.e. aplica-se um impulso  $\delta(t)$  em  $t = 0$  e a resposta do sistema antecipa-se à causa que lhe deu origem. Como é obvio, em sistemas fisicamente realizáveis, a relação causa/efeito anda emparelhada ou seja para existir um efeito, a causa que lhe deu origem já se deve ter feito sentir.

#### 2.1.4.2 Reconstrução Real

No controlo de um sistema por microprocessador, como se sabe, a informação que este necessita para calcular as necessidades de controlo é proveniente de um conversor A/D que executa duas funções distintas – a amostragem e a codificação. Esta última é necessária dado que um processador digital trabalha apenas com palavras binárias, i.e. as operações são efectuadas com precisão finita. Como já deve ser claro, a lei de controlo debita, em cada instante de amostragem, um valor numérico que deve ser aplicado ao processo através da cadeia apropriada. Em termos de hardware o valor numérico fornecido consiste numa "string" binária. Assim, a operação de descodificação deve ter lugar, i.e. a palavra deve ser reconvertida para um valor "decimal". Do resultado dessa reconversão têm-se, ignorando os efeitos da quantização, a passagem de um sinal digital para um sinal discreto no tempo.

Em sistemas de controlo digitais verifica-se normalmente que o sistema a controlar é contínuo no tempo. Deste modo, se bem que um sinal discreto possa, por vezes, ser usado directamente para a excitação dos sistemas, este

procedimento é raramente levado a cabo devido às componentes de alta frequência do sinal injectado nos actuadores. Assim o sinal de controlo, depois de decodificado, é normalmente convertido num sinal contínuo no tempo.

Analise agora como é que essa conversão pode ser feita. Na secção imediatamente anterior, a conversão sugeria o uso de um filtro analógico passa-baixo ideal. Nesta secção imagine-se o caso ilustrado pela figura subsequente.

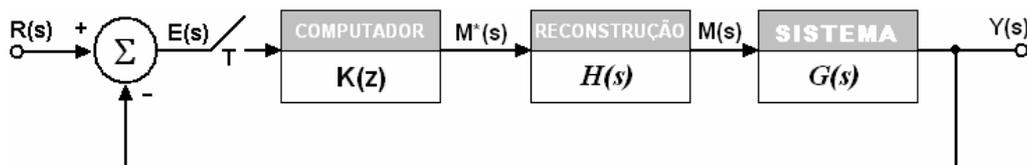


Fig 27. Controlo por microprocessador de um processo analógico

Num dado instante  $kT$  o microprocessador processou o sinal de controlo  $m^*(kT)$  recorrendo a uma qualquer lei de controlo. Esse valor é aplicado ao processo e o próximo valor do sinal de controlo será apenas aplicado no instante seguinte i.e. em  $(k+1)T$ .

*Entre os instantes discretos de tempo  $kT$  e  $(k+1)T$  que valores de controlo se devem aplicar ao sistema?*

[ nota ] No controlo em tempo-real de sistemas físicos a causalidade é uma restrição. Deste modo não se tem acesso, obviamente, aos valores futuros do sinal de controlo.

No presente apenas se conhece o sinal  $m^*(kT)$  e os seus valores passados. Logo é necessário, a partir dos dados conhecidos, tentar **prever** quais os valores do sinal de controlo entre períodos de amostragem. O mesmo é dizer que é necessário inferir quanto aos valores mais prováveis que o controlador deveria debitar entre a amostra presente e a próxima futura.

[ nota ] Este carácter predictivo do sistema de reconstrução está intimamente ligado à não-causalidade do filtro analógico ideal da secção §2.1.4.1

Uma das formas de realizar essa previsão passa pela extrapolação polinomial [13], i.e. a partir do conhecimento presente, do conhecimento passado e de um

polinómio função desse conhecimento **prevê-se** quais os valores mais prováveis do sinal de controlo entre os instantes  $kT$  e  $(k+1)T$ .

Expandindo o sinal  $m(t)$  em série de Taylor em torno do ponto  $t = kT$  vêm que:

$$m(t) = m(kT) + (t - kT) \cdot \left. \frac{dm(t)}{dt} \right|_{t=kT} + \dots + \frac{(t - kT)^p}{p!} \cdot \left. \frac{d^p m(t)}{dt^p} \right|_{t=kT} \quad (102)$$

**[ nota ]** Expansão em série de Taylor de uma função em torno de  $x = a$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(x-a)^k}{k!} \cdot \left. \frac{d^k f(x)}{dx^k} \right|_{x=a}$$

A análise da expressão anterior fornece algumas pistas relativas à impossibilidade de se conhecer, com exactidão, o valor do sinal de controlo entre amostras. Em primeiro lugar a ordem do polinómio pode ser infinita e depois, o cálculo dos seus coeficientes passa pelo conhecimento da derivada do sinal no ponto  $t = kT$ . Sabe-se, atendendo à definição de derivada, que:

$$\left. \frac{dm(t)}{dt} \right|_{t=kT} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{m(t+h) - m(t)}{h} \quad (103)$$

Como é claro, o operador derivada é não causal e requer o conhecimento de valores do sinal para instantes posteriores a  $t = kT$ . Assim, dado que apenas se possui conhecimento do presente e do passado do sinal de comando entre intervalos, no domínio discreto a derivada é aproximada como:

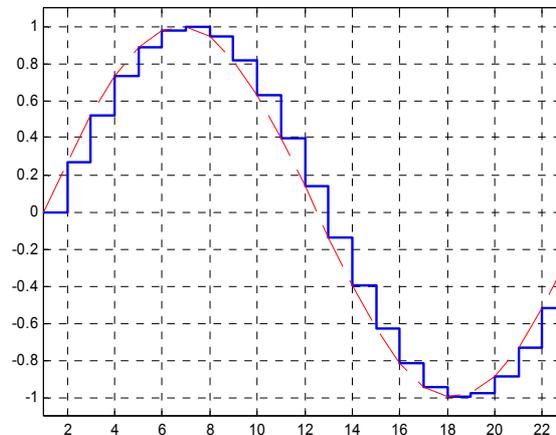
$$\left. \frac{dm(t)}{dt} \right|_{t=kT} \approx \left. \frac{m(t) - m(t-T)}{T} \right|_{t=kT} \quad \text{i.e.} \quad \frac{dm(kT)}{dt} \approx \frac{m(kT) - m((k-1)T)}{T} \quad (104)$$

Na impossibilidade de se calcularem um número infinito de derivadas a expressão {102} é truncada num determinado ponto desprezando-se as derivadas de ordem superior.

Uma das alternativas consiste em desprezar todas as derivadas de ordem superior à derivada de ordem zero. Esta estratégia conduz a um polinómio extrapolador de ordem zero normalmente designado por retentor de ordem zero (*zero order hold* - **zoh**). Deste modo, e como apenas se pretende a aproximação entre períodos de amostragem, o sinal reconstruído é:

$$m(t) = m(kT) \quad \text{para} \quad kT \leq t < (k+1)T \quad (105)$$

Ou seja a previsão efectuada é do tipo *naïve*: considera-se que o valor do sinal de comando não se altera entre amostras. No domínio do tempo o aspecto do sinal de saída de um retentor de ordem zero é:



**Fig 28. Aspecto de um sinal discreto no tempo reconstruído por um retentor de ordem zero**

Uma forma alternativa de se escrever a expressão anterior é:

$$m(t) = m(kT) \cdot [u(t - kT) - u(t - (k + 1)T)] \quad (106)$$

O retentor de ordem zero funciona como um sistema com uma entrada e uma saída. A montante aplica-se a amostra presente e a jusante o retentor debita, durante um período de amostragem, uma previsão do sinal com base nessa amostra. Deste modo se à entrada do sistema á aplicado um impulso à saída têm-se a resposta impulsional. O mesmo é dizer que a resposta impulsional do reconstrutor é,

$$h_{zoh}(t) = \delta(kT) \cdot [u(t - kT) - u(t - (k + 1)T)]$$

onde  $\delta(t)$  se refere à função impulso. Assim, por definição,  $\delta(kT)$  só é diferente de zero para  $k = 0$  e logo a expressão anterior toma a seguinte forma:

$$h_{zoh}(t) = [u(t) - u(t - T)] \quad (107)$$

Verifica-se então que o retentor de ordem zero cria um pulso de saída para cada impulso de entrada.

A resposta em frequência deste dispositivo pode, portanto, ser calculada aplicando a transformada de Fourier à expressão anterior ou, alternativamente, avaliando a sua transformada de Laplace ao longo do eixo  $j\omega$ .

Segundo esta última estratégia,

$$H(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-sT}}{s} = \frac{1 - e^{-sT}}{s} \quad (108)$$

Como  $H(j\omega) = H(s)_{s=j\omega}$ ,

$$H(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega} \quad (109)$$

ou seja,

$$H(j\omega) = e^{-j\omega \frac{T}{2}} \left\{ \frac{e^{j\omega \frac{T}{2}} - e^{-j\omega \frac{T}{2}}}{j\omega} \right\}$$

Atendendo às identidades de Euler vêm que,

$$H(j\omega) = 2 \frac{e^{-j\omega \frac{T}{2}}}{\omega} \sin\left(\omega \frac{T}{2}\right)$$

ou seja

$$H(j\omega) = T \cdot \text{sinc}\left(\omega \frac{T}{2}\right) \cdot e^{-j\omega \frac{T}{2}}$$

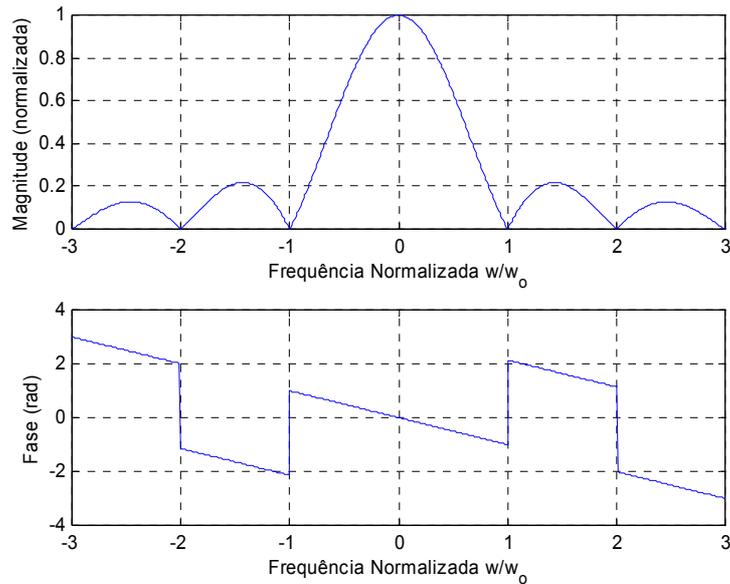
e finalmente se atendermos a que  $\omega_o = \frac{2\pi}{T}$

$$H(j\omega) = T \cdot \text{sinc}\left(\pi \frac{\omega}{\omega_o}\right) \cdot e^{-j\pi \frac{\omega}{\omega_o}} \quad (110)$$

**[ nota ]** Identidades de Euler

$$\cos(\theta) = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} \quad \text{e} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

Um esboço da resposta em frequência do retentor de ordem zero é ilustrado na figura que se segue. Como se pode analisar da equação {110}, a amplitude da resposta em frequência será sinusoidal amortecida (seno cardinal) e as passagens por zero ocorrerão em múltiplos inteiros de  $\omega_o$ . A amplitude do espectro depende do período de amostragem e a fase varia linearmente com a frequência. No entanto como se pode ver na figura que se segue existem picos indesejados em múltiplos ímpares da frequência de Nyquist, i.e.  $(2p+1)\omega_o/2$ ,  $p = 1, 2, \dots$ .



**Fig 29. Resposta em frequência de um retentor de ordem zero (magnitude normalizada)**

Note-se ainda que, à frequência de Nyquist, a atenuação é aproximadamente 4dB e que o ganho em banda passante não é constante. Decorrente desta última assiste-se a uma distorção do espectro do sinal aplicado a montante. Adicionalmente, da expressão {110}, pode concluir-se que o desempenho do *zoh* como extrapolarador depende fortemente da frequência de amostragem. De facto se  $\omega_0 \rightarrow \infty$  então  $H(j\omega) \rightarrow T$  o que significa que o sinal de saída pode ser feito arbitrariamente próximo da entrada conquanto o período de amostragem seja arbitrariamente pequeno.

Para concluir chama-se à atenção que, se bem que outras estratégias de reconstrução possam ser derivadas, como por exemplo os retentores de primeira ordem (ver problema E21) o retentor de ordem zero é, de longe, o mais utilizado e portanto não se aprofundará mais este assunto (de facto, um conversor D/A integrado executa exactamente essa função!)

### 2.1.4.3 Efeito da Dinâmica do ZOH

A função de transferência de um retentor de ordem zero é, como já demonstrado, igual a:

$$G_{zoh}(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s} \quad (111)$$

Recorrendo a esta expressão vamos retirar duas ilações importantes. Primeiro, e atendendo ao teorema do valor final, vemos que:

$$\lim_{s \rightarrow 0} G_{zoh}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-sT}}{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (112)$$

Do que resulta uma indeterminação do tipo zero sobre zero. Recorrendo à regra de l'Hopital vêem que,

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-sT}}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} T \frac{e^{-sT}}{1} = T \quad (113)$$

Recordando o início deste capítulo viu-se que o processo de amostragem possui, como efeito colateral, o escalonamento da amplitude do espectro por um factor inversamente proporcional ao período de amostragem, i.e.

$$E^*(j\omega) = \frac{1}{T} E(j\omega) \text{ para } -\frac{\omega_o}{2} < \omega < \frac{\omega_o}{2} \quad (114)$$

Deste modo, se um retentor de ordem zero for usado a montante do sistema a controlar não é necessário ajustar o ganho do controlador (este conceito será objecto de revisão mais à frente quando se falar na transformada em  $z$ ).

Para analisar outro pormenor a respeito da função de transferência de *zoh* começa-se por expandir  $G_{zoh}(s)$  em série de Taylor em torno de  $T = 0$ :

$$e^{-sT} = 1 - sT + \frac{1}{2}(sT)^2 - \frac{1}{6}(sT)^3 + \frac{1}{24}(sT)^4 - \frac{1}{120}(sT)^5 + \dots$$

Substituindo na equação (109) vêem que,

$$G_{zoh}(s) = \frac{1 - \left(1 - sT + \frac{1}{2}(sT)^2 - \frac{1}{6}(sT)^3 + \frac{1}{24}(sT)^4 - \frac{1}{120}(sT)^5 + \dots\right)}{s}$$

Após simplificação fica:

$$G_{zoh}(s) = T \left(1 - \frac{1}{2}(sT) + \frac{1}{6}(sT)^2 - \frac{1}{24}(sT)^3 + \frac{1}{120}(sT)^4 - \dots\right)$$

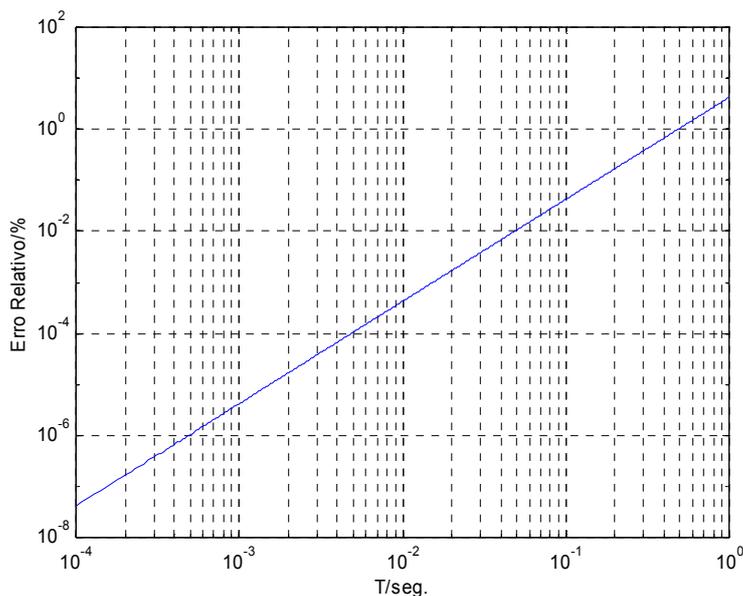
Por outro lado é fácil demonstrar que:

$$T \cdot e^{-\frac{sT}{2}} = T \left(1 - \frac{1}{2}sT + \frac{1}{8}(sT)^2 - \frac{1}{48}(sT)^3 + \frac{1}{384}(sT)^4 - \dots\right)$$

Desprezando os termos de ordem superior a um verifica-se que:

$$G_{zoh}(s) \approx T \cdot e^{-\frac{sT}{2}} \quad (115)$$

De facto, e como se pode ver na figura que se segue, a aproximação é tanto mais exacta quanto menor for o período de amostragem.



**Fig 30. Erro relativo da aproximação  $G_{zoh}(s) \approx T \cdot e^{-sT/2}$**

Esta expressão aproximada é bastante útil no projecto de controladores recorrendo a técnicas baseadas na resposta em frequência como é o caso dos diagramas de Bode. Assim, em termos de diagramas de Bode, um retentor de ordem zero contribui com um ganho igual a  $20 \cdot \log_{10}(T)$  e com uma fase que decresce linearmente com a frequência com uma inclinação igual a metade do período de amostragem (atraso puro no tempo). Quanto maior o período de amostragem, maior é a inclinação da recta de fase e maior é a influência do retentor na resposta em frequência. Isto porque um atraso numa malha de controlo é sempre causa de instabilidade ou de redução no amortecimento.

**[ nota ]** Como se verá mais à frente, o retentor de ordem zero contribui para a destabilização do sistema por diminuição da margem de fase. Essa diminuição será tanto mais considerável quanto maior for o período de amostragem, i.e. menores frequências de amostragem. No entanto, e atendendo à figura 30, para períodos de amostragem relativamente elevados a aproximação {115} apenas fornece resultados, também eles, aproximados.

Quando o método de projecto recai em ferramentas baseadas no domínio do tempo, como por exemplo o lugar das raízes, frequentemente um atraso puro

no tempo de  $T/2$  segundos pode ser modelado, de forma muito rude, por um sistema de primeira ordem do tipo,

$$G_{zoh}(s) \approx T \frac{2/T}{s + 2/T} \quad (116)$$

Uma forma alternativa consiste em exprimir o atraso puro no tempo recorrendo à aproximação de Padé [6]. Esta estratégia consiste em encontrar um conjunto de parâmetros de modo a minimizar o erro entre a expansão em série de McLaurin da exponencial e de uma função de transferência própria de ordem arbitrária  $k$ . Mais concretamente, e para o caso da aproximação de ordem um, a estimação de Padé prende-se com a solução do seguinte problema de minimização:

$$\min(\varepsilon) = \min \left\{ \Upsilon(e^{-sT_d}) - \Upsilon\left(\frac{b_1s + b_0}{a_1s + 1}\right) \right\} \quad (117)$$

onde  $\Upsilon(\cdot)$  se refere à expansão em série de McLaurin da função em  $s$  transportada como argumento. É de notar que a exponencial complexa é analítica para qualquer valor finito de  $s$ , i.e. admite derivada de ordem  $n$ . Deste modo, e dado que a expansão em série de ambas as componentes consiste na soma de um número infinito de termos, a minimização de {117} envolve a solução de uma infinidade de equações com um número finito de incógnitas. Assim, por exemplo, para o caso da aproximação de ordem um, a solução do problema de minimização possui apenas três graus de liberdade e logo, a expansão em série de McLaurin é feita apenas até à ordem três.

Para o caso do retentor de ordem zero, a aproximação de Padé de primeira ordem é:

$$G_{zoh}(s) \approx T \frac{1 - (T/4)s}{1 + (T/4)s} \quad (118)$$

Qualquer uma das aproximações anteriores do  $zoh$  pode ser usada de modo a estimar o impacto negativo, na estabilidade do sistema, devido à amostragem. A aproximação {115} é especialmente apropriada para técnicas no domínio da frequência e as equações {116} ou {118} para técnicas no domínio do tempo.

Na figura que se segue ilustra-se a qualidade da aproximação {115}.

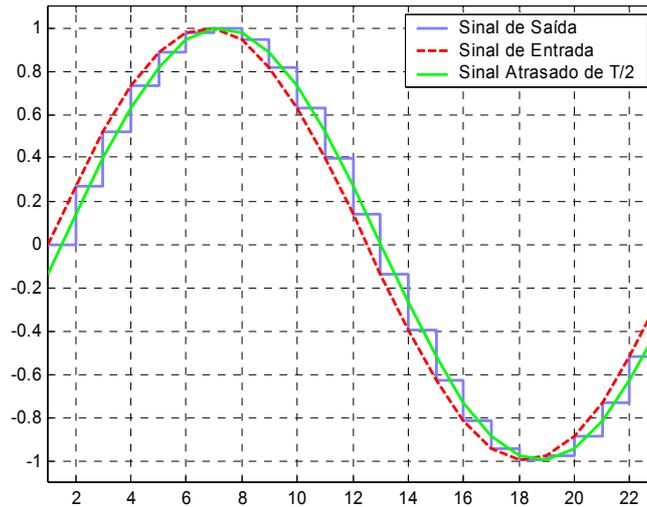


Fig 31. Resposta no tempo de um retentor de ordem zero e do seu modelo aproximado para a análise de sistemas de controlo digitais no domínio da frequência

## 2.2 A Transformada em Estrela e a Transformada Z

A operação de um amostrador/retentor de ordem zero, ilustrada na figura que se segue, pode ser analisada atendendo à forma de onda da figura 33.

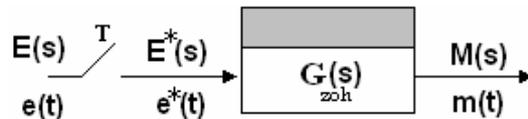


Fig 32. Diagrama de blocos de um amostrador / retentor de ordem zero

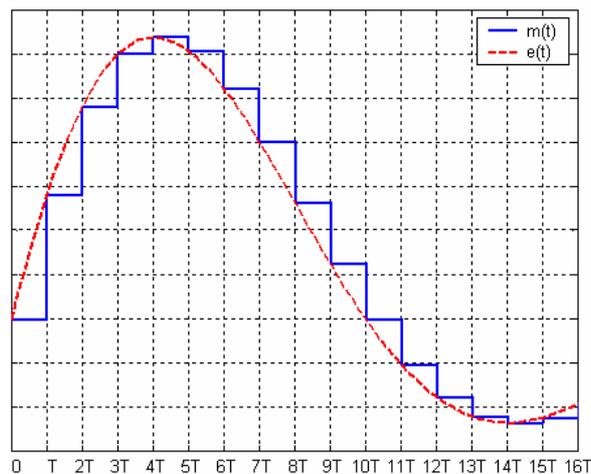


Fig 33. Exemplo genérico de um sinal aplicado a montante do sistema da figura 32 e respectivo sinal de saída.

Observa-se, de facto, que  $m(t) = e(t)|_{t=kT}$  e, entre instantes de amostragem, o sinal reconstruído pode ser escrito como:

$$m(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} e(kT) \cdot \{u(t - kT) - u(t - (k + 1)T)\} \quad (119)$$

Aplicando a transformada de Laplace vêm que:

$$M(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} e(kT) \left\{ \frac{e^{-kTs}}{s} - \frac{e^{-(k+1)Ts}}{s} \right\}$$

$$M(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} e(kT) \cdot e^{-kTs} \cdot \left\{ \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \right\}$$

factorizando  $\frac{1 - e^{-Ts}}{s}$  vêm que:

$$M(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} e(kT) \cdot e^{-kTs} \quad (120)$$

Como se pode ver, o termo factorizado é independente do sinal de entrada  $e(t)$  e corresponde à função de transferência de um elemento já nosso conhecido: o retentor de ordem zero.

Por outro lado, o factor

$$\sum_{k=0}^{+\infty} e(kT) \cdot e^{-kTs}$$

depende tanto do período de amostragem como do sinal de entrada e representa, no domínio do tempo, uma soma ponderada de impulsos deslocados no tempo, i.e. o produto do sinal de entrada  $e(t)$  por um trem de impulsos periódico com período  $T$ . Assim, este segundo factor representa a acção do amostrador ideal e define-se, como já referenciado em §2.1.1, como  $E^*(s)$ .

Decorrente do que foi acima dito, o sinal de saída de um amostrador ideal é definido como o sinal cuja transformada de Laplace é:

$$E^*(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} e(kT) \cdot e^{-kTs} \quad (121)$$

Se  $e(t)$  for descontínua em  $t = kT$  então  $e(kT)$  é tomada em  $e(kT^+)$ , i.e. valor que  $e(t)$  toma quando  $t$  se aproxima de  $kT$  por valores à direita. A  $E^*(s)$  é chamada de transformada em estrela de  $E(s)$ .

Por outro lado, ainda que sem intenção explicita, a transformada em estrela foi

já definida na secção §2.1.1 segundo uma perspectiva distinta. Demonstrou-se então que uma definição alternativa para a transformada em estrela seria:

$$E^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} E(j(\omega - k\omega_o))$$

que no domínio de Laplace possui o seguinte aspecto:

$$E^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} E(s - jk\omega_o) \quad (122)$$

A partir desta expressão retira-se uma das primeiras propriedades da transformada em estrela:

*A transformada  $E^*(s)$  é periódica em  $s$  com período  $j\omega_o$  onde  $\omega_o$  se refere ao período de amostragem.*

Esta conclusão pode ser reforçada se se atender a que na secção §2.2.1 se mostrou que  $E^*(j\omega)$  não é mais do que, a menos de um factor de escala, o espectro do sinal  $E(j\omega)$  repetido de  $\omega_o$  em  $\omega_o$ .

Outra das propriedades fundamentais da transformada em estrela diz que:

*Se  $E(s)$  possuir um pólo em  $s = a$  então a sua transformada em estrela possui um número infinito de pólos localizados, segundo o plano  $s$ , em  $s = a - jk\omega_o$  para qualquer  $k \in \mathbb{Z}$ .*

É de notar que o mesmo não pode ser dito a respeito dos zeros. Assim, apesar de verificarem a primeira propriedade, por norma os zeros não são mapeados no plano  $s$  da mesma forma que os pólos como veremos mais adiante com um exemplo.

Ainda no contexto desta última propriedade imagine-se um sistema de segunda ordem com um par de pólos complexos conjugados da forma

$$E(s) = \frac{1}{(s + \sigma - j\omega)(s + \sigma + j\omega)}, \quad \forall \sigma \in \mathbb{R}^+, \forall \omega \in \mathbb{R}$$

Se  $\omega < \omega_o/2$  então os pólos de  $E^*(s)$  são  $s = -\sigma \pm j(\omega - k\omega_o)$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}$  e o mapa de pólos possui o seguinte aspecto.

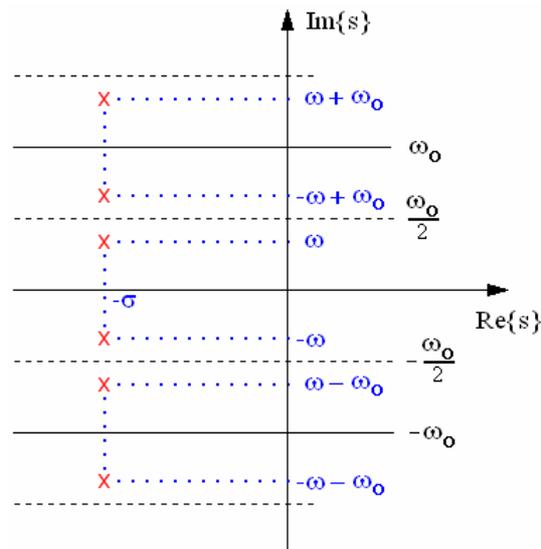


Fig 34. Mapa de pólos da transformada em estrela de um sistema de segunda ordem sub-amortecido.

[ nota ] Normalmente a faixa de frequências entre  $[-\omega_o/2, \omega_o/2]$  é designada por faixa primária e as restantes por faixas complementares.

A questão que agora se põe é:

*Será que, para um qualquer par distinto de pólos de  $E(s)$ , o mapa de pólos e zeros de  $E^*(s)$  também é distinto?*

De facto **não!** Se considerarmos, por exemplo,  $\omega = \omega_o/4$  então o mapa de pólos de  $E^*(s)$  referente a esses pólos é exactamente idêntico ao mapa de pólos e zeros que se obteria se  $\omega = 3\omega_o/4$ . De um modo geral pode dizer-se que qualquer pólo de  $E(s)$  localizado em  $s = -\sigma \pm j(\omega - k\omega_o)$  resultará num mapa de pólos de  $E^*(s)$  idêntico. Esta afirmação pode ser observada na figura que se segue.

Se considerarmos apenas a faixa primária, e se aplicarmos a transformada inversa de Laplace, observa-se que, enquanto o sinal referente ao plano  $s$  mais à esquerda mantém a sua frequência já o referente ao plano mais à direita possuirá uma frequência menor. O que acabou de ser dito remete-nos ao problema da distorção de frequências por aliasing (ver secção §2.1.2). De facto, no segundo caso, os modos do sinal estão acima da frequência de amostragem. Assim, e eliminando as faixas secundárias, assiste-se ao

surgimento de um sinal (ou sistema) com uma frequência (natural) menor do que aquela do sistema ou sinal que lhe deu origem antes da amostragem i.e. a localização dos pólos é distorcida.

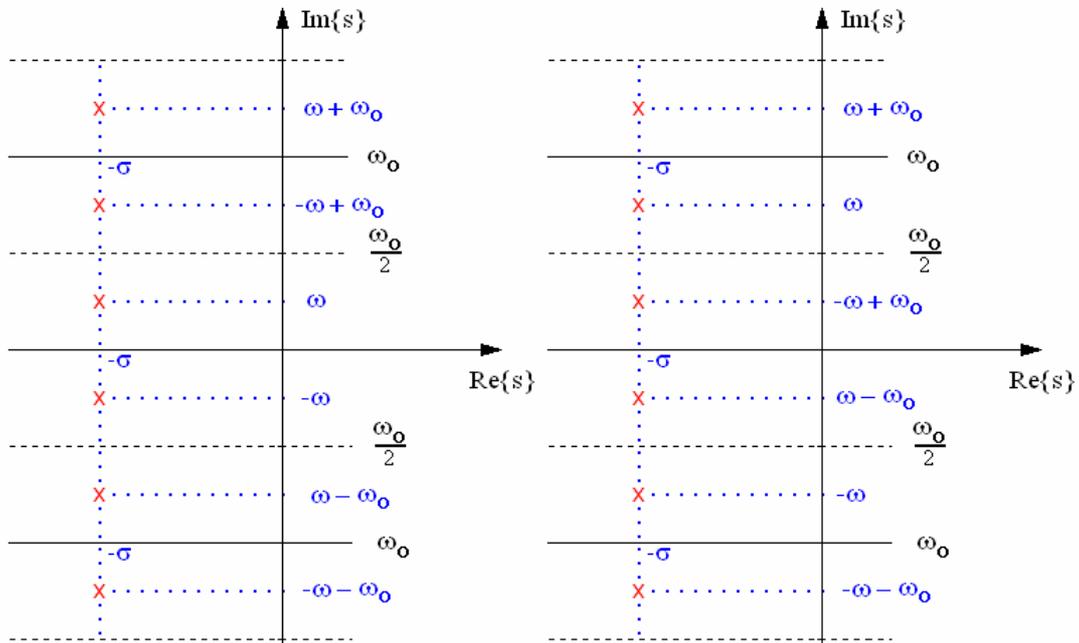


Fig 35. Mapa de pólos para o mesmo sistema contínuo amostrado a taxas distintas.

### 2.2.1 Avaliação, em Forma Fechada, de $E^*(s)$

A forma apresentada anteriormente para a transformada em estrela (equações {121} e {122}) possui uma aplicabilidade algébrica limitada, normalmente restringida apenas a séries temporais. Uma forma alternativa para o cálculo da transformada em estrela de um sistema, no caso em que a função de transferência em Laplace é dada, resulta da aplicação da seguinte relação [13].

$$E^*(s) = \sum_{\substack{\text{nos pólos} \\ \text{de } E(\lambda)}} \text{Res} \left\{ E(\lambda) \cdot \frac{1}{1 - e^{-T(s-\lambda)}} \right\} \quad (123)$$

onde  $\text{Res}\{\cdot\}$  se refere aos resíduos da expressão transportada como argumento. O cálculo dos resíduos associados a cada um dos pólos segue uma das seguintes possibilidades:

- Se o sistema possui um pólo simples em  $s = a$  então,

$$\text{Res} \left\{ \frac{E(\lambda)}{1 - e^{-T(s-\lambda)}} \right\} \Bigg|_{\lambda=a} = (\lambda - a) \frac{E(\lambda)}{1 - e^{-T(s-\lambda)}} \Bigg|_{\lambda=a}$$

- Se o sistema possui um pólo múltiplo em  $s = a$  de multiplicidade  $m$  então,

$$\text{Res} \left\{ \frac{E(\lambda)}{1 - e^{-T(s-\lambda)}} \right\} \Big|_{\lambda=a} = \frac{1}{(m-1)!} \left( \frac{d^{m-1}}{d\lambda^{m-1}} \left[ (\lambda - a)^m \frac{E(\lambda)}{1 - e^{-T(s-\lambda)}} \right] \right) \Big|_{\lambda=a}$$

Nos casos em que a função de transferência do sistema inclui um atraso (avanço) puro no tempo múltiplo inteiro do período de amostragem, i.e. se,

$$E(s) = e^{\pm kTs} \cdot E'(s), \forall k \in \mathbb{Z}$$

então,

$$E^*(s) = e^{\pm kTs} \sum_{\substack{\text{nos pólos} \\ \text{de } E'(\lambda)}} \text{Res} \left\{ E'(\lambda) \cdot (1 - e^{-T(s-\lambda)})^{-1} \right\}$$

Uns parágrafos atrás, quando se falou nas propriedades da transformada em estrela, disse-se que os zeros da função de transferência contínua não eram mapeados da mesma forma que os pólos. Esta afirmação pode ser validada atendendo ao seguinte sistema de fase mínima:

$$E(s) = \frac{s+a}{s+b}$$

pelo teorema dos resíduos obtém-se:

$$E^*(s) = \lambda + b \frac{\lambda + a}{\lambda + b} \frac{1}{1 - e^{-T(s-\lambda)}} \Big|_{\lambda=-b}$$

o que leva a que,

$$E^*(s) = \frac{(a-b)}{1 - e^{-Ts} \cdot e^{-Tb}}$$

O pólo de  $E^*(s)$  está localizado em:

$$1 - e^{-Ts} \cdot e^{-Tb} = 0 \Rightarrow e^{-Ts} = e^{Tb} \Rightarrow s = -b$$

No entanto a função exponencial complexa é periódica com período  $2k\pi$  para todo  $k \in \mathbb{Z}$  (basta analisar a fórmula de Euler!). Assim,

$$1 - e^{-Ts} \cdot e^{-Tb} = 0 \Leftrightarrow 1 - e^{-T(s+j2k\pi T^{-1})} \cdot e^{Tb} = 0$$

como  $\omega_o = 2\pi/T$

$$1 - e^{-T(s+jk\omega_o)} \cdot e^{Tb} = 0$$

de onde vêm que  $s = -b - jk\omega_o$ . Assim, como prevíamos, os pólos no interior da faixa primária possuem a mesma localização dos pólos de  $E(s)$ . Por outro lado, conquanto  $E(s)$  possua um zero finito,  $E^*(s)$  não possui zeros finitos!

## 2.2.2 Transformada em Z

Como veremos mais à frente, a transformada em estrela é uma ferramenta útil na análise de sistemas de controlo discretos no tempo. Contudo, a função de transferência de um sistema amostrado, e ao contrário dos sistemas contínuos, não aparece como uma razão de polinómios (note-se a exponencial complexa no exemplo da secção anterior). Mais ainda, e recordando o aspecto do mapa de pólos e zeros de um sistema amostrado, verificamos que estes são em número infinito o que não simplifica em nada o procedimento de análise do sistema a partir da localização das singularidades. Assim, uma estratégia alternativa é apresentada.

Essa nova estratégia não é mais do que uma mudança de variável, i.e. em  $E^*(s)$  substitui-se  $e^{sT}$  pela variável  $z$ . Com este procedimento consegue-se, numa primeira análise, escrever a função de transferência de um sistema analógico amostrado como uma razão de polinómios em  $z$ . Esta transformação é apropriadamente designada por transformação em  $z$  e, relativamente à transformada em estrela, pode ser descrita matematicamente como:

$$E(z) = E^*(s) \Big|_{z=e^{sT}} \quad (124)$$

Da mesma forma as equações {121} e {123} podem tomar um aspecto alternativo em função de  $z$  como se mostra subsequentemente.

$$E(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e(kT) \cdot z^{-k} \quad (\text{transformada bilateral}) \quad (125)$$

$$E(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} e(kT) \cdot z^{-k} \quad (\text{transformada unilateral})$$

$$E(z) = \sum_{\substack{\text{nos pólos} \\ \text{de } E(\lambda)}} \text{Res} \left\{ E(\lambda) \cdot (1 - z^{-1} e^{T\lambda})^{-1} \right\} \quad (126)$$

A transformada em  $z$ , tendo sido derivada a partir da transformada de Laplace, herda muitas das suas características. Do mesmo modo que se definia um conjunto de valores de  $s$  para os quais a transformada de Laplace existia (região de convergência), também na transformada em  $z$  a convergência é assegurada se  $|E(z)| < \infty$ , i.e.,

$$|E(z)| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} e(kT)z^{-k} \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |e(kT)| |z^{-1}|^k < \infty \quad (127)$$

O conjunto de valores de  $z$  para os quais a transformada converge é chamada de região de convergência. Como veremos mais adiante, graficamente, a região de convergência consiste num anel no plano  $z$  centrada na origem cujos limites superior e inferior podem ser um círculo ou estender-se no infinito.

[ nota ] A transformada de Laplace está para os sistemas contínuos no tempo como a transformada em  $z$  está para os discretos

A transformada em  $z$ , derivada da transformada de Laplace herda muitas das suas propriedades. Em jeito de resumo apresenta-se, na caixa de texto subsequente, algumas das propriedades da transformada  $z$ . Este assunto é explorado minuciosamente em [12] e [14]

[ propriedades ]

**Linearidade**

$$z \{ a \cdot e(kT) + b \cdot f(kT) \} = a \cdot E(z) + b \cdot F(z), \forall a, b$$

**Deslocamento no Tempo**

$$z \{ e(kT - nT) \cdot u(kT - nT) \} = z^{-n} \cdot E(z)$$

**Teorema do Valor Final**

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)E(z)$$

### 2.2.3 Transformada Modificada de Z

Na secção §2.2.1 quando se falou em sistemas com atrasos puros no tempo, múltiplos inteiros da frequência de amostragem, disse-se que estes admitem representação, em termos de transformada em estrela, igual a:

$$E^*(s) = e^{\pm skT} \sum_{\substack{\text{nos pólos} \\ \text{de } E'(\lambda)}} \text{Res} \left\{ E'(\lambda) \cdot (1 - e^{-T(s-\lambda)})^{-1} \right\} \quad (128)$$

onde  $E'(s)$  se refere apenas á componente polinomial da função de transferência. Da mesma forma e atendendo ao que foi dito na secção §2.2.2, a equação anterior passa a ter o seguinte aspecto no domínio  $z$ .

$$E(z) = z^{\pm k} \sum_{\substack{\text{nos pólos} \\ \text{de } E'(\lambda)}} \text{Res} \left\{ E'(\lambda) \cdot (1 - z^{-1} e^{T\lambda})^{-1} \right\} \quad (129)$$

No entanto como determinar a transformada em  $z$  de um sistema, cujo atraso puro no tempo, não é múltiplo inteiro do período de amostragem? Por exemplo o sistema,

$$E(s) = \frac{e^{-1.2s}}{s+1}$$

amostrado a uma taxa  $T = 0.013$  ?

Para analisar sistemas deste tipo é necessário a transformada  $z$  da função atraso no tempo. Como já se viu anteriormente, a transformada em estrela de um sinal  $e(t)$  consiste na transformada de Laplace do produto desse sinal por uma sequência periódica de impulsos de período  $T$ , i.e.

$$E^*(s) = \mathcal{L} \left( e(t) \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \delta(t - kT) \right)$$

O atraso puro no tempo do sinal consiste no seu deslocamento no sentido crescente do eixo do tempo. Deste modo, deslocando o sinal  $e(t)$  de uma quantidade fraccional do período de amostragem digamos  $\Delta T$  com

$$\Delta T = (1 - m)T \text{ com } 0 \leq m \leq 1$$

a expressão anterior toma a seguinte forma:

$$E^*(s) = \mathcal{L} \left( e(t - (1 - m)T) \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \delta(t - kT) \right) \quad (130)$$

**Note-se que a amostragem não é atrasada: apenas o sinal o é!** Assim, dado que a função passa a ser agora dependente de um parâmetro adicional ( $m$ ), a equação anterior é reescrita como:

$$E^*(s, m) = \mathcal{L} \left( e(t - (1 - m)T) \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \delta(t - kT) \right)$$

Atendendo a que a transformada em estrela é idêntica à transformada em  $z$  para  $z = e^{sT}$  então,

$$E(z, m) = E^*(s, m) \Big|_{z=e^{sT}} = \mathcal{L} \left( e^{(t-(1-m)T)} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \delta(t-kT) \right) \Big|_{z=e^{sT}}$$

ou,

$$E(z, m) = \mathcal{L} \left( e^{(t-T+mT)} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \delta(t-kT) \right) \Big|_{z=e^{sT}}$$

Dado que, como já foi referido, os atrasos puros múltiplos inteiros do período de amostragem podem ser factorizados, a expressão anterior passa a ter o seguinte aspecto,

$$E(z, m) = e^{-sT} \mathcal{L} \left( e^{(t+mT)} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \delta(t-kT) \right) \Big|_{z=e^{sT}}$$

i.e.,

$$E(z, m) = z^{-1} \mathcal{L} \left( e^{(t+mT)} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \delta(t-kT) \right) \Big|_{z=e^{sT}} \quad (131)$$

Sabe-se que a transformada de Laplace do produto de duas variáveis no tempo é dada pelo integral de convolução complexo.

[ nota ]

Considerando que  $x(t) \xleftrightarrow[\mathcal{L}^{-1}]{\mathcal{L}} X(s)$  e que  $y(t) \xleftrightarrow[\mathcal{L}^{-1}]{\mathcal{L}} Y(s)$

$$x(t) \cdot y(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(\lambda) \cdot Y(s-\lambda) d\lambda$$

Este integral pode ser resolvido recorrendo a um teorema derivado da análise complexa: o método dos resíduos (o mesmo método usado para derivar as equações {123} e {126}).

[ nota ]

Considerando que  $x(t) \xleftrightarrow[\mathcal{L}^{-1}]{\mathcal{L}} X(s)$  e que  $y(t) \xleftrightarrow[\mathcal{L}^{-1}]{\mathcal{L}} Y(s)$

$$\mathcal{L} [x(t) \cdot y(t)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(\lambda) \cdot Y(s-\lambda) d\lambda = \sum_{\substack{\text{Nos pólos} \\ \text{de } X(\lambda)}} \text{Res} \{ X(\lambda) Y(s-\lambda) \}$$

Assim, considerando que  $e(t)$  possui transformada de Laplace  $E(s)$  e que a sequência de impulsos possui transformada de Laplace igual a :

$$\Delta(s) = \mathcal{L} \left[ \sum_{k=0}^{+\infty} \delta(t - kT) \right] = \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \delta(t - kT) \cdot e^{-st} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-skT} \quad (\text{unilateral}) \quad (132)$$

que, como  $\Delta(s)$  é uma série geométrica de razão  $e^{-sT}$ , vêm que,

$$\Delta(s) = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \quad (133)$$

**[ nota ]** Soma dos termos de uma progressão geométrica:

$$\sum_{k=a}^b r^k = \frac{r^a - r^{b+1}}{1 - r}$$

Deste modo, e atendendo ao teorema dos resíduos, a expressão {131} passa a ter o seguinte aspecto:

$$E(z, m) = z^{-1} \left[ \sum_{\substack{\text{nos pólos} \\ \text{de } E(\lambda)}} \text{Res} \left\{ e^{mT\lambda} E(\lambda) \cdot \Delta(s - \lambda) \right\} \right]_{z=e^{sT}} \quad (134)$$

Substituindo  $\Delta(s - \lambda)$  pela expressão {133} avaliada em  $s = s - \lambda$ , a expressão anterior passa a ter a forma,

$$E(z, m) = z^{-1} \left[ \sum_{\substack{\text{nos pólos} \\ \text{de } E(\lambda)}} \text{Res} \left\{ e^{mT\lambda} E(\lambda) \cdot \frac{1}{1 - e^{-T(s-\lambda)}} \right\} \right]_{z=e^{sT}} \quad (135)$$

ou seja,

$$E(z, m) = z^{-1} \left[ \sum_{\substack{\text{nos pólos} \\ \text{de } E(\lambda)}} \text{Res} \left\{ e^{mT\lambda} E(\lambda) \cdot \frac{1}{1 - z^{-1} e^{T\lambda}} \right\} \right] \quad (136)$$

Que denota a forma mais expedita de cálculo da transformada modificada de  $z$  a partir da transformada de Laplace do sinal ou sistema.

Uma forma alternativa de estabelecer a transformada modificada de  $z$  consiste, a partir da expressão {130}, verificar que,

$$E^*(s, m) = \mathcal{L} \left( e^{(t-(1-m)T)} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \delta(t-kT) \right) = \mathcal{L} \left( \sum_{k=0}^{+\infty} e^{(t-(1-m)T)} \cdot \delta(t-kT) \right)$$

Atendendo à definição de impulso discreto a equação anterior fica com o seguinte aspecto:

$$E^*(s, m) = \mathcal{L} \left( \sum_{k=0}^{+\infty} e^{(kT-(1-m)T)} \cdot \delta(t-kT) \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{(kT-(1-m)T)} \cdot e^{-kTs}$$

Para  $k=0$   $E^*(s, m) = \mathcal{L} \{ e^{-(1-m)T} \delta(t) \}$ . Como  $(1-m)T$  é sempre positivo  $\forall m \in [0, 1]$  então  $-(1-m)T$  reflecte um valor negativo. Adicionalmente, como se considera  $e(t) = 0$  para  $t < 0$ , a relação anterior passa a ter a seguinte forma,

$$E^*(s, m) = \sum_{k=1}^{+\infty} e^{(kT-(1-m)T)} \cdot e^{-kTs}$$

o que leva à seguinte formulação para a transformada modificada de  $z$  :

$$E(z, m) = \sum_{k=1}^{+\infty} e^{(kT-(1-m)T)} \cdot z^{-k} \quad (137)$$

Esta parametrização fornece uma alternativa à expressão {136} podendo ser útil nos casos em que o sinal é fornecido sob a forma de série temporal.

Por último, e a título ilustrativo, considere-se o seguinte exemplo onde se pretende obter a transformada modificada de  $z$  para o seguinte sistema,

$$E(s) = \frac{e^{-1.2s}}{s+1}$$

amostrado a uma taxa  $T = 0.013$ . Este sistema pode ser rescrito como,

$$E(s) = \frac{e^{-T(k+\Delta)s}}{s+1} = \frac{e^{-T(k+1-m)s}}{s+1}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}^+ \quad \forall m \in [0, 1]$$

Decorrente deste facto obtém-se que,

$$k = \left\lfloor \frac{1.2}{T} \right\rfloor = 92$$

note-se mais uma vez que o operador  $\lfloor \cdot \rfloor$  se refere à operação de arredondamento ao inteiro mais próximo por defeito. Decorrente do cálculo de  $k$  determina-se o valor de  $\Delta$  da seguinte forma:

$$\Delta = \frac{1.2 - kT}{T} \approx 0.308$$

o que leva a que,

$$m = 1 - \Delta \approx 0.692$$

Logo a transformada modificada de  $E(s)$  é:

$$E(z, m) = z^{-1} \mathcal{Z}_m \left[ \frac{e^{-(k+1)Ts} \cdot e^{mTs}}{s+1} \right] = z^{-94} \text{Res} \left\{ \frac{e^{mT\lambda}}{\lambda+1} \cdot \frac{1}{1-z^{-1}e^{T\lambda}} \right\}_{\lambda=-1} \approx \frac{0.991}{z-0.987} z^{-93}$$

[ sugestão ] Execute o mesmo procedimento mas, desta vez, com  $T = 0.2$

Para concluir, e comparando as expressões {126} e {136}, é possível dizer que, para o caso de sistemas com atrasos puros múltiplos inteiros do período de amostragem, ambas as transformadas estão relacionadas pela seguinte igualdade:

$$E(z) = \lim_{m \rightarrow 0} zE(z, m) \tag{138}$$

Adicionalmente, e tal como para a transformada ordinária, na versão modificada os atrasos puros múltiplos inteiros do período de amostragem podem ser factorizados, i.e.

$$\mathcal{Z}_m (e^{\pm skT} E(s)) = z^{\pm k} \mathcal{Z}_m (E(s)) \tag{139}$$

Note-se também que as tabelas das transformadas de  $z$  não podem ser aplicadas à sua versão modificada. Deste modo novas tabelas devem ser derivadas (normalmente recorrendo a expressão {136}). No anexo A4 apresentam-se alguns pares de transformadas para os sinais e sistemas mais comuns.

## 2.2.4 Transformada Inversa de Z e Equações às Diferenças

Por norma, um controlador digital é implementado, em termos conceptuais, como um conjunto de equações que operam, no tempo, sobre um dado sinal (normalmente o erro). Mais concretamente, e no contexto desta disciplina, fala-se de um microprocessador que executa operações algébricas entre um conjunto de operandos de modo a determinar as necessidades de actuação.

Por norma, numa base clássica de sistemas de controlo do tipo SISO, os operandos não são mais do que amostras (presente e passadas) do sinal de erro.

Tal como aconteceu para o projecto de controladores analógicos, as estratégias de projecto de controladores digitais assentarão também em procedimentos no domínio da frequência, i.e. parte-se da transformada de Laplace do sistema a controlar e, atendendo às características de desempenho acordadas, obtém-se a função de transferência em  $z$  do controlador.

Como já foi referido, normalmente a implementação do controlador é no domínio do tempo logo, para que o controlador seja exequível, existe a necessidade de converter o controlador do domínio da frequência digital para o domínio do tempo. Este procedimento é realizado através da operação de inversão da transformada  $z$ . A transformada que converte uma função de transferência em  $z$  numa série ou sequência discreta é denominada por transformada inversa de  $z$ .

Formalmente, a transformada inversa de  $z$  é descrita matematicamente por:

$$e(kT) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c E(z) z^{k-1} dz \quad (140)$$

onde  $\oint_c \cdot$  é o integral de contorno tomado no sentido anti-horário da região de convergência de  $E(z)$  contendo a origem.

Existem diversas técnicas para a obtenção da inversa de uma função de transferência em  $z$ . A maior parte contorna a solução do integral recorrendo a tabelas e, se necessário, a um pré-arranjo da função original através da divisão ascendente ou da expansão em fracções racionais [10][13].

Uma estratégia alternativa baseia-se na avaliação do integral de contorno recorrendo ao teorema dos resíduos de Cauchy. Assim, a transformada inversa de  $E(z)$  pode ser obtida atendendo à seguinte relação [13]:

$$e(kT) = \sum_{\substack{\text{nos pólos de} \\ E(z)z^{k-1}}} \text{Res} \{ E(z) \cdot z^{k-1} \} \quad (141)$$

Tal como para a transformada em estrela, a avaliação dos resíduos depende da multiplicidade dos pólos.

- Se o sistema possui um pólo simples em  $z = a$  então,

$$\text{Res}\{E(z)z^{k-1}\}_{z=a} = (z-a)E(z)z^{k-1}\Big|_{z=a}$$

- Se o sistema possui um pólo múltiplo em  $z = a$  de multiplicidade  $m$  então,

$$\text{Res}\{E(z)z^{k-1}\}_{z=a} = \frac{1}{(m-1)!} \left( \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[ (z-a)^m E(z)z^{k-1} \right] \right) \Big|_{z=a}$$

No contexto normal da engenharia de controlo, a função de transferencia discreta é normalmente uma razão de polinómios em  $z$  da forma:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0} \quad (142)$$

Tal como se viu anteriormente, de modo a garantir causalidade, é necessário que o grau do polinómio do denominador seja igual ou superior ao grau do polinómio do numerador. Re-arranjando a expressão anterior têm-se que:

$$(1 + a_{n-1} z^{-1} + \dots + a_0 z^{-n}) Y(z) = (b_m z^{m-n} + b_{m-1} z^{m-n-1} + \dots + b_0 z^{-n}) U(z) \quad (143)$$

Aplicando a transformada inversa (veja [ propriedades ] pág. 87) vêm que:

$$y[k] + a_{n-1} y[k-1] + \dots + a_0 y[k-n] = b_m u[k-m+n] + b_{m-1} u[k-m+n+1] + \dots + b_0 u[k-n] \quad (144)$$

Este tipo de equações são designadas por equações às diferenças e são elas que, efectivamente, definem as regras de controlo implementadas em microprocessadores digitais.

**[ nota ]** Na equação às diferenças a notação  $y[k]$  refere-se, na realidade, a  $y(kT)$ . A notação apresentada tem como base o precedente introduzido por Oppenheim e Schaffer (1998) e pretende ser uma versão mais compacta e menos ambígua para representar sequências discretas. Assim pode dizer-se que:

$$y[k] = y(kT) = y(t) \Big|_{t=kT}$$

[ nota ]

Em muitas publicações de controlo é possível detectar uma forma alternativa de apresentação de equações às diferenças. Essa forma alternativa é baseada num operador designado por operador deslocamento. Esse deslocamento pode ser no sentido de avanço no tempo (*forward shift operator*) ou no sentido de atraso (*backward shift operator*). O operador deslocamento é representado pela letra  $q$  e, quando aplicado a uma função no tempo, executa a seguinte operação:

- $q \cdot e(kT) = e(kT + T) = e[k + 1]$  (avanço no tempo)
- $q^{-1} \cdot e(kT) = e(kT - T) = e[k - 1]$  (atraso no tempo)

De um modo genérico,

$$- q^p \cdot e(kT) = e(kT + pT) = e[k + p], \quad \forall p \in \mathbb{Z}$$

Por exemplo, considere uma função de transferência do tipo,

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0} = \frac{B(z)}{A(z)}, \quad \forall n, m \in \mathbb{Z}, n \geq m,$$

Dividindo ambos os termos por  $z^n$  e considerando que o excesso de pólos sobre os zeros é  $d = n - m$  vêem que:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^{m-n} + b_{m-1} z^{m-n-1} + \dots + b_0 z^{-n}}{1 + a_{n-1} z^{-1} + \dots + a_0 z^{-n}} = \frac{z^{-d} + b_{m-1} z^{-d-1} + \dots + b_0 z^{-d-m}}{1 + a_{n-1} z^{-1} + \dots + a_0 z^{-n}} = \frac{B^*(z)}{A^*(z)}$$

onde  $A^*(z)$  e  $B^*(z)$  se referem ao polinómios recíprocos de  $A(z)$  e  $B(z)$ .

Factorizando  $z^{-d}$  verifica-se que a equação às diferenças poderia ser escrita como:

$$A^*(q^{-1})y(kT) = B^*(q^{-1})u(kT - dT)$$

Note-se que  $z \neq q$  dado que o primeiro é uma variável complexa e o segundo é um operador. No entanto, e até certo ponto, é possível dizer que,

$$q^p \cdot e(kT) = \mathcal{Z}^{-1} \left( z^p E(z) \right) \text{ se } e(kT) \underset{z^{-1}}{\overset{z}{\rightleftharpoons}} E(z)$$

## 2.3 Mapeamento Plano $s \rightarrow$ Plano $z$

Como já se viu, existe uma relação estreita entre a variável complexa  $z$  e a variável complexa  $s$ . Quando a amostragem por impulso é incorporada no sistema de controlo essa relação foi definida na secção §2.2.2 como sendo,

$$z = e^{sT} \quad (145)$$

No capítulo anterior recordou-se que, num sistema analógico LIT convencional, a sua função de transferência consistia numa razão de polinómios em  $s$ . Adicionalmente, a localização dos pólos e zeros do sistema no plano  $s$  definiam inequivocamente o seu comportamento dinâmico. Num sistema discreto no tempo também existe, como se viu da transformada em  $z$ , o conceito de função de transferência. A função de transferência de um sistema digital consiste numa razão de polinómios em potências de  $z$ . Também os valores de  $z$  que anulam a função são chamados de zeros e os valores de  $z$  que tornam a transmissão infinita são designados por pólos. Tal como no seu homólogo contínuo, o comportamento dinâmico de um sistema discreto também está intimamente ligado à localização dos pólos e zeros num mapa designado por plano  $z$ .

Sendo  $z$  uma variável complexa faz todo o sentido que o plano que lhe esteja associado seja, tal como para  $s$ , o plano de Argand para números complexos. Mais ainda, dada a existência de uma relação entre as variáveis complexas  $s$  e  $z$  parece óbvia a existência também de uma relação entre os planos. De facto assim é. Durante esta secção observar-se-á a forma como o plano  $s$  é transformado no plano  $z$  a partir da relação {145}.

Como se sabe, a variável  $s$  sendo complexa, possui uma parte real e uma parte imaginária normalmente descrita de forma genérica como:

$$s = \sigma + j\omega \quad (146)$$

Atendendo à equação {145} é possível dizer que,

$$z = e^{(\sigma + j\omega)T} = e^{\sigma T} \cdot e^{j\omega T} \quad (147)$$

De onde se tira que o módulo de  $z$  é  $e^{\sigma T}$  e a fase é  $e^{j\omega T}$ . Adicionalmente, dado que a função exponencial complexa é periódica com período  $2k\pi$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}$ , a relação seguinte também se verifica,

$$z = e^{\sigma T} \cdot e^{j(\omega T + 2\pi k)} = e^{\sigma T} \cdot e^{jT\left(\omega + \frac{2\pi k}{T}\right)} = e^{\sigma T} \cdot e^{jT(\omega + \omega_0 k)}, \forall k \in \mathbb{Z} \quad (148)$$

Desta última relação verifica-se que singularidades no plano  $s$ , onde as frequências diferem em múltiplos inteiros da frequência de amostragem  $\omega_0$ , são mapeadas para a mesma localização no plano  $z$ .

Comecemos por considerar o caso particular de singularidades analógicas localizadas na origem do plano de Laplace, i.e. para  $s = 0$ . Neste caso é fácil verificar que, no plano discreto, o pólo ou zero estará localizado no ponto  $z = 1$ . Genericamente, e atendendo à expressão {146}, qualquer pólo localizado em,

$$s = 0 + j \frac{2k\pi}{T} = 0 + jk\omega_o, \forall k \in \mathbb{Z}$$

Terá no plano  $z$  a localização  $z = 1$ . Em termos gráficos significa que singularidades sobre os limites das faixas, delimitadas por múltiplos inteiros da frequência de amostragem, serão mapeadas para o mesmo ponto no plano discreto i.e.  $z = 1$ .

Avaliando agora o mapa  $s$  ao longo do eixo  $j\omega$  ou seja, considerando a hipótese de  $\sigma$  ser identicamente zero, verifica-se que nestes casos a equação {147} fica reduzida a,

$$z = e^{j\omega T} \tag{149}$$

Fazendo variar  $\omega$  de  $-\omega_o/2$  a  $\omega_o/2$  observa-se que  $z$  descreve, no plano de Argand, uma **circunferência de raio unitário**. A avaliação de  $\omega$  fora do intervalo especificado tem como efeito, devido à periodicidade da função, redundância. Este resultado permite então concluir que o eixo  $j\omega$  do plano de Laplace é mapeado numa circunferência de raio unitário no mapa  $z$ .

[ sugestão ] Execute o seguinte código no MatLab® e tente ver o que se passa para valores de alfa fora do intervalo especificado. (note que se

$$\omega = \alpha\omega_o/2 \text{ com } \alpha \in [-1,1] \text{ então } z = e^{j\alpha\pi}$$

```

» alfa=-1:0.01:1;
» z=exp(j*alfa*pi);
» plot(real(z),imag(z))
» axis square

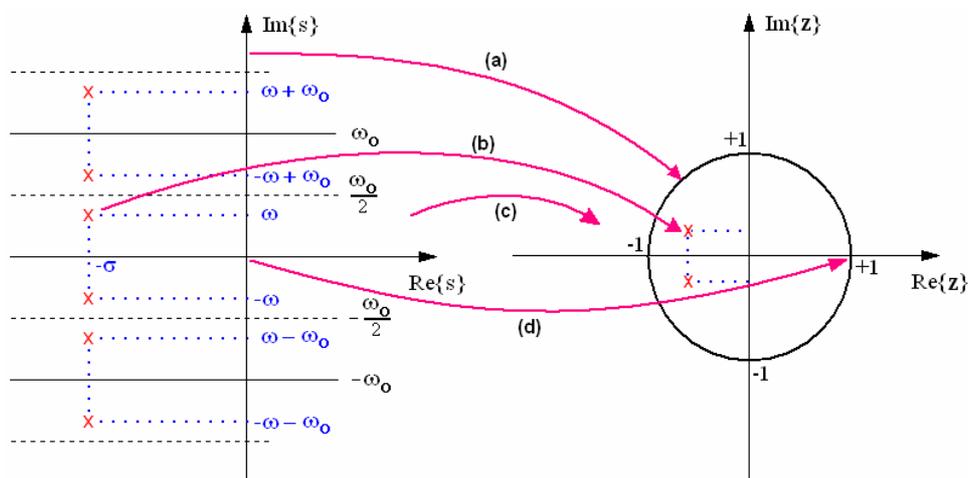
```

Por outro lado, no plano  $s$ , o semi-plano direito é todo o plano definido pela condição  $\text{Re}\{s\} < 0$  ou seja na equação {147} sigma deve ser negativo. Neste contexto, o contradomínio da função exponencial negativa apenas apresenta valores entre  $]0,1[$ . logo a equação anterior pode ser analisada da seguinte forma,

$$0 < |z| < 1 \Rightarrow 0 < z < e^{j\omega T} \tag{150}$$

Considerando a forma polar de um número complexo, a condição anterior define que qualquer número complexo com parte real negativa é transformado num número complexo cujo módulo é sempre positivo e inferior à unidade. Assim, pólos ou zeros que estejam localizados no semi-plano esquerdo no mapa  $s$  são mapeados, no plano  $z$ , para a região do espaço limitada superiormente por uma circunferência de raio unitário. Em suma, o semi-plano esquerdo do plano de Laplace é transformado no interior da circunferência de raio unitário.

Sem mais delongas, é fácil verificar que os pontos do plano  $s$  ainda não analisados conduzem, após a transformação não-linear {147}, a todo o ponto no espaço  $z$  limitado inferiormente pela circunferência de raio unitário, i.e. se sigma é positivo o módulo de  $z$  estará compreendido entre a unidade e o infinito. Resumindo, o semi-plano direito do plano  $s$  é transformado no plano que consiste em todos os pontos exteriores à circunferência de raio unitário. A figura que se segue ilustra graficamente todas as situações consideradas nos parágrafos anteriores.



**Fig 36. Mapeamento do plano  $s$  para o plano  $z$ : (a) o eixo imaginário é transformado numa circunferência de raio unitário (b) o semi-plano esquerdo é convertido no interior da circunferência unitária (c) o semi-plano direito passa a ser o plano limitado inferiormente pela circunferência (d) singularidades na origem passam a estar no ponto  $z=1$ .**

Um último reparo diz respeito ao facto de, num sistema amostrado, a sua transformada de Laplace conduzir a um número infinito de pólos. Esta situação seria irrepresentável no plano  $s$  contudo, no plano  $z$ , as faixas

complementares do plano de Laplace são mapeadas para a mesma localização espacial da faixa primária o que leva a que apenas um número finito de pólos em  $z$  seja representado.

### 2.3.1 Resposta em Frequência de Sistemas Discretos

Num sistema analógico, a resposta em frequência consiste na avaliação, para um determinado intervalo de frequências, do comportamento do sistema face a sinais de excitação puros, i.e. com apenas uma componente em frequência. No caso de existir um modelo matemático do sistema, essa avaliação pode ser feita a partir da transformada de Laplace avaliando-a para os casos em que sigma é identicamente nulo, i.e. para  $s = j\omega$ .

O mesmo conceito pode ser extrapolado para sistemas expressos no domínio  $z$ . Com efeito, dado que para a amostragem por impulso,

$$z = e^{sT}$$

a avaliação da resposta em frequência para um sistema discreto consiste na avaliação da variável complexa  $z$  para os casos em que  $s = j\omega$ ,  $\forall \omega$ , i.e.

$$z = e^{j\omega T}$$

Deste modo, um sistema discreto no tempo com função de transferência  $G(z)$  possui resposta em frequência  $G(e^{j\omega T})$ .

Como já foi referido na secção §2.1.1, e pode ser observado na equação {93}, ao produto da frequência  $\omega$  pelo período de amostragem  $T$  é dado o nome de frequência digital  $\omega_d$ . Assim, a resposta em frequência consiste na avaliação da transformada de Fourier,

$$G(e^{j\omega_d}) = G(z) \Big|_{|z|=1, e^{j\omega_d} = \omega T}$$

para uma gama de frequências entre  $[0, \pi]$ . Adicionalmente, e dado que para sigma igual a zero o módulo de  $z$  é unitário, geometricamente a avaliação da resposta em frequência é feita sobre a circunferência de raio unitário.

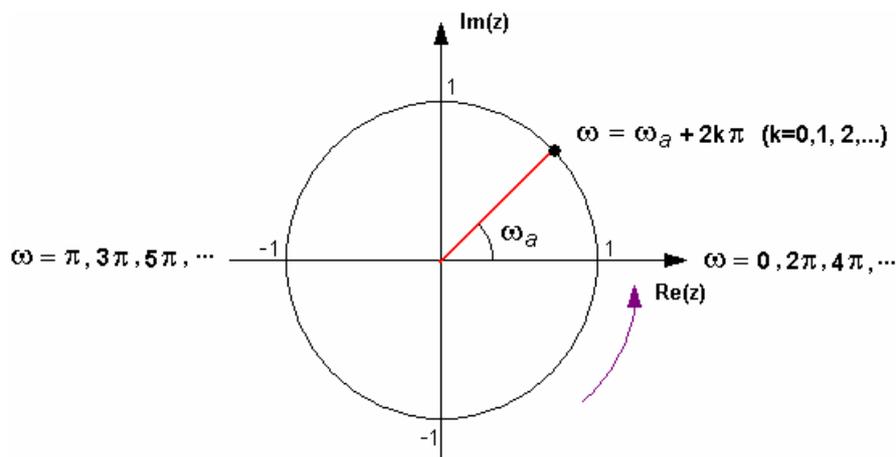
**[ nota ]** No caso do sistema admitir representação em Fourier, a transformada em  $z$  é equivalente à transformada de Fourier quando  $|z|=1$ , i.e.

$$z = e^{j\omega_d} \text{ se } |z|=1.$$

[ nota ] Para um sistema ou sequência discreta admitir transformada de Fourier, geometricamente, é necessário que a região de convergência da transformada  $z$  inclua a circunferência unitária. Como se sabe, a região de convergência (RdC) é todo o valor da variável complexa  $z$  que torna a transformada (leia-se série) convergente. Esta descreve, no mapa discreto, planos limitados superior e/ou inferiormente por circunferências concêntricas com a origem. Para os casos que nos dizem respeito, i.e. sistemas expressos por razões de polinómios em  $z$ , a RdC nunca inclui os pólos da transformada. Adicionalmente, para sistemas causais, a RdC é sempre o plano limitado inferiormente por uma circunferência.

### 2.3.1.1 Avaliação Geométrica da Resposta em Frequência

Considere a figura que se segue onde, no plano  $z$ , se representa um ponto genérico  $z = e^{j\omega_d}$  com  $\omega_d = \omega_a$ .



**Fig 37. Avaliação geométrica da localização de um ponto  $z = e^{j\omega_d}$  em função da frequência digital.**

Graficamente observa-se que, à frequência  $\omega_d = 0$ ,  $z$  refere-se ao ponto  $(1, j0)$ . Aumentando a frequência verifica-se que o ponto se move no sentido anti-horário em torno do círculo unitário. À frequência  $\omega_d = \pi$  (i.e. para  $\omega$  igual a metade da frequência de amostragem)  $z$  refere-se ao ponto  $(-1, j0)$ . Para  $\omega_d = 2\pi$  o ponto  $z$  localiza-se novamente em  $(1, j0)$ . Adicionalmente, verifica-se que esta situação se repete em múltiplos inteiros de  $2\pi$ . Este fenómeno é, como se sabe, uma consequência da amostragem.

Devido à relação entre as transformadas de  $z$  e de Fourier, a partir do mapa de pólos e zeros é possível avaliar, pelo plano  $z$ , a magnitude e a fase da transformada de Fourier, i.e. a resposta em frequência do sistema. Assim, considere-se um sistema discreto no tempo e causal com função de transferência parametrizada da seguinte forma,

$$G(z) = \frac{\prod_{i=1}^m (z - w_i)}{\prod_{i=1}^n (z - p_i)}, \quad \forall n, m \in \mathbb{Z} \text{ e } n > m$$

Atendendo a que  $(z - p_i)$  e  $(z - w_i)$  são vectores no plano  $z$ , a transformada de Fourier pode ser avaliada da seguinte forma:

- A magnitude da transformada de Fourier é igual ao produto de todos os vectores zero dividido pelo produto de todos os vectores polo:

$$|G(e^{j\omega_d})| = \frac{\prod_{i=1}^m |e^{j\omega_d} - w_i|}{\prod_{i=1}^n |e^{j\omega_d} - p_i|}$$

- A fase é igual à soma das fases de todos os vectores zero menos a soma das fases de todos os vectores polo (nota: os ângulos são tomados em referência ao eixo real positivo).

$$\angle G(e^{j\omega_d}) = \sum_{i=1}^m \angle(e^{j\omega_d} - w_i) - \sum_{i=1}^n \angle(e^{j\omega_d} - p_i)$$

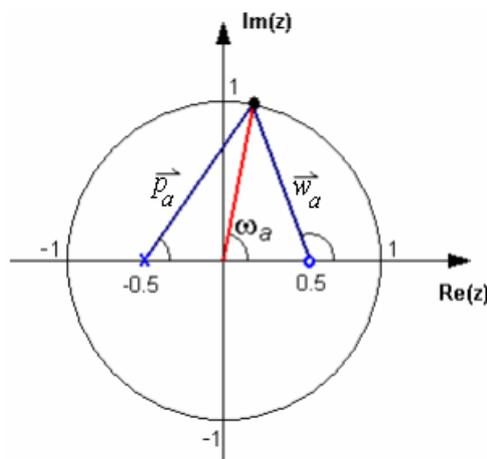


Fig 38. Vectores pólo e zero para uma frequência genérica  $\omega_d$

A título ilustrativo considere-se o seguinte sistema causal definido em  $z$  por;

$$G(z) = \frac{z - 0.5}{z + 0.5}$$

Esta função de transferência possui um zero em  $z = 0.5$  e um polo em  $z = -0.5$ . Para uma frequência genérica  $\omega_d$  podemos traçar os vectores polo e zero ilustrados na figura 38:

Para valores concretos de  $\omega_d$  (rad/amostra) temos:

$\omega_d$	$ \vec{p} $	$ \vec{w} $	$\sphericalangle \vec{p}$	$\sphericalangle \vec{w}$	$ G(e^{j\omega_d}) $	$\sphericalangle G(e^{j\omega_d})$
0	1.5	0.5	0	0	1/3	0
$\pi/2$	$\sqrt{5}/2$	$\sqrt{5}/2$	1.1071	2.0345	1	0.9274
$\pi$	0.5	1.5	$\pi$	$\pi$	3	0

Tabela 4. Avaliação da resposta do sistema  $G(z)$  para alguns valores de frequência

Avaliando para um conjunto mais vasto de valores obtém-se o seguinte aspecto para o módulo e a fase da transformada de Fourier:

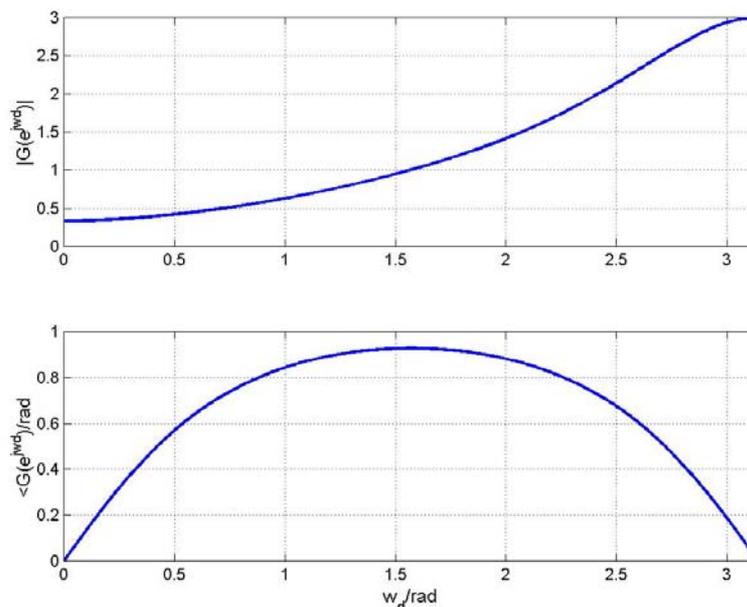


Fig 39. Resposta em frequência do sistema  $G(z)$  (apenas as frequência de 0 a  $\pi$  são ilustradas dado que para valores de  $\pi$  a  $2\pi$  obtém-se a imagem reflectida [no caso de sistemas sem pólos complexos desemparelhados]).

Para concluir deixam-se aqui algumas considerações a respeito da correlação entre a localização das singularidades e a resposta em frequência:

- Os pólos quando colocados perto do círculo unitário produzem picos bem definidos na resposta para as frequências angulares correspondentes.

- Zeros colocados sobre a circunferência unitária têm o efeito de produzir uma resposta nula para as frequências angulares correspondentes.

### 2.3.1.2 Estabilidade de Sistemas Discretos

No primeiro capítulo viu-se que, para um sistema linear, invariante no tempo e causal ser estável era necessário que os pólos possuíssem parte real negativa. No caso de sistemas discretos é fácil ver que, da discussão já levada a cabo, a condição de estabilidade remete os pólos para o interior da circunferência unitária.

Alternativamente, como se sabe, para que um sistema admita transformada de Fourier este deve ser estável. Para o caso dos sistemas discretos essa condição obriga que a RdC da transformada  $z$  inclua, geometricamente, a circunferência de raio unitário. Esse enclausuramento pode ser realizado de duas formas distintas mediante a causalidade, ou não, do sistema. No entanto, para um sistema causal, a RdC é o exterior de um círculo e, dado que esta nunca inclui pólos, a única possibilidade para que as condições de causalidade e existência de transformada de Fourier se verifiquem simultaneamente é a de que os pólos do sistema estejam, sem exceções, no interior da circunferência de raio unitário. Este facto pode ser ilustrado atendendo ao seguinte exemplo: Considere-se dois sistemas discretos, causais, de primeira ordem com pólos em  $z = 0.9$  e  $z = 1.02$ :

$$G_1(z) = \frac{1}{z - 0.9}$$

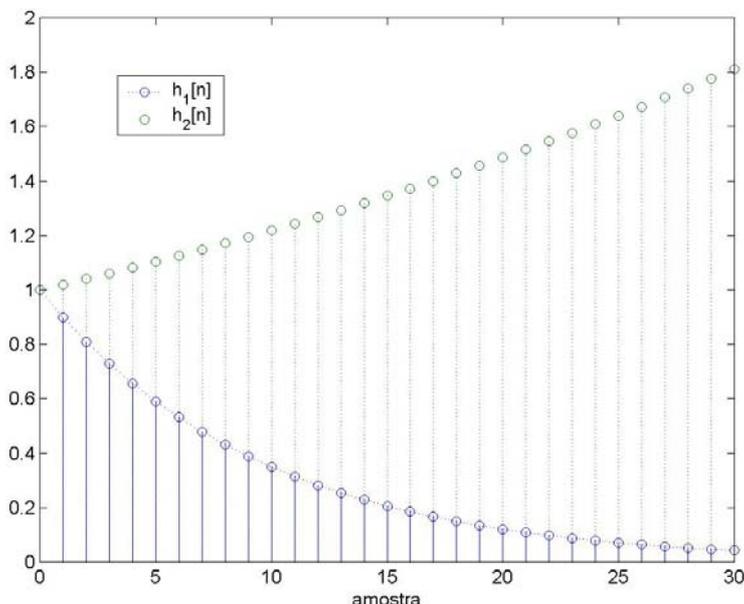
$$G_2(z) = \frac{1}{z - 1.02}$$

É fácil ver que, geometricamente, o primeiro pólo se encontra no interior da circunferência unitária e o segundo fora dela. Aplicando a transformada inversa de  $z$  obtém-se as seguintes respostas impulsivas:

$$h_1[k] = (0.9)^k u[k]$$

$$h_2[k] = (1.02)^k u[k]$$

Na figura que se segue ilustram-se as duas respostas para as primeiras trinta amostras.



**Fig 40. Resposta impulsional do sistema  $G_1(z)$  e  $G_1(z)$**

Como se pode suspeitar, a resposta impulsional  $h_2[k]$  não é absolutamente somável. Basta ver que a soma dos  $n$  termos de  $h_2[k]$  conduzem a uma série geométrica de razão superior à unidade logo divergente. Assim sendo, verifica-se que, no plano  $z$ , pólos cujo módulo seja inferior à unidade contribuem, para a resposta transitória, com termos que decaem para zero com o tempo. Pelo contrário, pólos com módulos superiores à unidade conduzem a termos transitórios que aumentam de amplitude exponencialmente no tempo.

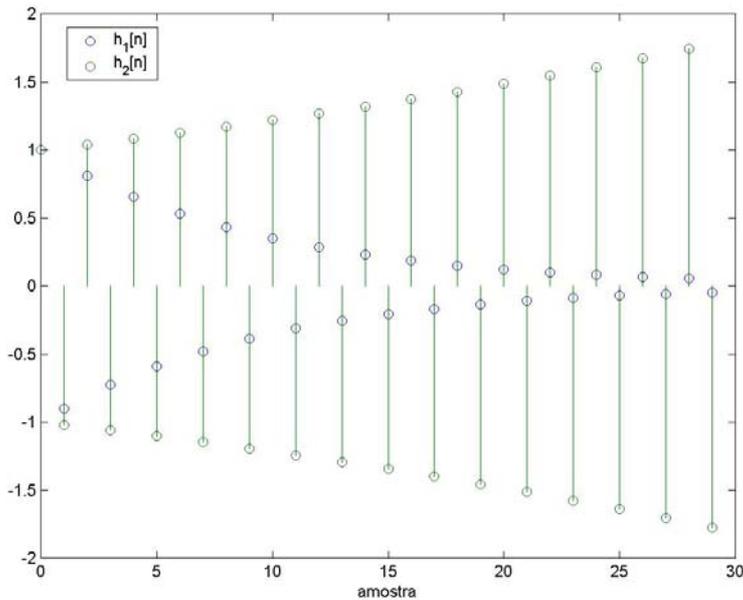
*O que aconteceria se em vez de localizados na parte real positiva do plano  $z$  os pólos estivessem localizados na parte recíproca do mapa?*

Em termos de estabilidade nada muda. Apenas a forma como a parte transitória evolui é que é alterada. Assim considere-se a resposta impulsional dos dois sistemas anteriores mas agora com pólos em  $z = -0.9$  e  $z = -1.02$

$$h_1[k] = (-0.9)^k u[k]$$

$$h_2[k] = (-1.02)^k u[k]$$

As duas respostas impulsionais possuem, para as primeiras trinta amostras, o seguinte aspecto,



**Fig 41. Resposta impulsional para os sistemas com pólos negativos.**

Da comparação da figura anterior com a figura 40 conclui-se que ambos os sistemas tendem para os mesmos valores. Contudo, a forma como o fazem é distinta. Neste segundo caso o sistema aparenta exibir uma oscilação como acontece num sistema sub-amortecido. De facto, este fenómeno poderia ser antecipado dado que a resposta impulsional de ambos os sistemas possuem um termo do tipo  $(-1)^k$  que é alternadamente positivo ou negativo dependendo da paridade do expoente. Assim, e ao contrário dos sistemas analógicos, sistemas discretos só com um pólo podem oscilar. Devido a esse efeito, aos pólos com parte real negativa é dado o nome de "*ringing poles*".

### 2.3.2 Discretização de Funções de Transferência Contínuas

Toda a teoria derivada até ao momento para sinais discretos esteve baseada no conceito ilustrado pela figura 17. Ou seja, um sinal discreto consiste numa sequência de valores da amplitude do sinal contínuo tomados com regularidade em intervalos específicos de tempo. Deste modo, a sequência discreta pode ser vista como uma soma de impulsos discretos ponderados e deslocados no tempo. A aplicação da transformada de Laplace a essa sequência, e posterior mudança de variável, conduziu ao conceito da transformada  $z$  :

$$\mathcal{L}(e(kT)) = E^*(s) = E(z) \Big|_{z=e^{sT}} = \sum_{k=0}^{+\infty} e(kT) \cdot z^{-k} = \mathcal{Z}(E(s)) \quad (151)$$

O que aconteceria se a sequência  $e(kT)$  fosse obtida por amostragem da resposta de um sistema analógico a um dado sinal de excitação? Qual a relação entre a função de transferência do sistema analógico e a transformada em  $z$  da sequência?

Para responder a estas questões considere-se a seguinte figura:



Fig 42. Função de transferência de um sistema com amostrador

Como se sabe, a função de transferência do sistema físico que origina, a partir de um dado sinal de excitação  $u(t)$ , o sinal  $e(t)$  é,

$$\frac{E(s)}{U(s)} = G(s) \Rightarrow E(s) = G(s) \cdot U(s)$$

Por outro lado, a transformada em estrela do sinal de saída (leia-se transformada de Laplace da sequência discreta) é,

$$E^*(s) = [E(s)]^* = [G(s) \cdot U(s)]^*$$

ou seja, para  $z = e^{sT}$ ,

$$E(z) = \mathcal{Z}[E(s)] = \mathcal{Z}[G(s) \cdot U(s)] \quad (152)$$

No entanto, a função de transferência  $G(z)$  é definida como sendo,

$$G(z) = \frac{E(z)}{U(z)} \quad (153)$$

onde,

$$U(z) = \mathcal{Z}[U(s)]$$

Substituindo {152} em {153} obtém-se a relação entre a transformada em  $z$  do sistema e a respectiva transformada de Laplace:

$$G(z) = \frac{\mathcal{Z}[G(s) \cdot U(s)]}{U(z)} \quad (154)$$

Assim, e ao contrário do que poderia ser presumido,  $G(z) \neq \mathcal{Z}[G(s)]$ . De facto o que a expressão anterior nos diz é que a transformada em  $z$  de um sistema

analgóico depende do sinal de excitação. No entanto a função de transferência deveria ser independente do perfil do sinal de entrada. De facto assim é, no entanto com esta estratégia o que se está a tentar mapear para  $z$  não é a dinâmica do sistema mas sim a sua resposta temporal, i.e. pretende-se determinar uma função em  $z$  para o sistema a partir das observações entrada/saída dos sinais contínuos em instantes discretos (um pouco como em procedimentos de identificação de sistemas!). A transformada  $G(z)$  determinada serve como objectivo a preservação da relação entrada/saída do sistema analgóico (pelo menos nos instantes de amostragem).

[ nota ]

Tenha em atenção que  $\mathcal{Z}[G(s) \cdot U(s)]$  por norma é diferente de  $G(z) \cdot U(z)$ . De facto, considerando, por exemplo,

$$G(s) = U(s) = \frac{1}{s} \text{ obtém-se}$$

$$G(z) = U(z) = \frac{z}{z-1} \text{ logo,}$$

$$G(z) \cdot U(z) = \frac{z^2}{z^2 - 2z + 1}$$

No entanto,

$$\mathcal{Z}[G(s) \cdot U(s)] = \mathcal{Z}\left[\frac{1}{s^2}\right] = T \frac{z}{z^2 - 2z + 1}$$

Assim, para este exemplo em concreto, a transformada em  $z$  do produto apenas é igual ao produto das transformadas  $z$  para o caso particular do período de amostragem ser unitário.

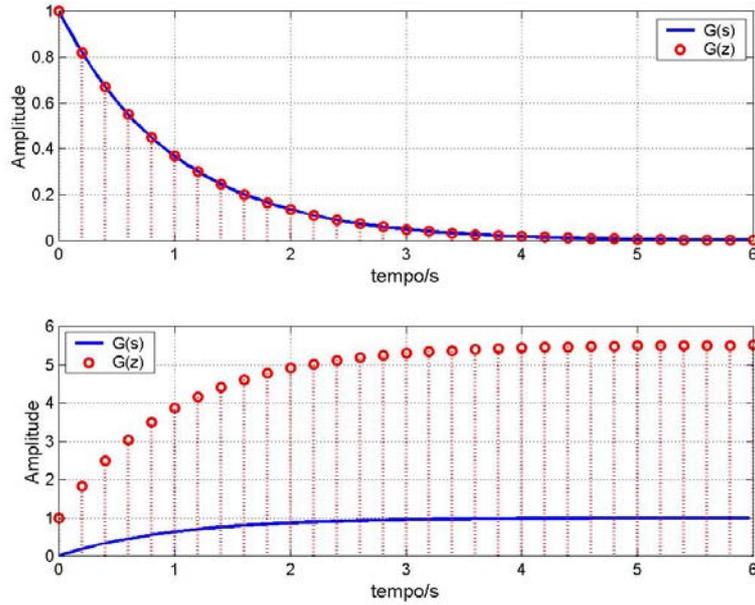
Por exemplo, para o caso particular de uma entrada em impulso, a equação {154} toma a seguinte forma:

$$G(z) = \mathcal{Z}[G(s)] \tag{155}$$

O que significa que a transformada em  $z$  da transformada de Laplace de um sistema analgóico apenas preserva a resposta impulsional. De facto observe-se a seguinte figura onde se mostra a resposta de:

$$G(s) = \frac{1}{s+1} \text{ e } G(s) = \frac{z}{z - e^{-T}}, \quad T = 0.2 \tag{156}$$

a dois sinais distintos: um impulso e um degrau unitário.

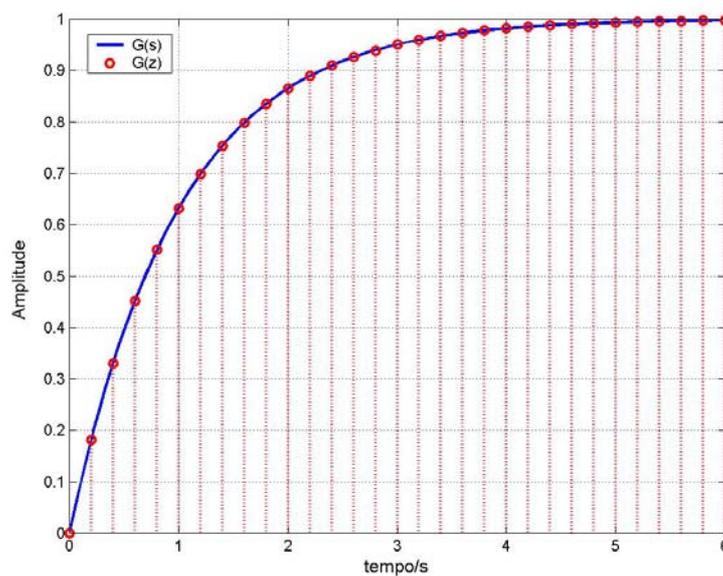


**Fig 43.** Resposta impulsional e resposta ao degrau de um sistema analógico e do seu modelo em  $z$  tomado de  $\mathcal{Z}[G(s)]$ . Repare-se na exactidão do ajuste das amostras nos instantes de amostragem para a resposta impulsional. Compare agora com a resposta ao degrau (figura em baixo).

Se o objectivo fosse garantir justeza das amostras à resposta a degrau a transformada em  $z$  deveria ser:

$$G(z) = \frac{\mathcal{Z}[G(s) \cdot s^{-1}]}{\mathcal{Z}[s^{-1}]} = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}[G(s) \cdot s^{-1}] = \frac{1 - e^{-T}}{z - e^{-T}} \quad (157)$$

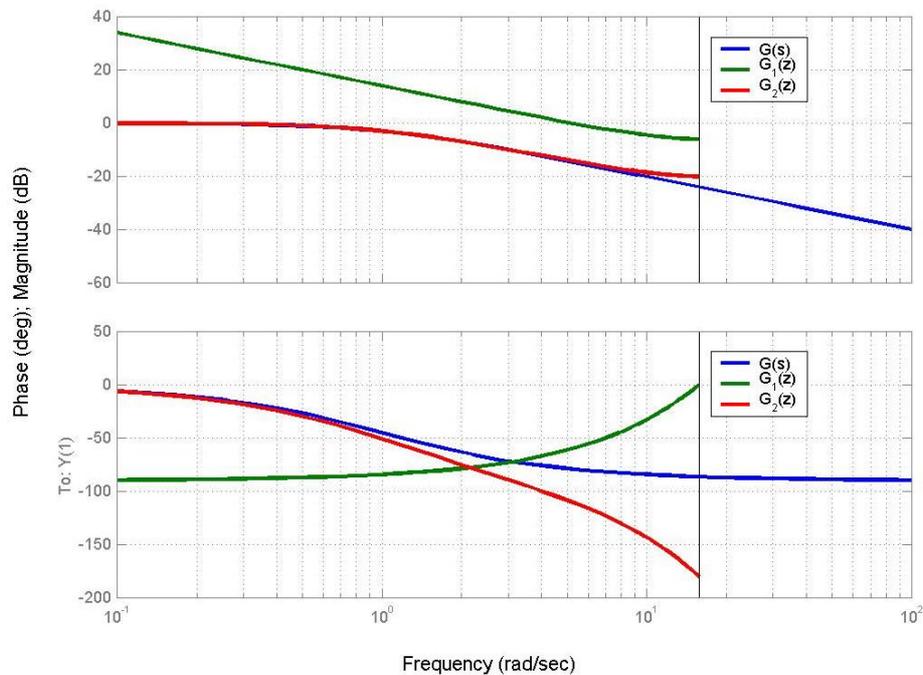
o resultado encontra-se ilustrado na figura subsequente.



**Fig 44.** Resposta ao degrau do sistema da equação {157}

Observando atentamente a equação {157} observa-se que a transformada em  $z$  do sistema  $G(s)$  é tomada como se o sistema contínuo estivesse em série com um retentor de ordem zero!

O efeito da discretização da função de transferência contínua pode ser visto também no domínio da frequência. Assim, considere a seguinte figura:



**Fig 45. Resposta em frequência para três casos distintos: sistema analógico, sua transformada em  $z$  e sistema discreto obtido a partir da transformada em  $z$  da cascata sistema e retentor de ordem zero.**

Como seria de suspeitar, a resposta em frequência do sistema discreto (avaliada até à frequência de Nyquist) não coincide exactamente com a resposta em frequência do sistema contínuo. Dependendo do sinal de excitação a preservar obtém-se diferentes funções de transferência e logo diversos perfis de resposta em frequência.

Uma alternativa à forma de discretizar a função de transferência contínua a partir da observação de sinais consiste na transformação directa desta recorrendo a uma qualquer lei de mapeamento  $s \rightarrow z$ . Note-se que a relação entre as duas variáveis já foi estabelecida como sendo,

$$z = e^{sT} \tag{158}$$

i.e.

$$s = \frac{1}{T} \ln(z) \tag{159}$$

No entanto esta lei de transformação não é conveniente dado que converte uma razão de polinómios em  $s$  numa razão da soma de funções não-lineares em  $z$ . Assim, diversos métodos foram propostos de modo a contornar este problema [7]. A diversidade de métodos existentes é um indicador da ineficácia de um deles cumprir todos os requisitos exigidos a uma estratégia de mapeamento. Como veremos a seguir cada método possui vantagens e desvantagens que devem ser consideradas para a discretização de um controlador.

### 2.3.2.1 Euler Forward e Backward

Como já se disse, a aplicação directa da transformação {159} não é exequível dado que esta transforma uma fracção racional linear em  $s$  numa fracção não-linear em  $z$ . De modo a contornar este problema, uma possibilidade consiste em aproximar {159} a um polinómio em  $z$ . O método mais simples de o fazer consiste na expansão, em série de Taylor, em torno de  $z=1$  (dado que se pretende uma boa coincidência de ambas as funções às baixas frequências!). Neste contexto, a expressão {159} passa a ter o seguinte aspecto,

$$s = \frac{1}{T} \ln(z) \Big|_{z=1} + \frac{1}{Tz} \Big|_{z=1} (z-1) - \frac{1}{Tz^2} \Big|_{z=1} \frac{(z-1)^2}{2} + \dots \quad (160)$$

A função logarítmica admite um número infinito de derivadas logo a expressão anterior deve ser truncada em dado ponto. Uma das estratégias consiste em desprezar todos os termos de ordem superior à unidade. Assim sendo, a expressão anterior fica reduzida a,

$$s = \frac{1}{T} \ln(z) \Big|_{z=1} + \frac{1}{Tz} \Big|_{z=1} (z-1) \quad (161)$$

o que leva à seguinte relação entre  $s$  e  $z$ ,

$$s = \frac{z-1}{T} \quad (162)$$

*O que é que esta aproximação significa na realidade e até que ponto é válida?*

Para responder à primeira parte da questão considere-se um sistema contínuo no tempo regido pela seguinte equação diferencial:

$$\frac{dx(x)}{dt} = y(t) \quad (163)$$

com condições iniciais nulas. Aplicando a transformada de Laplace, a expressão passa a ter o seguinte aspecto:

$$sX(s) = Y(s) \quad (164)$$

onde  $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$  e  $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ . Discretizando agora o sistema recorrendo à relação {158} passa-se a ter,

$$\frac{(z-1)}{T}X(z) = Y(z) \quad (165)$$

Aplicando agora a transformada inversa obtém-se a seguinte equação às diferenças,

$$\frac{x[k+1]-x[k]}{T} = y[k] \quad (166)$$

Comparando a expressão {164} com a equação {165} verifica-se que a aproximação {162} é equivalente à aproximação da primeira derivada pela primeira diferença, i.e. a derivada é tomada como a diferença entre as amostras do sinal  $x(t)$  em  $t=(k+1)T$  e  $t=kT$  dividida pelo período de amostragem (note-se o carácter não-causal da expressão {166}). Como o cálculo da aproximação da derivada requer o valor do sinal uma amostra à frente do instante presente este método de aproximação é designado frequentemente por "*Euler Forward*".

A segunda parte da questão levantada assenta na análise da qualidade da aproximação {162}. Como se viu, esta foi desenvolvida para pontos em torno das baixas frequências e tomando apenas a aproximação a um polinómio de primeiro grau. Começemos por analisar a forma como o plano  $s$  é mapeado no plano  $z$  segundo esta estratégia de discretização. Assim, resolvendo a expressão {158} em ordem a  $z$  obtém-se

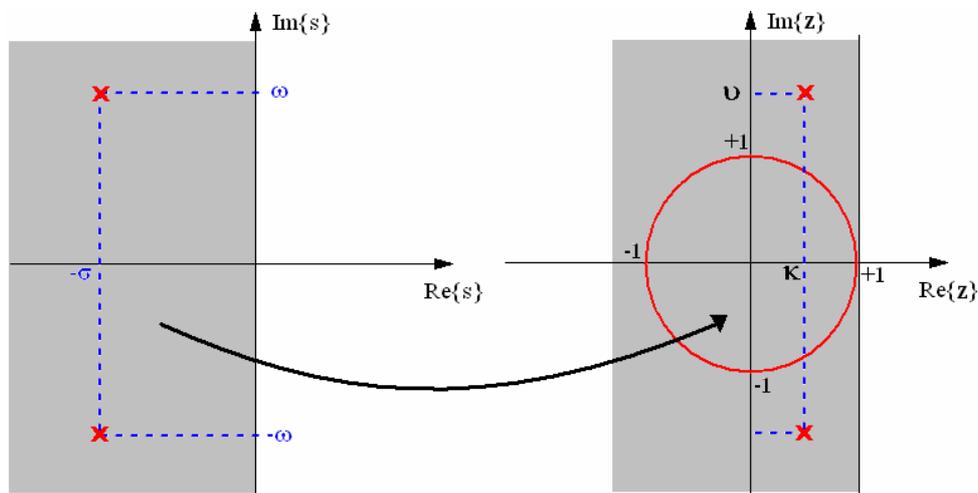
$$z = sT + 1 \quad (167)$$

Atendendo a que  $s = \sigma + j\omega$  tem-se,

$$z = (\sigma T + 1) + j\omega T \quad (168)$$

Para  $\sigma = 0$  verifica-se que o eixo imaginário puro é mapeado, no domínio  $z$ , numa recta vertical que passa pelo ponto  $z = 1$ . Por outro lado, o semi-plano, em Laplace, à esquerda de zero é transformado num semi-plano à esquerda de

$z=1$ . Para pólos analógicos localizados no semi-plano direito verifica-se que, no plano digital, estes são transformados em pólos à direita da recta vertical que passa no ponto  $z=1$ . A figura que se segue pretende ilustrar estas considerações.



**Fig 46. Mapeamento plano  $s$  para plano  $z$  recorrendo à transformação "Euler Forward".**

Da observação da figura anterior conclui-se que:

- O semi-plano esquerdo em  $s$  não é mapeado no interior de uma circunferência de raio unitário no plano  $z$  (se bem que esta a inclua);
- Sistemas analógicos estáveis podem fornecer sistemas digitais instáveis. De facto, e dependendo do período de amostragem, pólos no semi-plano esquerdo em  $s$  podem reflectir-se em pólos fora da circunferência unitária em  $z$ .
- O contorno de frequência no plano  $z$  não segue a circunferência de raio unitário. Em vez disso segue uma recta vertical que passa no ponto  $z=1$  (note-se no entanto que, em torno desse ponto, a resposta em frequência é muito próxima como se obrigou na expansão em série de Taylor!).

Decorrente destas conclusões é possível afirmar que, a não ser que elevadas frequências de amostragem sejam utilizadas, este mapeamento é indesejável. Uma alternativa prende-se com a forma como a derivada é calculada numericamente. Para o caso já revisto, a derivada num dado ponto era determinada usando a informação associada a esse ponto e a informação associada ao instante imediatamente a seguir. No entanto a derivada também

pode ser aproximada usando a informação presente e a passada como se mostra na equação subsequente,

$$\frac{x[k] - x[k-1]}{T} = y[k] \quad (169)$$

A este método numérico de aproximação da operação de derivação é dado o nome de "Euler Backward".

Decorrente desta técnica, conclui-se que o mapeamento efectuado deve seguir a seguinte lei:

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{T} = \frac{z - 1}{zT} \text{ (note-se o pólo na origem a atrasar o sinal)} \quad (170)$$

Para analisar a forma como o plano  $s$  é mapeado no plano  $z$  resolve-se a expressão anterior em ordem a  $z$  e obtém-se

$$z = \frac{1}{1 - sT} \quad (171)$$

Atendendo a que  $s = \sigma + j\omega$  tem-se,

$$z = \frac{1}{(1 - \sigma T) - j\omega T} \quad (172)$$

Para  $\sigma = 0$ ,

$$z = \frac{1}{1 - j\omega T} = \frac{1}{2} \frac{(1 - j\omega T) + (1 + j\omega T)}{1 - j\omega T} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1 + j\omega T}{1 - j\omega T} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{j\varphi} \quad (173)$$

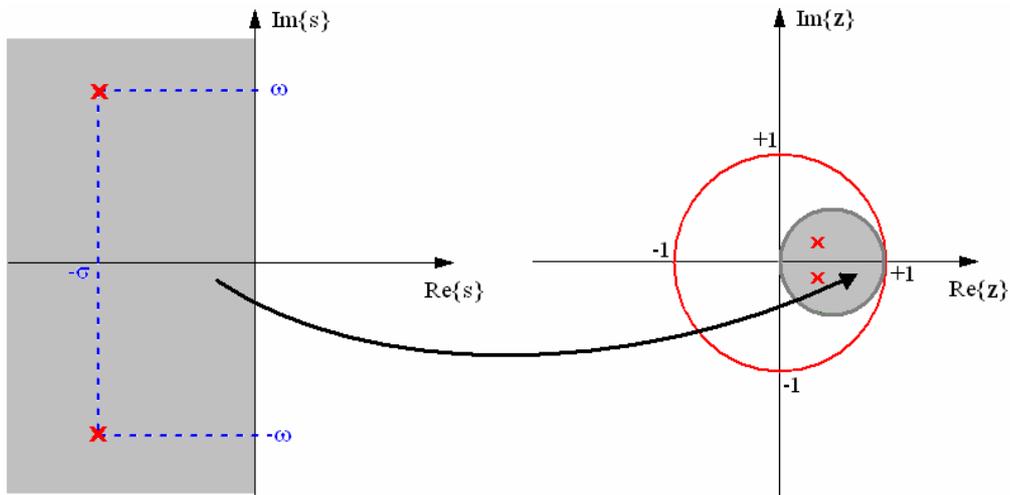
onde,

$$\varphi = \tan^{-1}(\omega T) + \tan^{-1}(\omega T) = 2 \cdot \tan^{-1}(\omega T) \quad (174)$$

Na expressão {173} a exponencial complexa traduz, no plano  $z$ , uma circunferência de raio  $1/2$  e o "offset" reflecte um deslocamento do centro da circunferência no sentido positivo do eixo real de uma quantidade igual a  $1/2$ . É fácil verificar que a região de estabilidade do plano de Laplace é transformado no interior dessa circunferência e, por conseguinte, o semi-plano direito do mapa  $s$  é todo o plano exterior a essa mesma circunferência.

Tal como se fez anteriormente para o método de discretização conhecido por "Euler Forward", apresenta-se de seguida uma figura que pretende ilustrar,

geometricamente, a relação entre os planos  $s$  e  $z$  para o método "Euler Backward".



**Fig 47. Mapeamento plano  $s$  para plano  $z$  recorrendo à transformação "Euler Backward".**

Da observação da figura anterior conclui-se que:

- Tal como no caso anterior, o semi-plano esquerdo em  $s$  não é mapeado exactamente no interior de uma circunferência de raio unitário no plano  $z$  (se bem que esta a inclua);
- É possível a estabilização de sistemas analógicos instáveis após o processo de discretização.
- O contorno de frequência no plano  $z$  também não segue a circunferência de raio unitário. Mais ainda, verifica-se uma degradação da frequência de amostragem para pontos afastados de  $z = 1$ .

Para concluir, deixa-se aqui a advertência de que, frequentemente, se pretende, após o processo de discretização de uma função de transferência analógica, manter a resposta em frequência original. Assim, se bem que as duas técnicas apresentadas sejam facilmente aplicadas, não preservam a resposta impulsional e distorcem seriamente a resposta em frequência (pelo menos para frequências de amostragem relativamente baixas ou para frequências digitais longe de  $\omega_d = 0$  [ponto  $z = 1$ ])

Deste modo, na secção que se segue apresenta-se uma técnica alternativa, também ela derivada de uma aproximação polinomial à expressão {159} mas

com a vantagem de mapear a região à esquerda do eixo  $j\omega$  do plano  $s$  para o interior da circunferência de raio unitário no plano  $z$

### 2.3.2.2 Transformação Bilinear ou de "Tustin".

A forma mais comum de discretização de funções de transferência analógicas consiste na substituição directa, na função de transferência contínua, da variável complexa  $s$  por uma aproximação de Padé de primeira ordem da expressão {159} em torno de  $z=1$ . Esta técnica é designada por transformação bilinear (em processamento de sinal) ou de Tustin (normalmente no contexto do controlo de sistemas).

Através do resultado obtido na secção §2.1.4.3 (equação {118}) é possível extrapolar para o caso em que se pretende aproximar a equação {158} pela razão de dois polinómios. Assim sendo, e resolvendo em ordem a  $s$ , é fácil verificar que a relação entre as variáveis complexas  $s$  e  $z$  será;

$$s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} \quad (175)$$

[ nota ] A expressão anterior também poderia ser obtida aplicando a aproximação trapezoidal como método numérico de integração [4][13].

Exprimindo a equação {171} em função de  $z$  obtém-se;

$$z = \frac{2+sT}{2-sT} \quad (176)$$

atendendo que  $s = \sigma + j\omega$ ,

$$z = \frac{(2+\sigma T) + j\omega T}{(2-\sigma T) - j\omega T} \quad (177)$$

Avaliando {177} ao longo do eixo  $j\omega$ ,

$$z = \frac{2+j\omega T}{2-j\omega T} \quad (178)$$

que na forma polar possui o seguinte aspecto:

$$z = e^{j\omega_d} \text{ onde } \omega_d = 2 \cdot \tan^{-1} \left( \frac{\omega T}{2} \right) \quad (179)$$

Graficamente a equação anterior representa, no plano complexo, uma circunferência de raio unitário. Mais ainda, se  $\sigma < 0$  é fácil ver que o módulo do

numerador da expressão {177} é inferior ao módulo do denominador o que leva a que o módulo da aproximação seja inferior à unidade. Assim, todo o semi-plano esquerdo do domínio de Laplace é transformado no interior da circunferência de raio unitário. De forma semelhante, para  $\sigma > 0$ , esta estratégia de mapeamento resulta na conversão do semi-plano direito no plano definido pelo exterior da circunferência de raio unitário. Decorrente disto, um sistema analógico estável possui, no seu equivalente discreto, um filtro estável. No entanto esta transformação conduz a um problema de deslizamento da frequência, i.e. a relação entre a frequência analógica e a frequência digital não é linear. Mais concretamente,

$$\omega = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega_d}{2}\right) \quad (180)$$

Esta última expressão estabelece a relação entre a frequência no plano  $s$  e a frequência digital no plano  $z$ .

**[ demonstração ]**

Partindo de

$$s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

e avaliando  $z$  sobre o círculo unitário, i.e.  $z = e^{j\omega T}$ , obtém-se

$$j\omega = \frac{2}{T} \frac{1 - e^{-j\omega T}}{1 + e^{-j\omega T}} \text{ que após factorização fica com o seguinte aspecto,}$$

$$j\omega = \frac{2}{T} \frac{e^{-j\omega \frac{T}{2}} \left( e^{j\omega \frac{T}{2}} - e^{-j\omega \frac{T}{2}} \right)}{e^{-j\omega \frac{T}{2}} \left( e^{j\omega \frac{T}{2}} + e^{-j\omega \frac{T}{2}} \right)}$$

Recorrendo às relações de Euler obtém-se

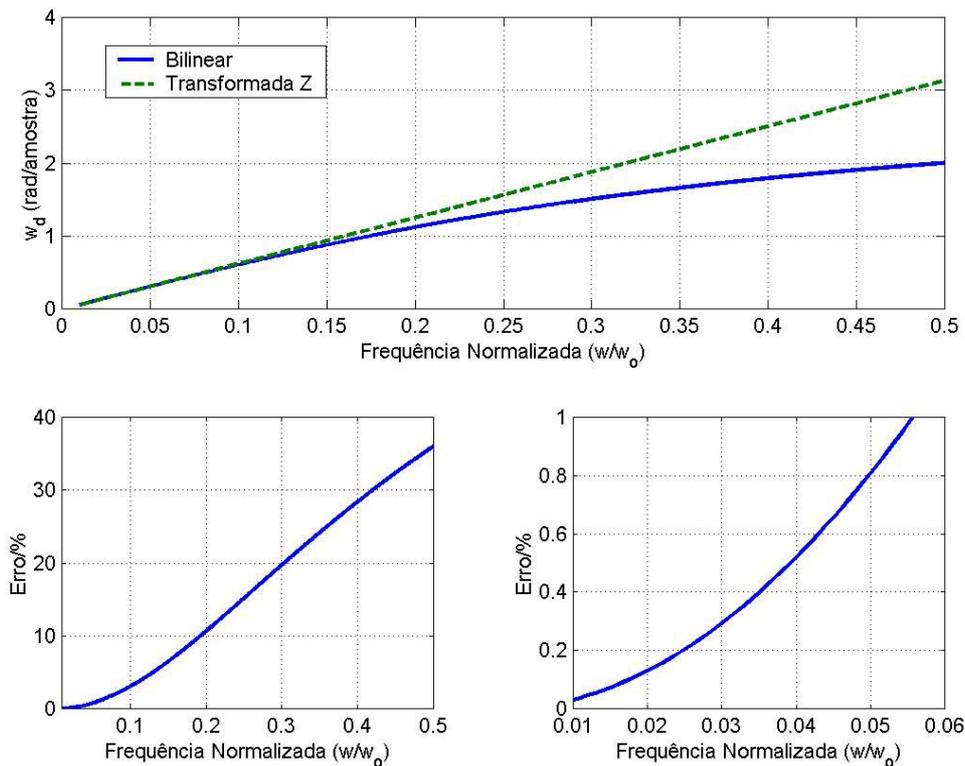
$$j\omega = \frac{2}{T} \frac{e^{-j\omega \frac{T}{2}} 2j \left( \frac{e^{j\omega \frac{T}{2}} - e^{-j\omega \frac{T}{2}}}{2j} \right)}{e^{-j\omega \frac{T}{2}} 2 \left( \frac{e^{j\omega \frac{T}{2}} + e^{-j\omega \frac{T}{2}}}{2} \right)} = \frac{2}{T} j \frac{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\omega T}{2}\right)} = \frac{2}{T} j \tan\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

e finalmente  $\omega = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega_d}{2}\right)$

[ demonstração alternativa ]

A partir da expressão {179} e resolvendo em ordem a  $\omega$ .

Esta distorção de frequência é tanto mais negligenciável quanto maior for a frequência de amostragem. De facto, observe-se a seguinte figura:



**Fig 48. Distorção da frequência decorrente da transformação bilinear. Em baixo, à direita, pormenor do gráfico do erro relativo.**

Como se pode ver, seleccionando uma frequência de amostragem suficientemente elevada, o efeito de distorção é minimizado. Concretamente, para frequências de amostragem superior a vinte vezes a largura de banda do sistema limita-se a distorção a valores inferiores a 1%

### 2.3.2.3 Mapeamento Pólo-Zero

Outro método que se apresenta para converter uma função de transferência do domínio de Laplace para o domínio  $z$  têm por base a relação entre os planos  $s$  e  $z$ , i.e. assenta na propriedade de que um pólo ou zero em  $s = a$  é convertido num pólo ou zero em  $z = e^{aT}$ . Assim, conhecendo a localização das singularidades da função de transferência analógica, é possível determinar uma função de transferência discreta de tal modo que os seus pólos e zeros

sejam os pólos e zeros da função de transferência original transformados pela relação {158}. Esta técnica é de fácil aplicação e manipulação algébrica podendo ser sumariada nos três pontos que se seguem:

- Começar por mapear todos os pólos e zeros finitos de acordo com a relação  $z = e^{sT}$ .
- Se a ordem do numerador é inferior à do denominador (o que acontece frequentemente) adicione-se zeros em  $z = -1$  até que ambos os termos possuam o mesmo grau [6]. Com a introdução destes zeros "artificiais" à frequência de Nyquist pretende-se que a resposta em frequência do sistema digital em  $\omega \rightarrow \omega_0 2^{-1}$  seja similar à do sistema analógico para  $\omega \rightarrow \infty$
- Finalmente estabelece-se o ganho DC de modo que ambas as funções de transferência possuam o mesmo valor (nos casos em que existam pólos na origem estes, são descartados).

De modo a ilustrar o procedimento considere-se o seguinte caso:

$$G(s) = \frac{s+1}{s^3 + 2s^2 + 2s}$$

Factorizando a função de transferência anterior esta passa a ter o seguinte aspecto:

$$G(s) = \frac{s+1}{s(s^2 + 2s + 2)} = \frac{s+1}{s(s+1+j)(s+1-j)}$$

Convertendo os pólos e zeros finitos (considerando um período de amostragem unitário) vêm que:

$$G(z) = \frac{z - e^{-1}}{(z - e^0)(z - e^{-1+j})(z - e^{-1-j})} = \frac{z - e^{-1}}{(z - 1)(z^2 - 2e^{-1} \cos(1) \cdot z + e^{-2})}$$

Introduzindo mais dois zeros em  $z = -1$

$$G(z) = \frac{(z^2 + 2z + 1)(z - e^{-1})}{(z - 1)(z^2 - 2e^{-1} \cos(1) \cdot z + e^{-2})}$$

Finalmente escalonando o ganho de modo que  $sG(s)|_{s=0} = (z-1)G(z)|_{z=1} = 0.5$

$$G(z) \doteq 0.146 \frac{(z^2 + 2z + 1)(z - e^{-1})}{(z - 1)(z^2 - 2e^{-1} \cos(1) \cdot z + e^{-2})} = \frac{0.146z^3 + 0.238z^2 + 0.039z - 0.054}{z^3 - 1.398z^2 + 0.533z - 0.135}$$

Se  $G(z)$  fosse a função de transferência de um controlador digital, a equação às diferenças que o implementava num processador digital seria:

$$G(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{0.146 + 0.238z^{-1} + 0.039z^{-2} - 0.054z^{-3}}{1 - 1.398z^{-1} + 0.533z^{-2} - 0.135z^{-3}}$$

Aplicando a transformada inversa de  $z$  obtém-se:

$$u[k] = 1.398u[k-1] - 0.533u[k-2] + 0.135u[k-3] + \\ + 0.146e[k] + 0.238e[k-1] + 0.039e[k-2] - 0.054e[k-3]$$

onde  $u[k]$  se refere ao sinal de controlo aplicado ao processo no instante de tempo  $t = kT$  e  $e[k]$  ao sinal de erro adquirido ou calculado no instante de tempo  $t = kT$ . Como já se pode suspeitar existe aqui um ligeiro problema. O sinal de controlo aplicado no instante  $k$  depende do sinal de erro também no mesmo instante. Este facto seria irrelevante se o "hardware" processasse as entradas e saídas e realizasse os cálculos em tempo nulo. Contudo, como se pode suspeitar, esse facto é impossível. Assim, e de modo a contabilizar o atraso introduzido pelo sistema, considera-se que, durante um instante de amostragem, a máquina deverá ter tempo para realizar todas as operações necessárias, i.e. se uma determinada variável a controlar for amostrada todos os segundos, o hardware têm, teoricamente, um segundo para levar a cabo as operações de transmissão de dados e processamento.

Assim, e de modo a observar o desempenho do controlador obtido por discretização do controlador analógico, o efeito do atraso no tempo do sistema de computação deve ser tido em consideração. Desta forma, uma ligeira alteração à técnica de discretização previamente apresentada será apresentada. Esta modificação refere-se especificamente à adição de zeros fictícios à função de transferência. De modo a manter o atraso de uma amostra entre a entrada e a saída, o grau relativo da função de transferência deve ser unitário, i.e. para sistemas estritamente próprios, os zeros em  $z=1$  serão adicionados até que o grau do denominador exceda, em **um**, o grau do numerador [6]. No caso de sistemas próprios, como é o caso dos controladores avanço e atraso de fase, o grau do numerador é idêntico ao do denominar. Assim, não só não é possível a adição de zeros como parece existir um zero a mais. Para resolver este problema adiciona-se um atraso à função de transferência por introdução de um pólo. O pólo deverá ser adicionado num

local que influencie o menos possível a resposta dinâmica do sistema. No plano  $s$  essa localização seria em  $s = -\infty$ . No plano  $z$  a localização equivalente é, obviamente,  $z = 0$ .

## 2.4 Escolha do Período de Amostragem

A escolha da frequência de amostragem não é uma tarefa trivial. No entanto, quando se derivou o teorema de amostragem as coisas pareciam simples, i.e. escolhe-se uma frequência de amostragem que seja maior que o dobro da máxima componente em frequência do sinal. No entanto olhando mais de perto vê-se que as coisas não podem ser assim tão óbvias. Primeiro é necessário saber qual a máxima componente em frequência dos sinais intervenientes e quais as componentes de interesse. **Como fazê-lo?** Uma possibilidade poderia ser efectuada recorrendo a um microprocessador e executando a FFT sobre o sinal. No entanto esta alternativa está viciada dado que, para ser implementada, o sinal deve ser amostrado. Por outro lado, e ao contrário dos exemplos ilustrados, o espectro de um sinal real nunca acaba de forma abrupta a uma dada frequência. Por norma, os espectros reais estendem-se de menos infinito a mais infinito. Algumas dessas componentes podem fazer parte do fenómeno que se pretende observar mas, a maioria, é devida a ruído que se sobrepõe ao sinal de interesse. O ruído pode surgir em diversos pontos do espectro e pode dever-se a diversos fenómenos entre os quais agitação térmica, indução magnética, etc. Assim sendo, existe alguma impossibilidade de se saber exactamente o limite superior do sinal. Mais ainda, existirá sempre sobreposição de bandas laterais!

[ nota ] A FFT pode ser usada para verificar a existência ou não de aliasing. Se, após a computação da FFT, existirem componentes em frequência, com energia significativa, muito perto da frequência de Nyquist então existe alguma probabilidade de ter ocorrido aliasing.

Como já foi vincado ao longo deste documento, a escolha do período de amostragem é fulcral em controlo digital. No projecto de controladores por emulação, parte-se da função de transferência de um controlador analógico e discretiza-se usando uma das técnicas já revistas. Dado que a qualidade da

aproximação da dinâmica do controlador digital face à do controlador analógico aumenta com o aumento da frequência de amostragem fica claro que o período de amostragem influencia o desempenho do controlador e logo de algumas propriedades do sistema em malha fechada tais como:

- Seguimento de sinais de comando.
- Rejeição de perturbações na carga e ruído de medida.
- Sensibilidade a dinâmicas não modeladas.

Se, por um lado, é desejável uma elevada frequência de amostragem por outro esse valor deve estar limitado ao valor mínimo necessário para a execução dos cálculos numéricos. De facto, a carga computacional imprimida pelo algoritmo juntamente com o desempenho do processador definem o limite superior do período de amostragem. Considerando que o "hardware" possui capacidade para fazer face a qualquer solicitação imposta pelo sistema, algumas linhas de orientação tem vindo a ser propostas, de forma mais ou menos empírica, para a escolha do período de amostragem.

Frequentemente é aconselhado, na literatura, uma escolha do período de amostragem que recai num valor entre quatro a dez vezes o tempo de subida do sistema, i.e.

$$\frac{T_R}{10} < T < \frac{T_R}{4} \quad (181)$$

O mesmo é dizer que o período de amostragem deve ser escolhido de modo a que [1]:

$$\frac{0.2}{\omega_{ncl}} < T < \frac{0.6}{\omega_{ncl}} \quad (182)$$

onde  $\omega_{ncl}$  se refere à frequência natural dos pólos dominantes de malha fechada.

Em domínios de processamento de sinal, uma das regras empíricas dita que a frequência de amostragem deve ser cinco vezes superior à maior componente em frequência onde se pretende que o filtro digital possua a mesma característica do filtro contínuo original.

$$\omega_o \geq 5 \cdot \omega_H \quad (183)$$

Por exemplo, para um filtro passa baixo,  $\omega_H$  pode ser igual a cinco vezes a largura de banda o que implica que o filtro digital irá possuir uma característica similar ao analógico até mais ou menos vinte e cinco vezes a largura de banda. Assim, uma regra conservativa estipula que a frequência de amostragem deve estar majorada inferiormente por 20 vezes a largura de banda em malha fechada e superiormente por 40 vezes a mesma largura de banda, i.e.

$$20 \cdot BW_{cl} \leq \omega_o \leq 40 \cdot BW_{cl} \quad (184)$$

Por outro lado, e como se viu na secção relativa à reconstrução (talvez seja mais exacto falar em reconversão) um conversor D/A está frequentemente entre o controlador e o sistema contínuo a controlar implementando a extrapolação do sinal de controlo entre amostras consecutivas. Esta retenção implica, como já foi visto, que o sinal de controlo esteja atrasado de uma quantidade aproximadamente igual a metade do período de amostragem. Como é de esperar, este atraso influencia a margem de fase e logo a estabilidade do sistema. Assim, uma regra para a escolha do período de amostragem refere que a deterioração da estabilidade, pelo retentor de ordem zero, é pequena e tolerável se o atraso no tempo for inferior a um décimo do tempo de subida. Ou seja,

$$\frac{T}{2} \leq \frac{T_R}{10} \Rightarrow T \leq \frac{T_R}{5} \quad (\text{compare com \{181\}}) \quad (185)$$

A relação entre a degradação da margem de fase pelo retentor de ordem zero e o período de amostragem pode ser analisado de forma alternativa. Como já foi visto anteriormente, a dinâmica de um zoh pode ser aproximada por:

$$G_{zoh}(s) \approx T \cdot e^{-s \frac{T}{2}} \Rightarrow_{s=j\omega} G_{zoh}(j\omega) \approx T \cdot e^{-j\omega \frac{T}{2}} \quad (186)$$

Pressupondo que a degradação da margem de fase imposta por este elemento deve estar contida entre  $5^\circ$  e  $10^\circ$  vêem que:

$$5^\circ \times \frac{\pi}{180} < \omega_{gc} \frac{T}{2} < 10^\circ \times \frac{\pi}{180} \quad (187)$$

o que implica que,

$$5^\circ \times \frac{2\pi}{180 \cdot \omega_{gc}} < T < 10^\circ \times \frac{2\pi}{180 \cdot \omega_{gc}} \quad (188)$$

Considerando que a frequência de cruzamento do ganho (em malha aberta) é igual à largura de banda do sistema vêem que, o decréscimo de margem de fase devida ao retentor de ordem zero, é limitada por:

$$\frac{\pi}{18 \cdot BW_{cl}} < T < \frac{2\pi}{18 \cdot BW_{gc}} \quad (189)$$

levando a que:

$$18 \cdot BW_{cl} < \omega_o < 36 \cdot BW_{cl} \quad (\text{compare com } \{184\}) \quad (190)$$

## 2.5 Análise de Sistemas de Controlo Digitais

Numa primeira fase, esta secção trata de sistemas híbrido, i.e. sistemas compostos por componentes discretos e componentes contínuos no tempo. No contexto de controlo por realimentação irá mostrar-se a função de transferência de malha fechada para algumas das topologias mais comuns. Finalmente, na secção §2.5.3 apresentam-se duas técnicas algébricas para a análise da estabilidade de sistemas no domínio  $z$ .

### 2.5.1 Sistemas Amostrados em Malha Aberta

Normalmente em sistemas de controlo digitais existem simultaneamente funções de transferência contínuas e discretas. A forma de lidar com esta situação tem por base a introdução de amostradores "fictícios" para as variáveis de interesse, i.e. apesar de contínuas no tempo consideram-se apenas os seus valores em instantes discretos de tempo [10].

Nesta secção apresentam-se três casos distintos da coexistência de troços de informação discreta e contínua para sistemas em malha aberta.

**Caso I:** Sistema amostrado em malha aberta.

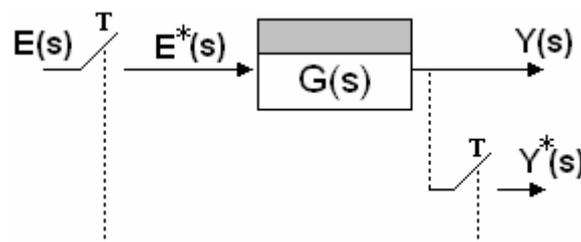


Fig 49. Sistema simples amostrado em malha aberta. Note-se que o amostrador à saída é fictício e está em fase com o amostrador com existência física.

Da observação da figura anterior retira-se a seguinte relação entre variáveis:

$$Y(s) = G(s) \cdot E^*(s) \quad (191)$$

A análise, em  $z$ , deste sistema parte da amostragem fictícia de  $Y(s)$  (representado a tracejado na figura anterior). Assim, aplicando a transformada em estrela à equação {191} obtém-se:

$$Y^*(s) = [G(s) \cdot E^*(s)]^* \quad (192)$$

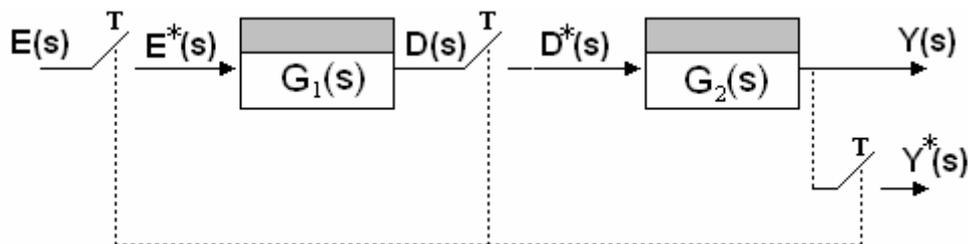
Neste contexto pode pensar-se que  $*$  é uma espécie de operador amostragem. Da aplicação deste "operador" decorre que os termos já "amostrados" podem ser factorizados para fora da operação. Isto porque a amostragem (sincronizada!) de um sinal amostrado é o mesmo sinal amostrado. Assim, a expressão anterior toma a seguinte forma:

$$Y^*(s) = G^*(s) \cdot E^*(s) \quad (193)$$

Devido à relação entre a transformada em estrela e a transformada  $z$ , i.e.  $z = e^{sT}$ , a equação anterior pode ser reescrita como:

$$Y(z) = G(z) \cdot E(z) \Big|_{z=e^{sT}} \quad (194)$$

**Caso II:** Elementos separados por amostradores ideais.



**Fig 50.** Cascata de dois sistemas separados por amostradores ideais. Considera-se que todos os amostradores estão em fase.

Para este caso,

$$Y(s) = G_2(s) \cdot D^*(s) \quad (195)$$

e

$$D(s) = G_1(s) \cdot E^*(s) \quad (196)$$

Aplicando o operador estrela a cada uma das expressões vêm que,

$$D^*(s) = G_1^*(s) \cdot E^*(s) \quad (197)$$

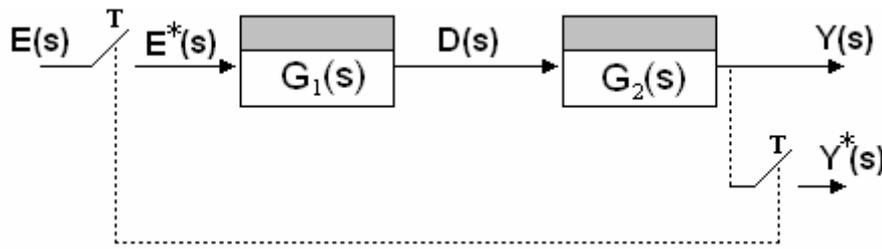
substituindo o resultado anterior em {195} e aplicando a transformada em estrela fica:

$$Y^*(s) = G_2^*(s) \cdot G_1^*(s) \cdot E^*(s) \quad (198)$$

ou seja

$$Y(z) = G_1(z) \cdot G_2(z) \cdot E(z) \quad (199)$$

**Caso III:** Elementos em cascata não separados por amostradores.



**Fig 51. Elementos em cascata não separados por amostradores ideais**

$$Y(s) = G_2(s) \cdot D(s) \quad (200)$$

e

$$D(s) = G_1(s) \cdot E^*(s) \quad (201)$$

substituindo {201} em {200} obtém-se:

$$Y(s) = G_2(s) \cdot G_1(s) \cdot E^*(s) \quad (202)$$

aplicando a transformada em estrela fica

$$Y^*(s) = [G_2(s) \cdot G_1(s) \cdot E^*(s)]^* \quad (203)$$

o que leva a que,

$$Y^*(s) = E^*(s) \cdot [G_2(s) \cdot G_1(s)]^* = E^*(s) \cdot \overline{G_2 G_1(s)}^* \quad (204)$$

onde  $\overline{G_2 G_1(s)}^*$  se refere á transformada em estrela do produto de  $G_1(s)$  com  $G_2(s)$ .

Frequentemente o senso comum induz em erro. Assim a partir da expressão {203} a tentação poderia ser dizer que,

$$Y^*(s) = E^*(s) \cdot [G_2(s) \cdot G_1(s)]^* = E^*(s) \cdot G_2^*(s) \cdot G_1^*(s) \quad (205)$$

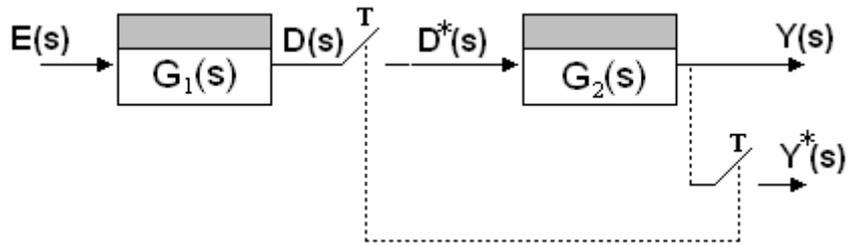
o que estaria errado. Isto porque, como já foi visto, em geral

$$\mathcal{Z}\{G_1(s)\} \cdot \mathcal{Z}\{G_2(s)\} \neq \mathcal{Z}\{G_1(s) \cdot G_2(s)\} \quad (206)$$

i.e.

$$G_1^*(s) \cdot G_2^*(s) \neq \overline{G_1 G_2(s)}^* \quad (207)$$

**Caso IV:** Elementos em cascata separados por amostradores e excitados por sinal contínuo.



**Fig 52. Elementos em cascata excitados por sinal contínuo no tempo.**

Da figura anterior tira-se que,

$$Y(s) = G_2(s) \cdot D^*(s) \quad (208)$$

e que

$$D(s) = G_1(s) \cdot E(s) \quad (209)$$

Aplicando a transformada em estrela à equação anterior obtém-se,

$$D^*(s) = \overline{G_1 E(s)}^* \quad (210)$$

Substituindo em {208} fica,

$$Y(s) = G_2(s) \cdot \overline{G_1 E(s)}^* \quad (211)$$

Finalmente, aplicando a transformada em estrela fica,

$$Y^*(s) = G_2^*(s) \cdot \overline{G_1 E(s)}^* \quad (212)$$

Como, por norma,  $\overline{G_1 E(s)}^*$  não pode ser factorizado em  $G_1^*(s) \cdot E^*(s)$  o sistema da figura 52 não admite representação na forma de função de transferência

Para concluir, e decorrente da análise destes quatro casos, deixam-se aqui três conceitos importantes a reter:

- A amostragem de um sinal amostrado tem como resultado o sinal amostrado:

$$\left[ E^*(s) \right]^* = E^*(s) \quad (213)$$

- Normalmente a amostragem do produto de dois sinais é diferente do produto dos sinais amostrados, i.e.

$$[E_1(s) \cdot E_2(s)]^* = E_1 E_2^*(s) \neq E_1^*(s) \cdot E_2^*(s) \quad (214)$$

- Não é possível a derivação de uma função de transferência se os sinais aplicados a montante de sistemas contínuos não forem previamente amostrados [13].

### 2.5.2 Sistemas Amostrados em Malha Fechada

Determinar a função de transferência para sistemas amostrados não é uma tarefa trivial dado que não existe função de transferência para o amostrador ideal [13]. Esta afirmação toma contornos ainda mais acentuados quando se fala em sistemas de malha fechada onde existem amostradores. Deste modo, e dependendo da sequência de operações efectuadas, é possível atingir um ponto em que não é possível a factorização de variáveis de entrada ou saída implicando a impossibilidade de se obter a função de transferência do sistema. De modo a ilustrar este predicado considere-se o seguinte sistema de controlo em malha fechada:

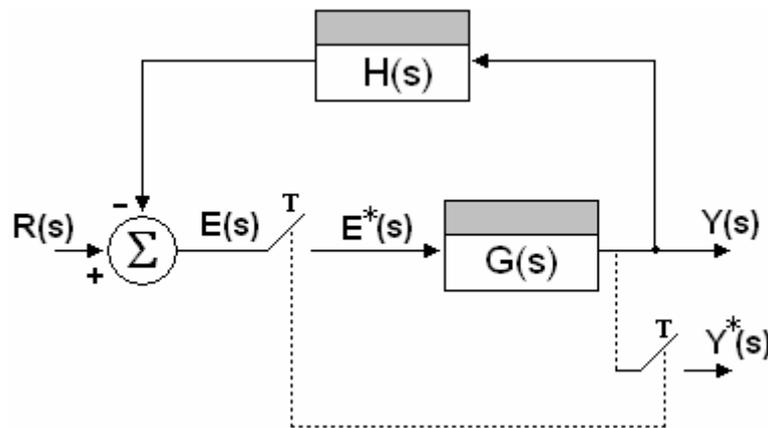


Fig 53. Sistema realimentado com amostrador ideal na malha

Deste é possível retirar as seguintes equações:

$$Y(s) = G(s) \cdot E^*(s) \quad (215)$$

e

$$E(s) = R(s) - H(s) \cdot Y(s) \quad (216)$$

Aplicando a transformada em estrela à equação anterior e substituindo em {215} obtém-se:

$$Y(s) = G(s)R^*(s) - G(s) \cdot \overline{HY(s)}^* \quad (217)$$

o que leva a que a transformada em estrela seja,

$$Y^*(s) = G^*(s)R^*(s) - G^*(s) \cdot \overline{HY(s)}^* \quad (218)$$

como  $\overline{HY(s)}^*$  não pode ser factorizado a expressão anterior não pode ser resolvida em ordem a  $Y^*(s)$  e logo não é possível a determinação da função de transferência.

Por outro lado, rescrevendo a equação {216} como,

$$E(s) = R(s) - H(s) \cdot G(s) \cdot E^*(s) \quad (219)$$

aplicando a transformada em estrela,

$$E^*(s) = R^*(s) - \overline{HG(s)}^* \cdot E^*(s) \quad (220)$$

ou seja,

$$E^*(s) = \frac{R^*(s)}{1 + \overline{HG(s)}^*} \quad (221)$$

substituindo  $E^*(s)$  em {215} fica,

$$Y(s) = G(s) \cdot \frac{R^*(s)}{1 + \overline{HG(s)}^*} \quad (222)$$

Aplicando a transformada em estrela vem que,

$$Y^*(s) = G^*(s) \cdot \frac{R^*(s)}{1 + \overline{HG(s)}^*} \quad (223)$$

ou seja,

$$Y(z) = G(z) \cdot \frac{R(z)}{1 + \overline{HG(z)}^*} \quad (224)$$

Observa-se assim a necessidade de um cuidado especial na manipulação das variáveis e na sequência com que as transformadas em estrela são aplicadas. Assim, e de modo a facilitar a análise deste tipo de sistemas, o seguinte algoritmo é apresentado [13]:

**Passo 1 de 3:** Fazer corresponder uma variável a cada entrada dos amostradores presentes

**Passo 2 de 3:** Escrever essas variáveis em função das saídas de cada amostrador

**Passo 3 de 3:** Aplicar a transformada em estrela

### 2.5.3 Técnicas Algébricas para Análise da Estabilidade

Como se afirmou na secção §2.3.1.2, um sistema discreto, causal, linear e invariante no tempo é estável se todas as raízes da equação característica tiverem um módulo inferior à unidade, i.e. os pólos de um sistema discreto devem estar localizados, relativamente ao plano  $z$ , no interior da circunferência de raio unitário. Contudo, uma análise deste tipo envolve o cálculo de todos os modos do sistema o que pode ser irrelevante ou de difícil trato. É claro que esta afirmação considera um tratamento do problema de forma algébrica e não de forma numérica (por exemplo recorrendo a um computador digital).

Nesta secção apresentam-se duas técnicas algébricas para a análise da estabilidade de sistemas discretos no tempo. Ambas as técnicas possuem em comum o facto de não requererem o cálculo explícito dos pólos do sistema.

#### 2.5.3.1 Critério de Routh-Hurwitz para Sistemas Discretos

Sabe-se que, num sistema LIT contínuo no tempo, o limite de estabilidade é o eixo imaginário enquanto que num sistema discreto o limite geométrico consiste numa circunferência de raio unitário. Deste modo, algumas técnicas de análise para sistemas contínuos não podem ser aplicadas directamente a sistemas discretos. No entanto este problema pode ser contornado transformando o sistema discreto em contínuo recorrendo, por exemplo, à transformação bilinear.

$$z \rightarrow \frac{2+Ts}{2-Ts} \quad (225)$$

Com esta estratégia o círculo unitário do plano  $z$  é transformado no eixo  $j\omega$  do plano  $s$ . Dado que o limite de estabilidade passa a ser o mesmo do sistema analógico é possível recorrer a algumas técnicas do domínio contínuo para a análise da estabilidade. Entre as técnicas existentes salienta-se o critério de Routh-Hurwitz. A aplicação do critério de Routh a um sistema discreto é feita seguindo os seguintes passos:

**Passo 1 de 3:** Determinar a função de transferência, em malha fechada, do sistema

**Passo 2 de 3:** Aplicar a transformação expressa na equação {225}

**Passo 3 de 3:** Aplicar o critério de Routh seguindo o mesmo procedimento para os sistemas contínuos (ver caixa de texto da secção §1.2.5.1)

Tal como para o caso contínuo, o critério de Routh pode ser usado para determinar o ganho crítico para o sistema discreto, i.e. o ganho para o qual as raízes cruzam o eixo imaginário. Este valor de ganho é o ganho ao qual o sistema é marginalmente estável e logo pode ser usado para determinar a frequência crítica.

No entanto, para sistemas discretos, a frequência crítica encontrada recorrendo ao algoritmo anterior deve ser transformada de modo a encontrar a frequência crítica do sistema discreto. Essa transformação é realizada recorrendo à relação,

$$\omega_d = 2 \cdot \tan^{-1} \left( T \frac{\omega}{2} \right) \quad (226)$$

### 2.5.3.2 Critério de Jury

Como se viu na secção anterior, a análise da estabilidade de sistemas discretos pode ser realizada recorrendo ao critério de Routh adaptado. Contudo a aplicação desta técnica pressupõe a transformação de  $z$  para  $s$  o que, pelo menos algébricamente, é incómodo. Uma técnica alternativa é o teste de estabilidade de Jury que pode ser usada directamente em sistemas discretos.

Assim, considere-se a equação característica de um sistema discreto da forma:

$$Q(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0 = 0, \quad a_n > 0 \quad (227)$$

A partir do polinómio  $Q(z)$  forma-se a tabela de Jury da seguinte forma:

$$\begin{array}{cccccc} z^0 & z^1 & z^2 & \dots & z^{n-1} & z^n \\ \hline a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & a_0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} & \\ b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \dots & b_0 & \\ c_0 & c_1 & \dots & c_{n-2} & & \end{array} \quad (228)$$

onde

$$b_k = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-k} \\ a_n & a_k \end{vmatrix}, \quad c_k = \begin{vmatrix} b_0 & b_{n-k-1} \\ b_{n-1} & b_k \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad d_k = \begin{vmatrix} c_0 & c_{n-k-2} \\ c_{n-2} & c_k \end{vmatrix} \quad (229)$$

Note-se que o número de linhas da tabela de Jury é igual a  $2(n-1)-1$ . As condições necessárias e suficientes para garantir a estabilidade do sistema discreto são as seguintes:

$$\begin{aligned}
 Q(1) &> 0 \\
 (-1)^n Q(-1) &> 0 \\
 |a_0| &< a_n \\
 |b_0| &> |b_{n-1}| \\
 |c_0| &> |c_{n-2}| \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{230}$$

O critério de Jury pode ser aplicado da seguinte forma:

**Passo 1 de 2:** Verifique as três primeiras condições de {230}. Caso alguma não se verifique pare o processo e conclua que o sistema é instável. Caso contrário passe ao item seguinte

**Passo 2 de 2:** Construa a tabela de Jury e verifique as restantes condições. Caso uma delas não se verifique conclua que o sistema é instável.

## 2.6 Projecto de Controladores Digitais

Se bem que é possível dimensionar um sistema de controlo digital inteiramente no domínio discreto, uma das técnicas mais comuns no projecto de controladores digitais recorre a uma estratégia de derivação por "emulação". Nesta técnica, parte-se da função de transferência analógica do sistema a controlar e, tentando respeitar os critérios de desempenho propostos, define-se um compensador contínuo no tempo. A partir da função de transferência do controlador analógico, e recorrendo a uma das técnicas de discretização já revistas, obtém-se a equação às diferenças que rege o comportamento do filtro.

Se bem que, para um bom desempenho desta técnica, o sistema deva ser sobre-amostrado, esta proposta de projecto é muito apelativa dado que permite aproveitar o "know-how" herdado da teoria dos sistemas analógicos. Note-se no entanto que o projecto de sistemas de controlo digitais possui a preocupação adicional de ter de contabilizar os efeitos da amostragem, reconstituição e da quantização no desempenho do sistema em malha fechada.

Decorrente da influência destes fenómenos no comportamento dinâmico do sistema em malha fechada, o desempenho do sistema de controlo discreto não deverá coincidir exactamente com aquele planeado para o sistema de controlo analógico. No entanto, para amostragens rápidas e baixos erros de quantização, o comportamento será muito aproximado.

Nesta secção, apresenta-se uma técnica de projecto para controladores digitais baseados na digitalização de controladores contínuos. Numa primeira etapa analisa-se o efeito, na malha de controlo, dos componentes associados aos sistemas amostrados. Mais concretamente fala-se nos reconversores (zoh), filtros anti-aliasing e quantizadores. Posteriormente, e seguindo os passos de um exemplo em concreto, apresentam-se os trâmites essenciais a seguir no projecto de um controlador digital por emulação.

### 2.6.1 Efeito do Retentor de Ordem Zero

Na secção §2.1.4.3 referiu-se que um retentor de ordem zero tinha, como efeito colateral, a deterioração da margem de fase do sistema devido ao atraso introduzido que, como foi demonstrado, se situava em torno de metade do período de amostragem. Nesta secção avança-se um passo no sentido de analisar o efeito, numa malha de controlo, do retentor de ordem zero. Para isso considere-se o sistema analógico da figura que se segue:

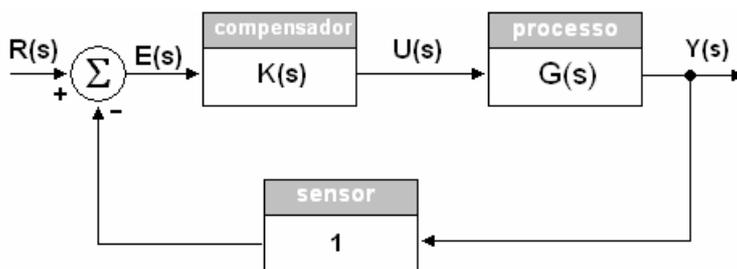


Fig 54. Sistema de controlo analógico em malha fechada.

onde,

$$G_{cl}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K(s)G(s)}{1 + K(s)G(s)} \quad (231)$$

se refere à sua função de transferência.

Imagine-se agora que o compensador analógico, por exemplo um controlador avanço de fase, por motivos vários deveria ser substituído por idêntica

estratégia de controlo mas embebida num micro-controlador. Assim, o esquema "equivalente", sob o ponto de vista digital, do sistema da figura anterior possui o seguinte aspecto:

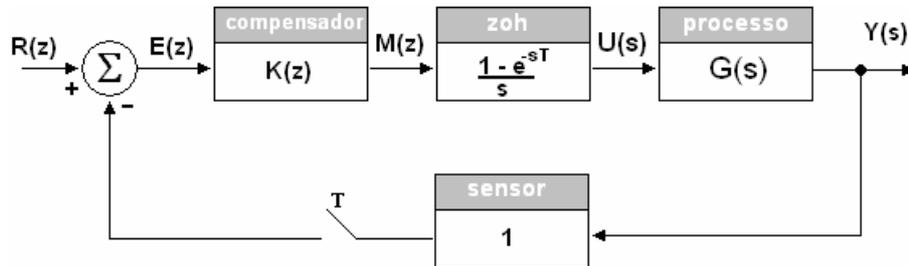


Fig 55. "Equivalente" digital do sistema de controlo da figura anterior.

A sua função de transferência possui o seguinte aspecto,

$$G_{cl}(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{K(z) \cdot \overline{GG_{zoh}}^*(s)}{1 + K(z) \cdot \overline{GG_{zoh}}^*(s)} \quad (232)$$

onde  $G_{zoh}(s)$  se refere à função de transferência do reconversor.

Considere-se que a função de transferência  $K(s)$  foi digitalizada recorrendo ao algoritmo apropriado de forma que a influência da discretização, deste componente, na dinâmica do sistema em malha fechada é negligenciável. Posto isto começa-se por analisar a resposta do sistema a um degrau unitário.

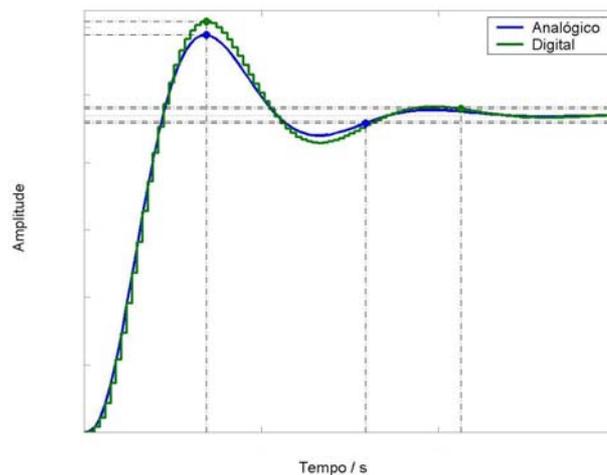
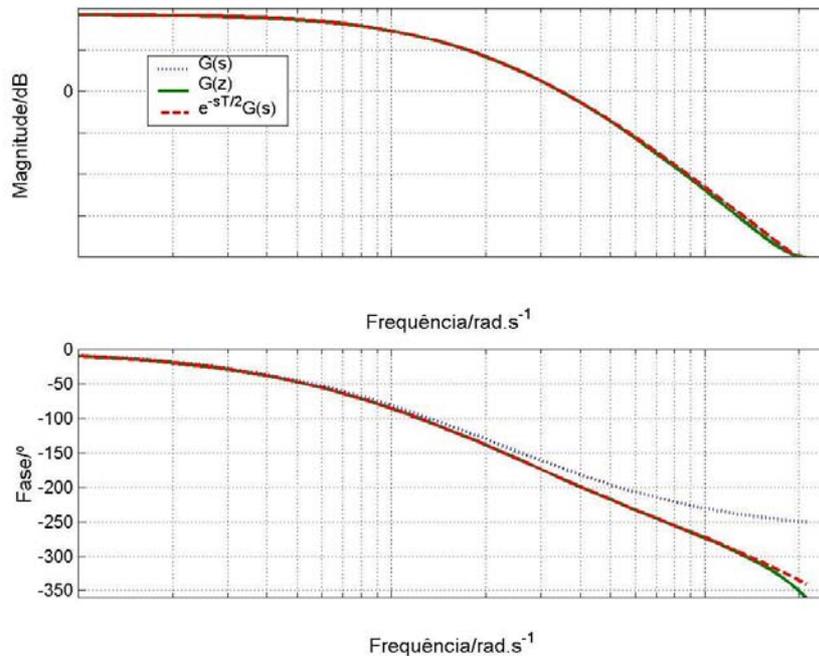


Fig 56. Resposta ao degrau de um sistema de controlo analógico e do equivalente digital.

Como se pode observar, não só se assiste a um aumento da sobre-elongação como o tempo de estabelecimento aumenta (lembre-se que ambos os critérios de desempenho estão ligados a zeta). Dado que se garante que o efeito da

digitalização do controlador é negligenciável, a diferença de transitórios observada só pode ficar a dever-se à influência da estratégia de reconstrução. De facto, o aumento da instabilidade que se observa deve-se a uma redução na margem de fase como se pode reparar da figura subsequente.



**Fig 57. Comparação da resposta em frequência de um sistema de analógico com a sua versão digitalizada (pelo método da invariância da resposta ao degrau).**

Em termos numéricos a deterioração de fase que se fez sentir foi de, aproximadamente,

$$\phi = \omega \frac{T}{2} \Big|_{\omega=\omega_{gc}} \quad (\text{rad})$$

Decorrente desta diminuição seria de esperar um aumento da sobre-elongação o que, de facto, se fez sentir. Adicionalmente, e do estudo levado a cabo acerca da dinâmica do retentor de ordem zero, sabe-se que o valor da deterioração da margem de fase diminuirá com o aumento da frequência de amostragem. De facto, e por razões já enunciadas, o período de amostragem é um parâmetro com grande impacto no desempenho de sistemas de controlo digitais.

Em suma, o retentor de ordem zero possui um efeito ligeiramente destabilizador que pode ser negligenciado ou, alternativamente, incluído no

processo de projecto. Por norma, e devido às frequências de amostragem envolvidas, esperam-se diminuições da margem de fase inferiores a 10°.

### 2.6.2 Efeito do Filtro Anti-Aliasing

Quando, à umas secções atrás, se abordou o tema do aliasing referiu-se o facto de, normalmente, os sinais adquiridos não serem "bem-comportados" possuindo componentes em frequência que, teoricamente, se estenderiam até infinito. Assim sendo, e resultante do processo de amostragem, seria de esperar sempre alguma distorção do sinal.

Uma forma de minimizar esse fenómeno recorre à utilização de um pré-filtro a montante do amostrador de modo a atenuar a energia das componentes em frequência fora de banda. Dentro de um vasto leque de filtros por norma, e de modo a perturbar o menos possível a dinâmica do sistema, a escolha recai num filtro com um pólo do tipo:

$$G_f(s) = \frac{1}{2 \frac{s}{\omega_o} + 1} \tag{233}$$

De modo a analisar o efeito da introdução de um filtro deste tipo na malha de controlo considere-se o sistema da secção anterior agora com um pré-filtro de primeira ordem colocado antes do amostrador como se mostra na figura que se segue.

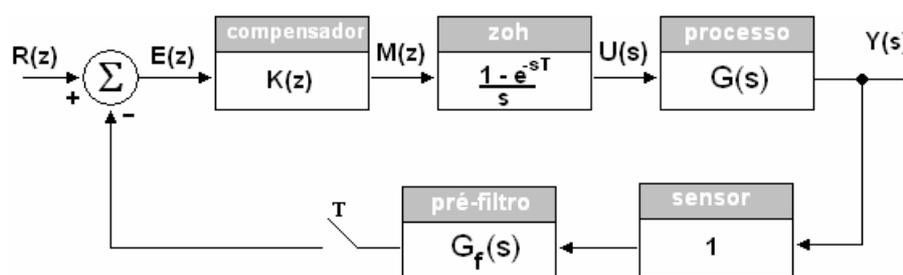
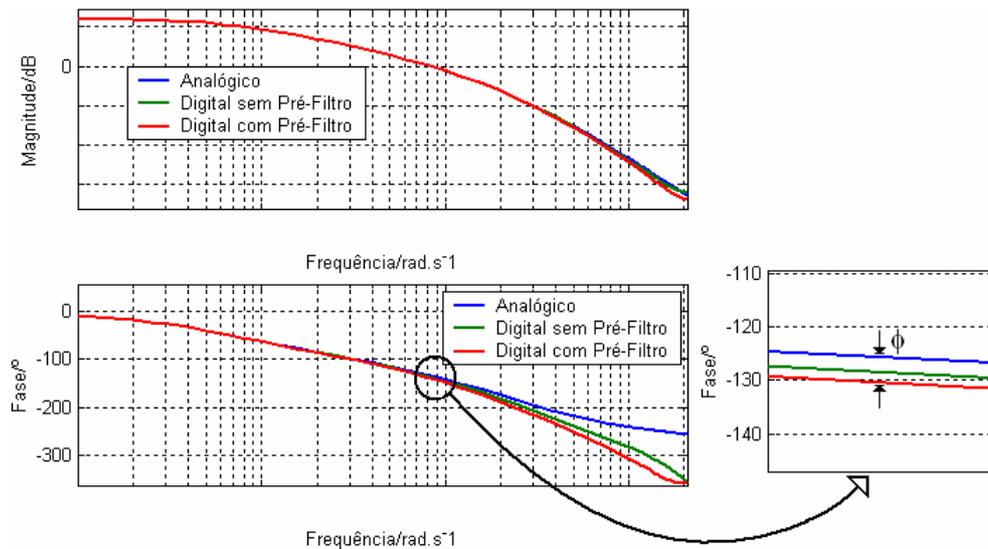


Fig 58. Introdução de um filtro anti-aliasing na malha de controlo.

A função de transferência desta nova andamento tem a seguinte forma,

$$G_{cl}(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{K(z) \cdot \overline{GG_{zoh}}^*(s)}{1 + K(z) \cdot \overline{GG_f G_{zoh}}^*(s)} \tag{234}$$

Analise-se agora a resposta em frequência de malha aberta do sistema anterior face aos sistemas ilustrados pelas figuras 54 e 55.

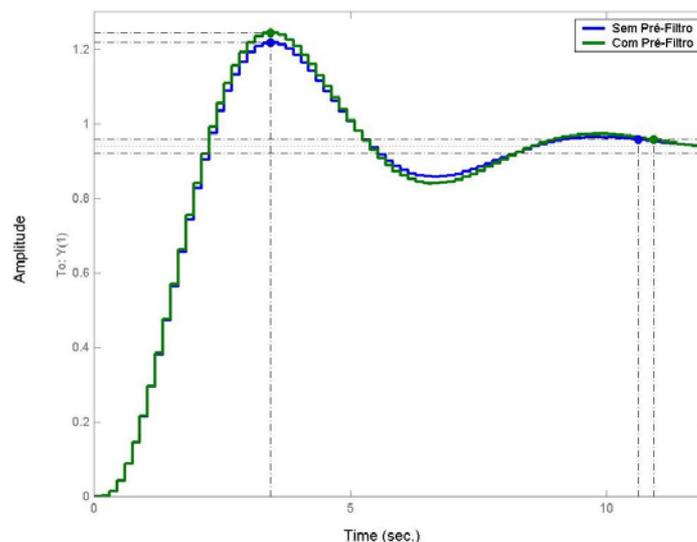


**Fig 59. Resposta em frequências, de malha aberta, dos sistemas analógico e digital (com e sem pré-filtro)**

Em termos de magnitude, apenas se observa uma pequena discrepância muito perto da frequência de Nyquist. Em termo de fase, verifica-se uma diminuição da margem de fase devido ao atraso adicional introduzido pelo pólo. Relativamente ao sistema analógico, a deterioração da margem de fase acontece por uma quantidade  $\phi$  que pode ser determinada por:

$$\phi = \phi_{zoh} + \phi_{filtro} = \omega \frac{T}{2} \Big|_{\omega=\omega_{gc}} + \tan^{-1} \left( 2 \frac{\omega}{\omega_o} \right) \Big|_{\omega=\omega_{gc}} \quad (\text{rad})$$

A deterioração da margem de fase devido ao filtro pode também ser atestada por um aumento da sobre-elevação na resposta ao degrau quando comparada com a do sistema sem pré-filtro. A figura que se segue ilustra esse facto.



**Fig 60. Resposta ao degrau dos sistemas de controlo digitais com e sem pré-filtro.**

A análise efectuada permite concluir que, relativamente ao comportamento com e sem filtro, a diferença de dinâmicas é praticamente negligenciável. A ser-se conservativo projecta-se o controlador considerando o atraso adicional introduzido pelo filtro que, devido ao período de amostragem geralmente envolvido é, em termos equivalentes, inferior a 6°.

Adicionalmente, não é demais reiterar que o filtro anti-aliasing serve, no contexto do controlo digital, um propósito de extrema importância: evitar a introdução de perturbações de baixa-frequência no sinal de controlo. De modo a ilustrar esse fenómeno considere novamente o casos do mesmo sistema de controlo com e sem pré-filtro. Adicionalmente considere, para cada um dos dois casos, a introdução de erro de medida monocromático com SNR em torno dos 6dB e frequência um pouco superior a duas vezes a frequência de amostragem. Esta estratégia de simulação é caracterizadas pelas duas figuras que se seguem:

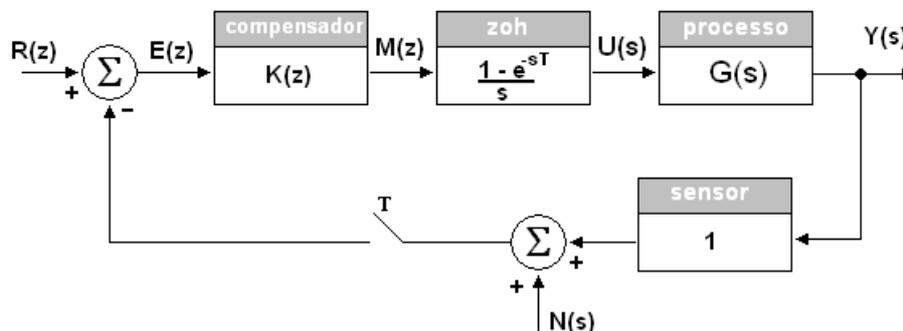


Fig 61. Introdução de erro de medida no sistema sem pré-filtro

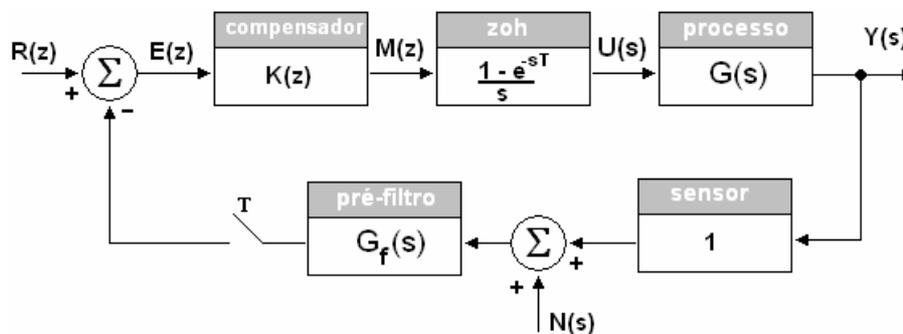


Fig 62. Introdução de erro de media com pré-filtro

Relativamente a cada um dos casos estabelece-se as seguintes funções de transferência  $Y(z)$  em função de  $N(z)$  :

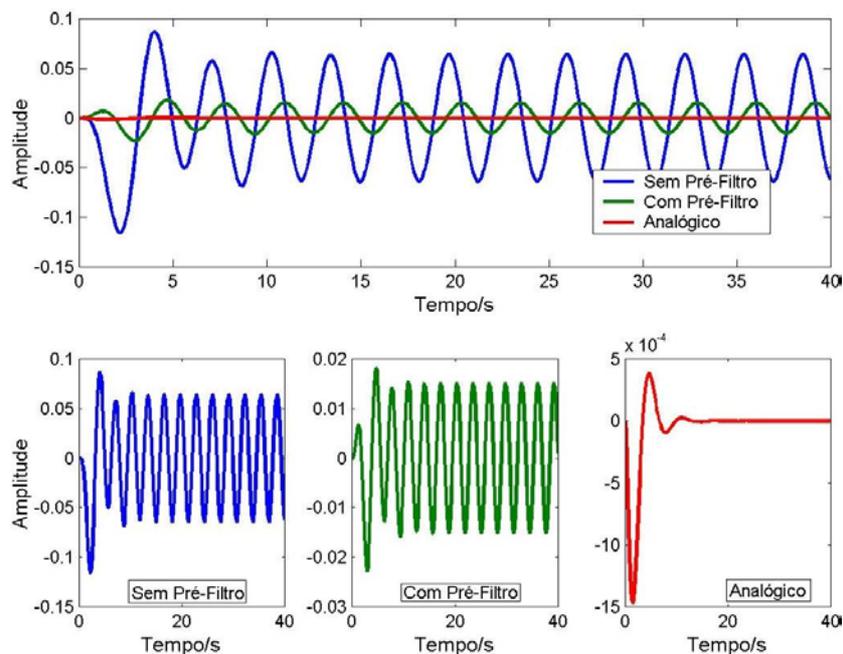
$$Y(z) = -\frac{\overline{GG_{zoh}}^*(s)K(z)N(z)}{1 + \overline{GG_{zoh}}^*(s)K(z)} \quad (235)$$

para o sistema da figura 61 e,

$$Y(z) = -\frac{\overline{GG_{zoh}}^*(s) \cdot K(z) \cdot \overline{G_f N}^*(s)}{1 + \overline{GG_f G_{zoh}}^*(s)K(z)} \quad (236)$$

para o sistema da figura 62.

Note-se que, pelo facto de  $N(z)$  não poder ser factorizado nesta última expressão, não significa que a simulação não possa ser realizada [aconselha-se uma análise ao *script* associado à figura 63]. Dos resultados de simulação obteve-se a seguinte figura.



**Fig 63. Resposta do sistema analógico e dos sistemas digitais a erro de medida fora de banda**

Observa-se que, como já referido anteriormente, o comportamento do tipo passa-baixo do sistema foi capaz de minimizar o efeito, na saída, do erro de medida. No entanto, devido ao fenómeno de aliasing que circunda os sistemas digitais, este ruído de alta frequência passa a ser ruído de banda passante se sub-amostrado. Assim sendo, e com base no seu comportamento, o sistema não consegue amortecer o efeito. De facto, e para o caso do sistema digital sem pré-filtro, é notório o efeito do erro de medida na saída do sistema. Por outro lado, a introdução do pré-filtro no sistema teve como resultado uma atenuação (por um factor de 5) do erro de medida.

### 2.6.3 Projecto por Emulação

A jeito de conclusão apresenta-se nesta secção uma estratégia de projecto para controladores digitais. A técnica que será endereçada recorre aos conhecimentos apresentados no primeiro capítulo dado que o primeiro passo a executar neste procedimento de projecto consiste em derivar um controlador analógico que, para um dado processo contínuo no tempo, satisfaça os critérios de desempenho previamente propostos.

Mais concretamente, este procedimento de projecto é normalmente designado por desenho por emulação e pode ser sumariado nos seguintes quatro passos:

**Passo 1 de 4:** Derivar o controlador analógico

**Passo 2 de 4:** Escolher o período de amostragem e adicionar os elementos associados aos sistemas de controlo digitais.

**Passo 3 de 4:** Digitalizar a lei de controlo

**Passo 4 de 4:** Avaliar o desempenho por simulação.

Do primeiro passo podem antever-se duas situações distintas. Uma em que o sistema de controlo analógico já existe e o que se pretende é convertê-lo em digital. A segunda alternativa considera que nenhum controlador existe e logo deve ser projectado de raiz. A verificar-se a primeira alternativa, e se o desempenho do controlador analógico é para ser mantido, o passo 1 é suprimido. Por outro lado, se o projecto deve ser repetido ou conduzido de raiz, um novo controlador analógico, capaz de garantir as normas de projecto, deve ser derivado.

O segundo ponto envolve a adição, ao sistema analógico, da dinâmica associada aos elementos que circundam uma estratégia de controlo digital. Mais concretamente fala-se do conversor A/D (modelado por um amostrador ideal), do conversor D/A (normalmente um zoh) e do filtro anti-aliasing. Note-se que o efeito das dinâmicas adicionais introduzidas pela retenção e filtragem podem ser tidas em consideração no primeiro passo, i.e. a deterioração da margem de fase por parte destes elementos pode ser tida em consideração durante a fase de projecto do controlador analógico. Adicionalmente, uma frequência de amostragem apropriada deve ser seleccionada. Por norma a

selecção dessa frequência é feita com base na largura de banda de malha fechada ou na resposta ao degrau.

Finalmente, após a discretização do controlador, o desempenho do sistema amostrado deve ser avaliado. Essa avaliação deve ser levada a cabo atendendo à estabilidade relativa do sistema de controlo assim como às respostas transitória e em regime permanente. Caso se considere encerrado o processo iterativo de projecto, a função de transferência do controlador deve ser convertida numa equação às diferenças e embebida num processador. Este processo pode requerer a avaliação do efeito do arredondamento dos parâmetros do controlador devido à precisão finita do processador. Existem algumas estratégias de implementação da equação às diferenças que tentam minimizar este efeito [9][13].

De modo a ilustrar o procedimento de projecto introduzido apresenta-se, a título ilustrativo, o projecto de um controlador digital por emulação. Assim, considere-se um sistema que, em malha aberta, possui a seguinte função de transferência:

$$G(s) = \frac{76}{(s+1)(s+3)^2} \quad (237)$$

Os critérios de desempenho a serem seguidos são:  $e_{ss} < 10\%$ ,  $BW \in [1,2]$  rad/s e  $P_m \approx 45^\circ$ . Numa primeira iteração apresenta-se o diagrama de Bode de malha aberta do sistema.

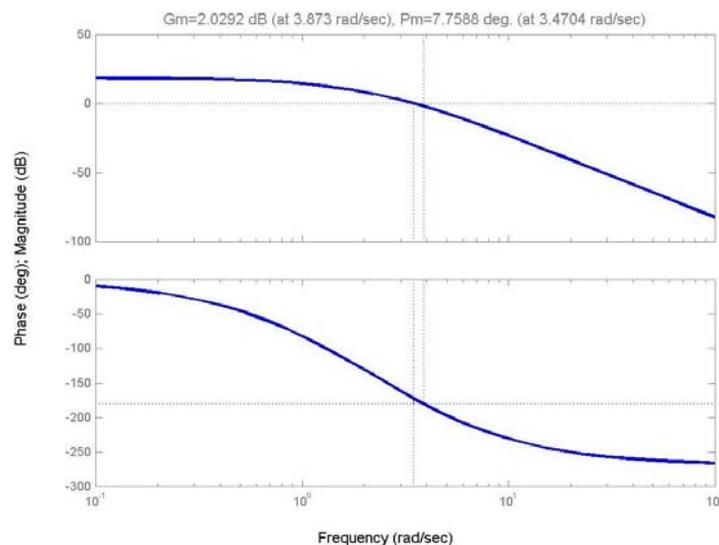


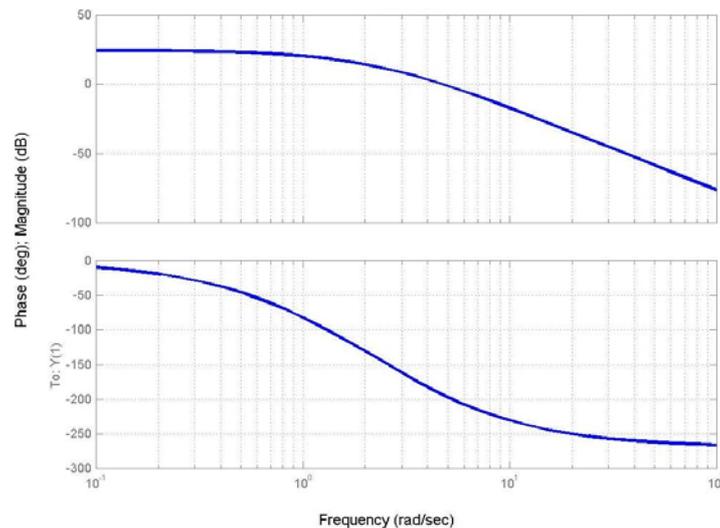
Fig 64. Resposta em frequência de malha aberta do sistema {237}

A frequência de cruzamento de ganho é aproximadamente igual a 3.5 rad/s e a margem de fase em torno dos 7°. Como se pode verificar, a margem de fase é muito baixa e a largura de banda de malha fechada demasiadamente elevada (empiricamente  $2\omega_{gc}$ ). Estas considerações sugerem a utilização de um compensador do tipo atraso de fase.

Do erro em regime permanente determina-se que o ganho do controlador deverá obedecer à seguinte restrição:

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K(76/9)} < 0.1 \Rightarrow K > 1.07 \quad (238)$$

Considere-se  $K = 2$ . Adicionalmente, e dado que se pretende uma largura de banda entre 1 e 2 rad/s, digamos 1.5 rad/s, e atendendo à regra empírica já enunciada (veja equação {50}), o controlador deverá fazer com que a frequência de cruzamento de ganho seja  $\omega_{gc} = 0.75$  rad/s. A figura que se segue mostra a resposta em frequência do sistema em série com o ganho.

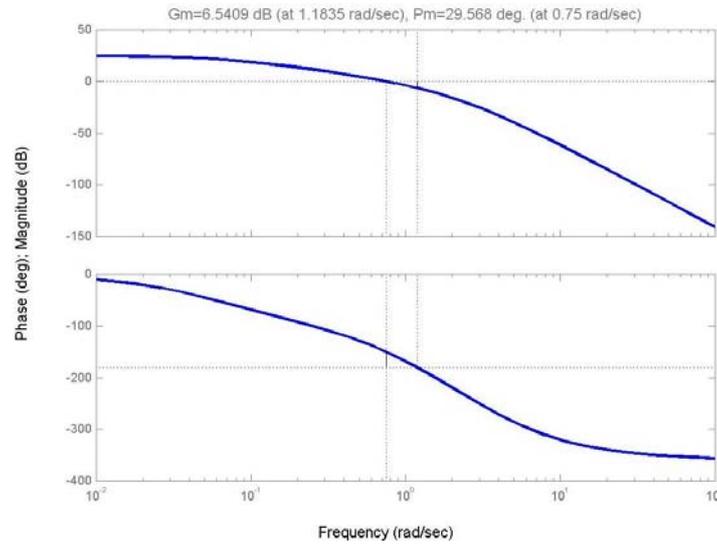


**Fig 65. Resposta em frequência de  $KG(s)$**

À frequência  $\omega = \omega_{gc}$  verifica-se que o ganho é igual a 22dB e a fase igual a -65°. Deste modo é necessário diminuir o ganho, à frequência de 0.75 rad/s, de um valor igual a 22dB. Dado que não é possível alterar o ganho DC, a atenuação à frequência desejada ficará a cargo de um pólo. Sabe-se que a atenuação de um pólo é aproximadamente igual a 20dB por década a partir da frequência do pólo. Assim, neste caso, o pólo deverá ser colocado uma década atrás da frequência de interesse. Mais concretamente em,

$$\omega_p = \omega_{gc} \cdot \left( \sqrt{(10^{22/20})^2 - 1} \right)^{-1} \approx 0.06 \quad (239)$$

Para esse caso apresenta-se a nova resposta em frequência de malha aberta.



**Fig 66. Resposta em frequência de  $KG(s)/(\omega_p^{-1}s+1)$**

Falta agora aumentar a margem de fase de  $29.5^\circ$  para  $45^\circ$ . No entanto, e dado que o controlador será digital, a esse valor será adicionado o efeito do zoh e do filtro anti-aliasing. Considerando uma frequência de amostragem trinta vezes a largura de banda, de malha fechada, do sistema, i.e.  $\omega_0 = 30 \times 1.5 = 45 \text{ rad/s}$

$$\phi = \phi_{zoh} + \phi_{filtro} = 0.75 \frac{180^\circ}{45} + \tan^{-1} \left( 2 \frac{0.75}{45} \right) = 3^\circ + 2^\circ = 5^\circ$$

Assim, o avanço de fase desejado deixa de ser de  $15.4^\circ$  e passa a ser de  $20.4^\circ$ . O avanço de fase é obtido adicionando ao sistema um zero. Para que, à frequência de cruzamento, a fase suba  $20.4^\circ$  é necessário um zero em ,

$$\omega_z = \frac{\omega_{gc}}{\tan(20.4^\circ)} \approx 2.02 \quad (240)$$

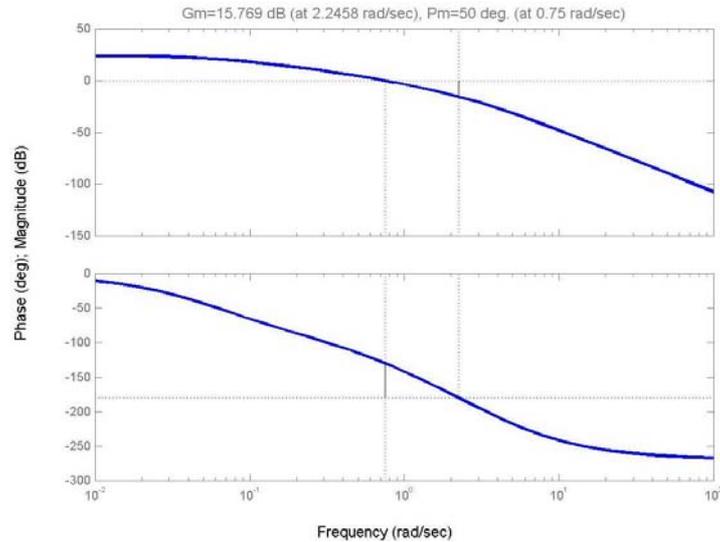
É esperado, devido à introdução do zero, um aumento da frequência de cruzamento de ganho. Contudo, e dado que o avanço de fase pretendido é inferior a  $45^\circ$  a deriva da magnitude não será muito significativa (seguramente inferior a 3dB!). Mais concretamente espera-se um aumento da magnitude da resposta em frequência de um factor igual a,

$$20 \log_{10} \left( \sqrt{\left( \frac{\omega_{gc}}{2.02} \right)^2 + 1} \right) \approx 0.6 \text{ dB} \Rightarrow \Delta = 1.06 \quad (241)$$

Dado que o critério do ganho DC foi ligeiramente sobre-dimensionado, é possível reduzi-lo para 94% do seu valor, i.e.  $K = 2/1.06 = 1.87$ . Deste modo, a função de transferência do controlador é:

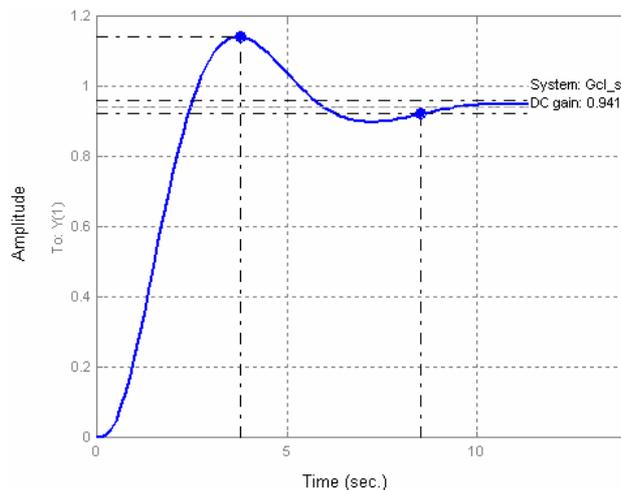
$$K(s) = 1.874 \frac{0.497s + 1}{16.9s + 1} \quad (242)$$

e a resposta em frequência de malha aberta passa ter o seguinte perfil:



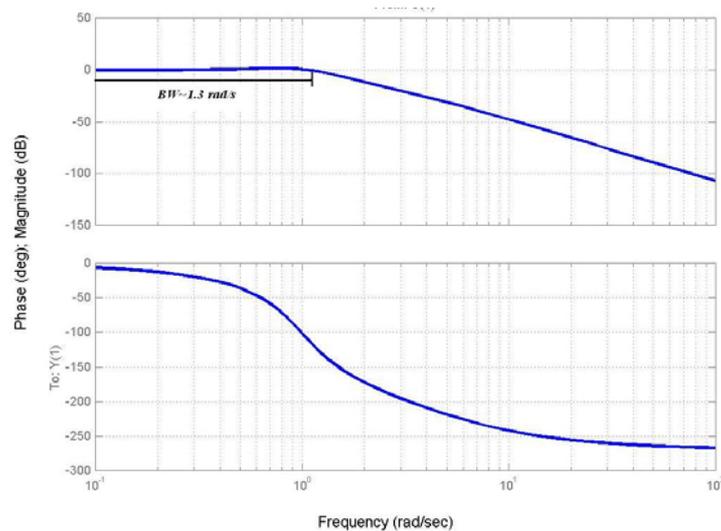
**Fig 67. Resposta em frequência de malha aberta final**

De seguida apresenta-se a resposta em frequência de malha fechada (realimentação unitária) e a resposta ao degrau unitário.



**Fig 68. Resposta ao degrau em malha fechada.**

Como se pode ver, os critérios referentes, tanto ao erro em regime permanente como à margem de fase, foram satisfeitos. Adicionalmente, a partir da figura que se segue, também se pode concluir que a largura de banda do sistema está entre os limites impostos.

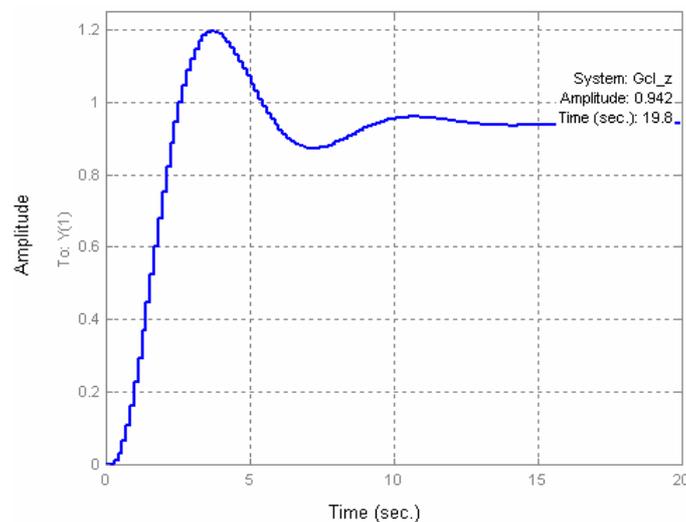


**Fig 69. Resposta em frequência de malha fechada.**

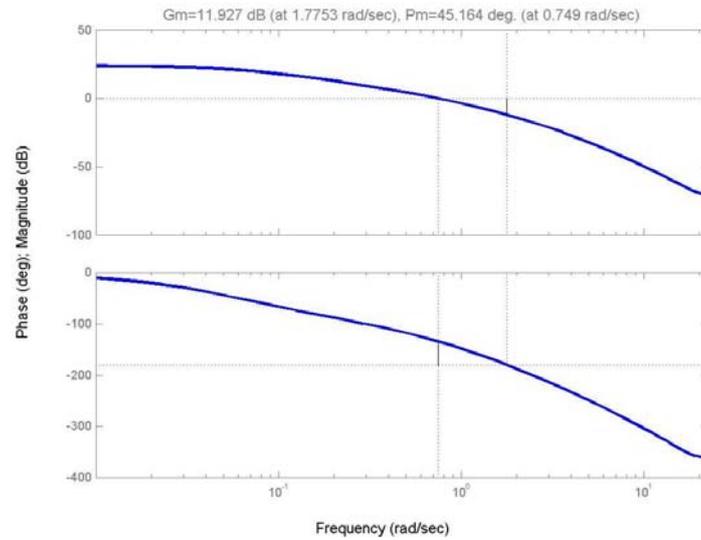
O passo que se segue consiste em discretizar a função de transferência do controlador seguida de uma simulação do sistema de controlo digital. Para realizar a discretização normalmente é usada a transformação bilinear ou o método de Euler "backward". No presente caso recorre-se à transformação de Tustin negligenciando o fenómeno de "warping" (já se viu que, para a frequência de amostragem escolhida, este fenómeno está limitado a 1%). Do processo de discretização decorre que:

$$K(z) = \frac{0.0626 - 0.047 \cdot z^{-1}}{1 - 0.992 \cdot z^{-1}} \quad (243)$$

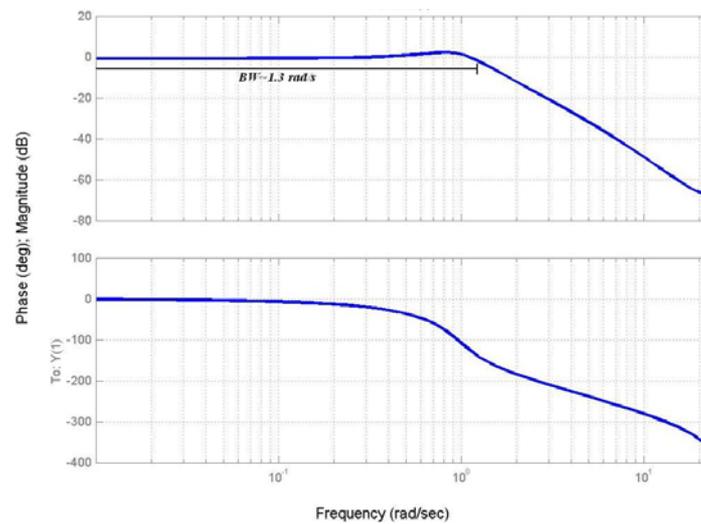
Considerando o efeito do zoh e do filtro anti-aliasing (o processo em série com o retentor de ordem zero é discretizado recorrendo à transformada em z) obtém-se os seguintes resultados:



**Fig 70. Resposta ao degrau, em malha fechada, do sistema de controlo digital**



**Fig 71. Resposta em frequência de malha aberta do sistema de controlo digital**



**Fig 72. Resposta em frequência de malha fechada do sistema de controlo digital**

Conclui-se portanto que, em termos dos critérios de desempenho adoptados, os resultados de simulação são efectivamente os previstos. O passo seguinte iria consistir na implementação da equação às diferenças do controlador e posterior análise "hardware-in-the-loop" do sistema em malha fechada.





### PARTE I: Análise e Projecto de Sistemas de Controlo Analógicos

---

**E1:** *Relação entre qualidade de seguimento da referência e localização do pólo de um sistema de primeira ordem.*

Recorrendo ao MatLab<sup>®</sup> analise a resposta de um sistema de 1<sup>a</sup> ordem ao degrau em função da localização do seu pólo. Para isso deve calcular a resposta do sistema:

$$G(s) = \frac{a}{s+a}$$

para  $a = \{0.1, 1, 10, 100\}$ . Que conclusões pode tirar?

**E2:** *Relação entre imunidade ao ruído e localização do pólo de um sistema de primeira ordem.*

Recorrendo ao MatLab<sup>®</sup> analise a imunidade ao ruído de um sistema de 1<sup>a</sup> ordem em função da localização do seu pólo. Para isso deve calcular a resposta do sistema:

$$G(s) = \frac{a}{s+a}$$

para  $a = \{0.1, 1, 10, 100\}$  a um degrau unitário contaminado com ruído branco. A relação sinal/ruído deve ser de 6dB. Que conclusões pode tirar?

**E3:** *Resposta em frequência de um sistema de primeira ordem.*

Recorrendo ao MatLab<sup>®</sup> obtenha o diagramas de Bode para o sistema:

$$G(s) = \frac{a}{s+a}$$

com  $a = \{0.1, 1, 10, 100\}$ . Que conclusões pode tirar? Quais os valores para as margens de ganho e fase?

**E4:** *Efeito, da variação de  $\sigma$ , na resposta ao degrau de um sistema de segunda ordem.*

Recorrendo ao MatLab<sup>®</sup> verifique as alterações que existem na resposta do sistema a um degrau unitário para  $\sigma = \{-0.5; -1; -5\}$  considerando  $\omega_d$  constante e igual a 1. Para isso tenha em consideração os seguintes critérios de desempenho:

- *Tempo de Estabelecimento*
- *Sobre-elongação*
- *Tempo de Subida*
- *Tempo de Pico*

**Nota:** Considere a seguinte parametrização: 
$$G(s) = \frac{\omega_d^2 + \sigma^2}{(s - \sigma + j\omega_d)(s - \sigma - j\omega_d)}$$

**E5:** *Efeito, da variação de  $\omega_d$ , na resposta ao degrau de um sistema de segunda ordem.*

Recorrendo ao MatLab<sup>®</sup> verifique as alterações que existem na resposta do sistema a um degrau unitário para  $\omega_d = \{0.5, 1, 5\}$  considerando  $\sigma$  constante e igual a 1. Para isso tenha em consideração os seguintes critérios de desempenho:

- *Tempo de Estabelecimento*
- *Sobre-elongação*
- *Tempo de Subida*
- *Tempo de Pico*

**E6:** *Efeito, da variação de  $\omega_n$ , na resposta ao degrau de um sistema de segunda ordem.*

Recorrendo ao MatLab<sup>®</sup> verifique as alterações que existem na resposta do sistema a um degrau unitário para  $\omega_n = \{\sqrt{2}/2, \sqrt{2}, 5\sqrt{2}\}$  considerando  $\zeta = \sqrt{2}/2$ . Para isso tenha em consideração os seguintes critérios de desempenho:

- *Tempo de Estabelecimento*
- *Sobre-elongação*
- *Tempo de Subida*
- *Tempo de Pico*

**E7:** *Efeito, da variação de  $\zeta$ , na resposta ao degrau de um sistema de segunda ordem*

Recorrendo ao MatLab<sup>®</sup> verifique as alterações que existem na resposta do sistema a um degrau unitário para  $\theta = \{30, 45, 60\} (^{\circ})$  considerando  $\omega_n = \sqrt{2}$ . Para isso tenha em consideração os seguintes critérios de desempenho:

- *Tempo de Estabelecimento*
- *Sobre-elongação*
- *Tempo de Subida*
- *Tempo de Pico*

**E8:** Para cada um dos sistemas subsequentes, e recorrendo ao MatLab<sup>®</sup>, compare a resposta ao degrau do sistema original com a resposta do sistema aproximado por pólo(s) dominante(s).

a)  $G(s) = \frac{1}{(s+0.1)(s+1)}$

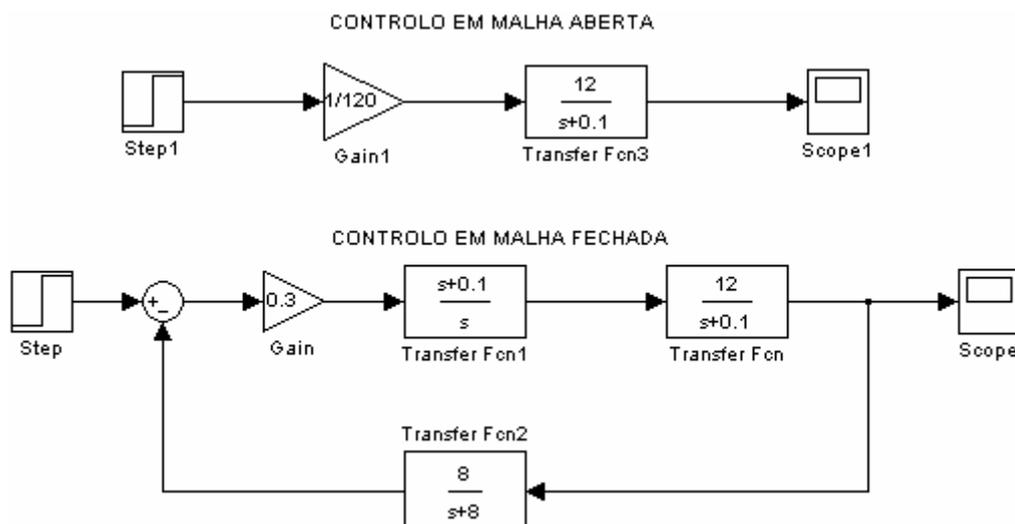
b)  $G(s) = \frac{(s+0.2)}{(s+0.1)(s+1)}$

c)  $G(s) = \frac{2810.1 \cdot (s+4)}{(s+3.8)(s+6)(s^2+2s+17)(s^2+10s+29)}$

**E9:** *Resposta de um sistema em malha aberta Vs. Resposta do sistema em malha fechada*

Considere um sistema de controlo da temperatura para um determinado processo com função de transferência:

$$G(s) = \frac{12}{s+0.1}$$



- a) Recorrendo ao Simulink<sup>®</sup> do MatLab<sup>®</sup> simule a resposta do sistema em malha fechada e em malha aberta a uma variação brusca da referência (0-100°C).
- b) Simule a resposta de ambos os sistemas de controlo a uma perturbação de carga, em degrau, com amplitude de -5°C.
- c) No diagrama de blocos anterior, `Transfer Fcn2` representa a função de transferência de um termistor e respectivo sistema de condicionamento de sinal. Analise o efeito, na resposta do sistema ao degrau de amplitude 100, se a informação fornecida pelo sensor estiver contaminada com ruído branco de desvio padrão unitário.

**E10:** *Projecto de um controlador analógico pelo método da análise do lugar das raízes.*

Considere um sistema com a seguinte função de transferência em malha aberta:

$$G(s) = \frac{0.8}{s+1}$$

Projecte um controlador de modo que o sistema exiba, em malha fechada, as seguintes características:

- a) Largura de banda em torno de 2 rad/s e erro em regime permanente máximo em torno dos 5%.
- b) Largura de banda em torno de 0.5 rad/s e erro em regime permanente máximo em torno dos 5%.

**E11:** *Projecto de um controlador analógico pelo método da análise do lugar das raízes.*

Considere o seguinte sistema em malha aberta:

$$G(s) = \frac{5}{(s+2)(s+3)}$$

Recorrendo ao lugar das raízes projecte um controlador de modo a que o sistema exiba, em malha fechada, as seguintes características.

- Erro ao degrau unitário inferior a 0.05
- Margem de Fase = 45°
- Largura de Banda aproximadamente igual a 6 rad/s.

**E12:** *Sintonia de um controlador PID recorrendo às regras de Ziegler-Nichols.*

Considere o seguinte sistema em malha aberta:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+3)}$$

Atendendo às regras de sintonia de Ziegler e Nichols projecte um controlador PID para o processo. Adicionalmente, e recorrendo ao MatLab®, analise a resposta do sistema em malha fechada com e sem compensação.

**E13:** *Sintonia de um controlador PID recorrendo às regras de Ziegler-Nichols.*

Considere o seguinte sistema em malha aberta:

$$G(s) = \frac{e^{-0.1s}}{(s+1)}$$

Atendendo às regras de sintonia de Ziegler e Nichols projecte um controlador PID para o processo. Adicionalmente, e recorrendo ao MatLab®, analise a resposta do sistema em malha fechada com e sem compensação.

**E14:** *Projecto de um controlador PID analiticamente.*

Considere o seguinte sistema em malha aberta:

$$G(s) = \frac{400}{s^2 + 30s + 200}$$

Projecte um controlador PID (analiticamente) de modo a que o sistema exhiba, em malha fechada, as seguintes características:

- Erro à rampa unitária = 0.1
- Sobre-elongação = 10% e tempo de estabelecimento = 2s.

**E15:** *Projecto de um controlador avanço de fase recorrendo aos diagramas de Bode.*

Considere um sistema não compensado com função de transferência:

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 0.2s + 0.1}$$

Projecte um controlador avanço de modo que o sistema exhiba um erro em regime permanente inferior ou igual a 1% e uma margem de fase em torno de 45°.

**E16:** *Projecto de um controlador avanço de fase.*

Projecte um compensador avanço para o sistema:

$$G(s) = \frac{72}{(s+1)(s+3)^2}$$

Projecte um controlador avanço de modo que o sistema exiba as seguintes características.

- Erro em regime permanente (ao degrau) inferior ou igual a 0.1
- Margem de Fase de 45°
- Largura de banda aproximadamente igual a 1rad/s.

**E17:** *Projecto de um controlador atraso de fase.*

Projecte um compensador atraso para o sistema:

$$G(s) = \frac{10(s+5)}{(s+15)(s^2+8s+20)}$$

Projecte um controlador atraso de modo que o sistema exiba, em malha fechada, as seguintes características.

- Erro em regime permanente inferior ou igual a 10%
- Sobre-elongação inferior ou igual a 5%

**E18:** *Projecte um compensador para o seguinte sistema:*

$$G(s) = \frac{10}{s(s+5)}$$

De modo a que este exiba as seguintes características.

- Erro em regime permanente (à rampa unitária) inferior ou igual a 5%
- Margem de fase em torno de 40° e largura de banda perto de 2 rad/s

## PARTE II: Amostragem e Reconstrução

---

**E19:** *Determine a transformada  $E^*(s)$  dos seguintes sinais:*

- a)  $e(t) = u(t)$
- b)  $e(t) = e^{-t}$
- c)  $e(t) = t$

**E20:** Determine a transformada  $E^*(s)$  dos seguintes sinais  $E(s)$ :

a)  $E(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$

b)  $E(s) = \frac{s+2}{(s+1)s^2}$

c)  $E(s) = \frac{s^2+5s+6}{s(s+4)(s+5)}$

**E21:** Determine a funções de transferência e a resposta em frequência de um retentor ideal de primeira ordem (*first-order-hold*).

### PARTE III: Transformada em Z

**E22:** Determine a transformada  $E(z)$  dos seguintes sinais:

a)  $e(nT) = u(nT)$

b)  $e[n] = e^{-n}$

c) Série temporal obtida por amostragem de  $e(t) = t$  todos os segundos.

**E23:** Determine a transformada  $E(z)$  de:

a)  $E(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$

b)  $E(s) = \frac{s+2}{(s+1)s^2}$

c)  $E(s) = \frac{s^2+5s+6}{s(s+4)(s+5)}$

**E24:** Determine a transformada  $E(z, m)$  dos sistemas apresentados no exercício anterior.

**E25:** Determine a transformada modificada de  $z$  para as seguintes funções:

a)  $E(s) = \frac{20e^{-0.37s}}{(s+2)(s+5)}, T = 1s$

b)  $E(s) = \frac{(s+2)e^{-0.2Ts}}{(s+1)s^2}$

c)  $E(s) = \frac{2e^{-0.75s}}{s^2 + 2s + 5}, T = 0.2s$

**E26:** Determine as sequências discretas  $e(kT)$  associadas às seguintes transformadas em  $z$  :

a)  $E(z) = \frac{z}{z^2 - 3z + 2}$

b)  $E(z) = \frac{-3.894z}{z^2 + 0.6065}$

c)  $E(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$

**E27:** Resolva a seguintes equações às diferenças utilizando a transformada Z

a)  $m[k] = e[k] - e[k-1] - m[k-1]$

b)  $x[k] - 3x[k-1] + 2x[k-2] = e[k]$

c)  $y[k+2] - 6 \cdot y[k+1] + 8y[k] = e[k]$  para  $y[0] = 1$  e  $y[1] = 2$

**E28:** Considere o sistema discreto caracterizado pela equação às diferenças:

$$y[k+1] = a \cdot y[k] + b \cdot x[k] \text{ onde } 0 < a < 1 \text{ e } y[0] = 0$$

a) Determine a resposta impulsional e faça um esboço do resultado.

b) Calcule a resposta ao degrau unitário e esboce o resultado

c) Determine o ganho estático do sistema.

**E29:** Considere o sistema discreto caracterizado pela seguinte equação às diferenças:

$$y[k] = y[k-1] - 0.25 \cdot y[k-2] + x[k-1] + 0.5 \cdot x[k-2]$$

Determine a função de transferência  $Y(z)/X(z)$ , identifique os pólos e zeros e represente-os no plano  $z$ . Conclua quanto à estabilidade.

#### **PARTE IV:** Resposta de sistemas discretos no tempo em malha aberta

---

**E30:** Prove que, para um sistema constituído por um amostrador ideal/reconstrutor de ordem zero, com entrada  $E(s)$  e saída  $C(s)$  temos  $C(z) = G(z)E(z)$  onde  $G(s) = C(s)/E^*(s)$ .

**E31:** Considere um sistema constituído por um amostrador ideal/reconstrutor de ordem zero, em série com um processo, com função de transferência:

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

Admitindo uma entrada em degrau unitário determine  $C(z)$  e  $c(kT)$ .

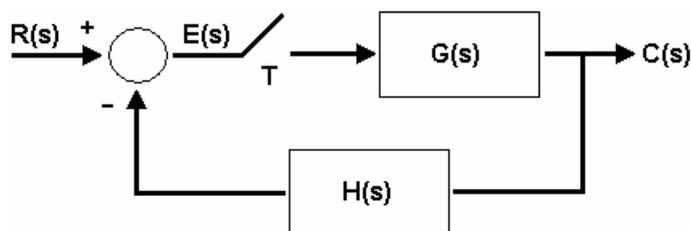
**E32:** Considere um sistema constituído por um A/D em série com um filtro digital, um D/A e um processo com função de transferência  $G(s)$ . Prove que o mesmo é equivalente a um amostrador ideal em série com a transformada  $z$  associada ao filtro digital,  $D(z)$ , a função de transferência de um retentor de ordem zero e a função de transferência do processo.

**E33:** Admita que no sistema anterior o controlador associado ao filtro digital,  $D(z)$ , implementa a função  $m[k] = 2e[k] - e[k-1]$  e que a função de transferência do processo é  $G(s) = 1/s + 1$ .

- Determine  $D(z)$ .
- Determine  $C(z)$  e  $c(kT)$  para uma entrada em degrau.
- Repita a alínea anterior para  $D(z) = 1$  e  $G(s) = 5s/s + 0.1$ .

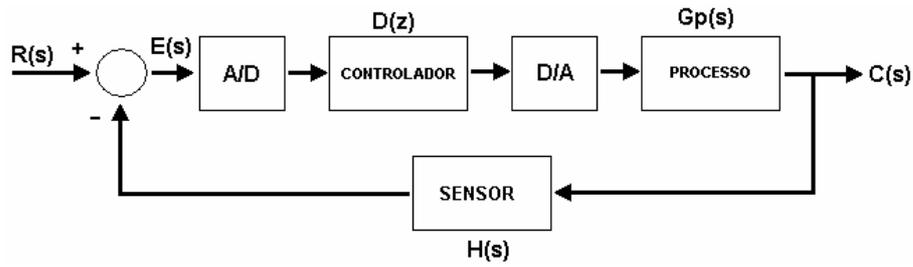
**PARTE V:** Resposta de sistemas discretos no tempo em malha fechada

**E34:** Determine a função de transferência em malha fechada do seguinte sistema de controlo:

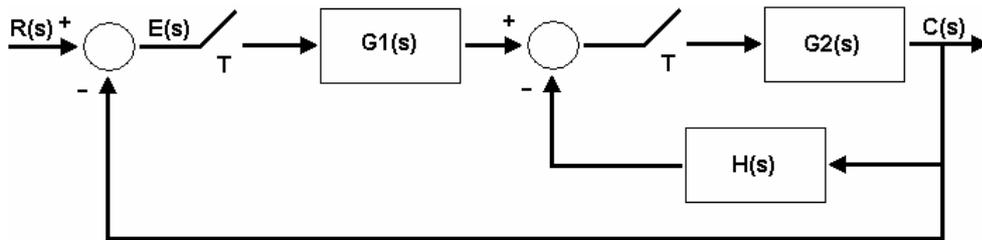


**E35:** Considere os seguintes sistemas de controlo em malha fechada. Determine  $C(z)/R(z)$  para cada um a função de transferência .

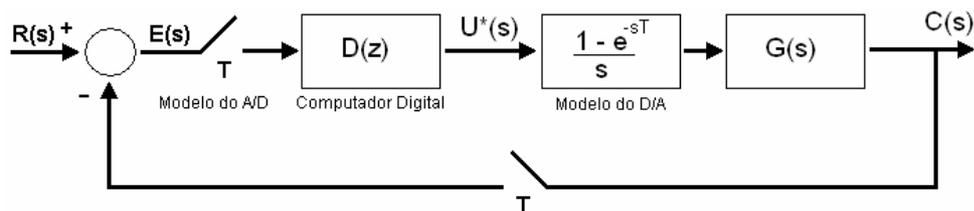
a)



b)



**E36:** Para o diagrama da figura seguinte determine:

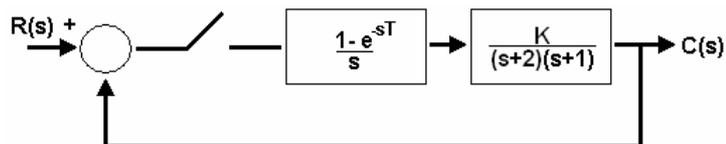


a)  $C(z)/R(z)$ .

b) A resposta  $C(z)$  para o caso em que  $G(s) = a/s + a$ ,  $e^{-aT} = 0.5$  sendo o algoritmo do computador  $u[k] = u[k-1] + k \cdot e[k]$  e  $r(t) = u(t)$ .

**PARTE VI:** Análise da estabilidade de sistemas discretos no tempo

**E37:** Verifique para que valores de  $K$  é o seguinte sistema estável.



**Nota:** Considere  $e^{-T} = 0.5$

a) Recorrendo ao critério de Routh-Hurwitz para sistemas discretos.

b) Recorrendo ao critério de estabilidade de Jury.

**E38:** Recorrendo ao critério de Jury caracterize, quanto á estabilidade, o seguinte sistema discreto.

$$G(z) = \frac{1}{z^3 - 1.1z^2 - 0.1z + 0.2}$$

**PARTE VII: Projecto de Controladores Digitais**

**E39:** Considere um processo com função de transferência:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

Determine um controlador digital capaz de implementar a função de transferência:

$$K(s) = \frac{70}{(s+2)(s+1)}$$

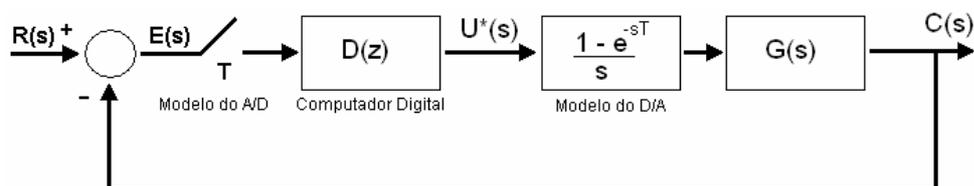
para:

- a) Uma frequência de amostragem de 20Hz.
- b) Uma frequência de amostragem de 40Hz.

**Nota:** Utilize em ambos os casos uma aproximação de Euler (forward)

- c) Determine, com o MatLab<sup>®</sup>, a resposta do sistema  $K(s)G(s)$  a um degrau unitário e compare-a com a resposta do sistema quando o controlador é digital.

**E40:** Considere o sistema realimentado da figura



onde,

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 2s}$$

Pretende-se que a sobre-elongação na resposta ao degrau unitário, seja inferior a 10%, o tempo de subida menor do que 5 segundos e o erro à rampa unitária inferior a 2%.

- a) Nestas condições determine uma F.T., de um controlador contínuo capaz de satisfazer estes requisitos.
- b) Determine a função de transferência, em tempo discreto, do controlador digital obtido por emulação do controlador contínuo recorrendo à transformação bilinear. Qual a frequência de amostragem que deverá utilizar?

[ ◀ EXERCÍCIOS ]

## A1. Transformada de Laplace

A transformada de Laplace é usada para converter relações expressas no domínio do tempo num conjunto de equações expressas em termos de uma variável complexa normalmente designada por ' $s$ '. A transformada de Laplace pode ser unilateral ou bilateral. Ambas estão definidas sob suporte idêntico diferindo apenas no intervalo de tempo de análise. Assim, considere os dois modelos de transformada:

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-st} dt \quad (\text{versão bilateral})$$

e

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^{+\infty} x(t) \cdot e^{-st} dt \quad (\text{versão unilateral})$$

onde  $\mathcal{L}\{\cdot\}$  se refere à transformação de Laplace. A variável complexa  $s$  é definida como sendo do tipo  $s = \sigma + j\omega$ . Ao conjunto de valores de  $s$  para os quais o integral converge é designado por região de convergência da transformada de Laplace (principal diferença relativamente à transformada de Fourier)

A assimetria da versão unilateral relativamente a versão bilateral prende-se, como se pode observar, apenas com o limite inferior do integral. Subjectivamente, a versão unilateral implica causalidade visto pressupor na sua especificação que  $x(t) = 0$  para  $t < 0$ .

No contexto do controlo de sistemas, a aplicação da transformada de Laplace está intimamente ligada ao facto de, na maior parte dos casos, a dinâmica dos sistemas físicos ser expressa sob a forma de equações diferenciais ordinárias

de coeficientes constantes. A aplicação da transformada de Laplace a equações deste tipo transforma-as em equações polinomiais de mais simples trato. De facto, considere-se o seguinte caso:

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

A transformada de Laplace a essa equação diferencial conduz a:

$$Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\} = \int_0^{+\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt$$

Primitivando por "partes" vêm,

$$\begin{aligned} P\left[\frac{dx(t)}{dt} e^{-st}\right] &= P\left[\frac{dx(t)}{dt} e^{-st}\right] e^{-st} - P\left[P\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] \cdot \frac{d}{dt} e^{-st}\right] \\ &= x(t)e^{-st} + s \cdot P[x(t)e^{-st}] \end{aligned}$$

e logo,

$$Y(s) = x(t)e^{-st} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + s \cdot \int_0^{+\infty} x(t)e^{-st} dt$$

Como,

$$X(s) = \int_0^{+\infty} x(t)e^{-st} dt$$

vem que,

$$Y(s) = sX(s) - x(0)$$

onde  $x(0)$  é o valor inicial de  $x(t)$  no instante  $t = 0$ . De facto, e considerando todas as condições iniciais nulas, derivar no tempo é sinónimo de multiplicar por  $s$  na frequência complexa.

É possível retornar ao domínio do tempo a partir do domínio de Laplace recorrendo à transformada inversa de Laplace. Esta transformada é apresentada, formalmente, como um integral de contorno ao longo de  $s = \sigma + j\omega$  com a seguinte forma:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s) \cdot e^{st} ds$$

que pode ser resolvido recorrendo ao teorema dos resíduos.

Para concluir, apresentam-se de seguida algumas das propriedades fundamentais da transformada de Laplace:

### Linearidade

$$\text{Se } x_1(t) \Leftrightarrow X_1(s) \text{ e } x_2(t) \Leftrightarrow X_2(s) \text{ então,}$$

$$\mathcal{L}\{x_1(t) + x_2(t)\} = \mathcal{L}\{x_1(t)\} + \mathcal{L}\{x_2(t)\} = X_1(s) + X_2(s)$$

### Homogeneidade

$$\text{Se } x(t) \Leftrightarrow X(s) \text{ então,}$$

$$\mathcal{L}\{\alpha x(t)\} = \alpha \mathcal{L}\{x(t)\} = \alpha X(s), \quad \forall \alpha$$

### Teorema do Valor Final

$$\text{Se } x(t) \Leftrightarrow X(s) \text{ então,}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$$

### Teorema do Valor Inicial

$$\text{Se } x(t) \Leftrightarrow X(s) \text{ então,}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} x(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$$

### Diferenciação

$$\text{Se } x(t) \Leftrightarrow X(s) \text{ então,}$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n x(t)}{dt^n}\right\} = s^n X(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} \frac{d^{k-1} x(0)}{dt^{k-1}}$$

### Integração

$$\text{Se } x(t) \Leftrightarrow X(s) \text{ então,}$$

$$\mathcal{L}\{P^n[x(t)]\} = \frac{X(s)}{s^n} + \sum_{k=1}^n \frac{P^k[x(0)]}{s^{n-k+1}}$$



## A2. Teoria de Fourier

O objectivo das transformações de Fourier é o de converter um sinal complexo num conjunto de sinais de tratamento mais simples. Além dos sinais básicos utilizados por Fourier, qualquer sinal pode ser decomposto de mais do que uma forma distinta, i.e. um sinal pode ser representado como uma combinação linear de um conjunto de sinais básicos. Esses sinais básicos podem ser de qualquer tipo desde que sejam capazes de representar um conjunto vasto e útil de sinais. Adicionalmente, a resposta de um sistema linear e invariante no tempo ao sinal básico deve ser suficientemente simples em estrutura de modo a fornecer uma representação conveniente da resposta do sistema a qualquer sinal constituído como uma combinação linear de sinais básicos.

Uma das possibilidades consiste em exprimir um sinal a partir da soma (integral) ponderada de impulsos deslocados no tempo:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot \delta(t - \tau) d\tau$$

ou

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \cdot \delta[n - k]$$

e nestes casos sabendo a resposta do sistema ao impulso (resposta impulsiva ou impulsional) é possível estabelecer a resposta do sistema a qualquer sinal através da convolução do sinal com a resposta impulsional, i.e. se  $y(t)$  ( $y[n]$ ) representar a saída de um SLIT então:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau$$

ou

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \cdot h[n - k]$$

onde  $h(t)$  e  $h[n]$  se refere às respostas impulsivas do sistema contínuo e discreto respectivamente.

Outra possibilidade consiste em decompor um sinal como uma soma ponderada de exponenciais complexas. A importância desta estratégia assenta no facto de que a resposta de um SLIT a um sinal exponencial complexo é ainda um sinal exponencial complexo com a mesma frequência e, provavelmente, com amplitude e fase distintas<sup>‡</sup>. Dependendo do tipo de sinal envolvido (periódico, discreto, etc.), a representação em termos de exponenciais complexas podem tomar os seguintes aspectos:

▪ **Série de Fourier**

Qualquer sinal periódico pode ser escrito como a soma ponderada de exponenciais complexas relacionadas harmonicamente, i.e. um sinal  $x(t)$  periódico infinito com período fundamental  $T_o$  pode ser escrito como:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k \cdot e^{jk\omega_o t}$$

onde  $\omega_o = \frac{2\pi}{T_o}$  se refere à frequência angular fundamental e  $C(k)$  representa

uma função de ponderação calculada por:

$$C_k = \frac{1}{T_o} \int_{T_o} x(t) \cdot e^{-jk\omega_o t} dt$$

Ou seja os coeficientes da série de Fourier são calculados a partir do integral ao longo de um período do sinal

▪ **Transformada de Fourier de Sinais Aperiódicos**

Os sinais aperiódicos também podem ser representados como um combinação linear de exponenciais complexas. Contudo, neste caso, as exponenciais não estão relacionadas harmonicamente mas infinitamente próximas na frequência  $\omega$  a representação em termos de combinação linear toma a forma de um integral (em vez de um somatório).

Assim, se  $x(t)$  é um sinal aperiódico que admite representação no domínio de Fourier, as equações de síntese e análise para a transformada de Fourier são:

$$x(t) \xrightleftharpoons[F^{-1}]{F} X(j\omega)$$

<sup>‡</sup> A esta propriedade dos SLIT é dado frequentemente o nome de fidelidade sinusoidal.

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega$$

▪ **Transformada de Fourier de Sinais Periódicos**

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi C_k \delta(\omega - k\omega_o)$$

onde,

$$C_k = \frac{1}{T_o} \int_{T_o} x(t) \cdot e^{-jk\omega_o t} dt$$

Da expressão anterior verifica-se que existe uma relação estreita entre a transformada de Fourier de um sinal periódico e os coeficientes da série de Fourier. Ou seja, em termos de representação espectral, a transformada de Fourier de um sinal periódico é sempre um conjunto de impulsos situados em múltiplos harmónicos da frequência fundamental e ponderados pelo factor  $2\pi C_k$ .

**Nota:** Para que um sinal contínuo no tempo admita representação no domínio de Fourier é suficiente que se verifiquem três condições designadas por condições de Dirichlet:

- Num período ou intervalo finito  $x(t)$  deve possuir um número finito de máximos e mínimos.
- Num período ou intervalo finito  $x(t)$  deve possuir um número finito de descontinuidades.
- O sinal deve ser absolutamente integrável, i.e.  $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < \infty$

▪ **Transformada de Fourier de sinais Discretos**

Uma sequência discreta  $x[n]$  terá transformada de Fourier  $X(e^{j\omega})$  dada por:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot e^{-j\omega n}$$

se a série existir. A transformada inversa de Fourier de um sinal discreto é:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

▪ **Transformada Discreta de Fourier (DFT)**

A transformada discreta de Fourier de um sinal discreto no tempo é ela própria uma sequência discreta e consiste na amostragem da transformada de Fourier anterior em N pontos igualmente espaçados:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}, 0 \leq k \leq N-1$$

onde,

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \cdot e^{j\frac{2\pi kn}{N}}, 0 \leq n \leq N-1$$

Note-se que, no caso de sinais discretos no tempo, a frequência  $\omega$  se refere na realidade à frequência digital  $\omega_d$  (por simplicidade de notação omitiu-se o  $d$  nas duas últimas transformadas. A relação entre a frequência analógica e a frequência digital é:

$$\omega_d = \omega \cdot T$$

onde T se refere ao período de amostragem. Para uma frequência analógica igual á frequência de amostragem (inverso do período de amostragem), a frequência digital é de  $2\pi$  radianos por amostra. Mais ainda, verifica-se que as transformadas de Fourier para sinais discretos são periódicas com período de  $2\pi$ . De modo a validar essa informação atenda-se à seguinte demonstração:

$$X(e^{j(\omega+2k\pi)}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot e^{-j(\omega+2k\pi)n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot e^{-j\omega n} \cdot e^{-j2k\pi n}, \forall k \in \mathbb{Z}$$

como  $n$  apenas toma valores inteiros então  $e^{-j2\pi kn} = \cos(2k\pi n) - j \sin(2k\pi n) = 1$  e logo,

$$X(e^{j(\omega+2k\pi)}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot e^{-j\omega n} = X(e^{j\omega})$$

como esperávamos demonstrar.

### A3. Alguns Pares de Transformadas de Laplace

Função no Tempo $e(t), t > 0$	Transformada de Laplace $E(s)$
$\delta(t)$	1
$\delta(t - t_0)$	$e^{-st_0}$
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
$t$	$\frac{1}{s^2}$
$\frac{t^2}{2}$	$\frac{1}{s^3}$
$t^{k-1}$	$\frac{(k-1)!}{s^k}$
$e^{-at}$	$\frac{1}{s+a}$
$t \cdot e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$t^k \cdot e^{-at}$	$\frac{(k-1)!}{(s+a)^k}$
$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$
$t - \frac{1 - e^{-at}}{a}$	$\frac{a}{s^2(s+a)}$
$1 - (1+at)e^{-at}$	$\frac{a^2}{s(s+a)^2}$
$e^{-at} - e^{-bt}$	$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$
$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$
$\frac{1}{b} e^{-at} \sin(bt)$	$\frac{1}{(s+a)^2 + b^2}$
$e^{-at} \cos(bt)$	$\frac{a^2 + b^2}{s((s+a)^2 + b^2)}$
$\frac{1}{ab} + \frac{e^{-at}}{a(a-b)} + \frac{e^{-bt}}{b(b-a)}$	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$



## A4. Alguns Pares de Transformadas Z

Função no Tempo $e(t), t > 0$	Transformada Z $E(z)$	Transformada Modificada de Z $E(z, m)$
$u(t)$	$\frac{z}{z-1}$	$\frac{1}{z-1}$
$t$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$	$\frac{mT}{z-1} + \frac{Tz}{(z-1)^2}$
$\frac{t^2}{2}$	$\frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$	$\frac{T^2}{2} \left( \frac{m^2}{z-1} + \frac{2m+1}{(z-1)^2} + \frac{2}{(z-1)^3} \right)$
$t^{k-1}$	$\lim_{a \rightarrow 0} (-1)^{k-1} \frac{\partial^{k-1}}{\partial a^{k-1}} \left( \frac{z}{z - e^{-aT}} \right)$	$\lim_{a \rightarrow 0} (-1)^{k-1} \frac{\partial^{k-1}}{\partial a^{k-1}} \left( \frac{e^{-amT}}{z - e^{-aT}} \right)$
$e^{-at}$	$\frac{z}{z - e^{-aT}}$	$\frac{e^{-amT}}{z - e^{-aT}}$
$t \cdot e^{-at}$	$\frac{Tze^{-aT}}{(z - e^{-aT})^2}$	$\frac{Te^{-amT} (e^{-aT} + m(z - e^{-aT}))}{(z - e^{-aT})^2}$
$t^k \cdot e^{-at}$	$(-1)^k \frac{\partial^k}{\partial a^k} \left( \frac{z}{z - e^{-aT}} \right)$	$(-1)^k \frac{\partial^k}{\partial a^k} \left( \frac{e^{-amT}}{z - e^{-aT}} \right)$
$1 - e^{-at}$	$\frac{z(1 - e^{-aT})}{(z-1)(z - e^{-aT})}$	$\frac{1}{z-1} - \frac{e^{-amT}}{z - e^{-aT}}$
$t - \frac{1 - e^{-at}}{a}$	$\frac{z(z(aT - 1 + e^{-aT}) + (1 - e^{-aT} - aTe^{-aT}))}{a(z-1)^2(z - e^{-aT})}$	$\frac{T}{(z-1)^2} + \frac{amT - 1}{a(z-1)} + \frac{e^{-amT}}{a(z - e^{-aT})}$
$1 - (1 + at)e^{-at}$	$\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z - e^{-aT}} - \frac{aTe^{-aT}z}{(z - e^{-aT})^2}$	$\frac{1}{z-1} - \left( \frac{1 + amT}{z - e^{-aT}} + \frac{aTe^{-aT}}{(z - e^{-aT})^2} \right) e^{-amT}$
$e^{-at} - e^{-bt}$	$\frac{(e^{-aT} - e^{-bT})z}{(z - e^{-aT})(z - e^{-bT})}$	$\frac{e^{-amT}}{z - e^{-aT}} - \frac{e^{-bmT}}{z - e^{-bT}}$
$\sin(at)$	$\frac{z \sin(aT)}{z^2 - 2z \cos(aT) + 1}$	$\frac{z \sin(amT) + \sin((1-m)aT)}{z^2 - 2z \cos(aT) + 1}$
$\cos(at)$	$\frac{z(z - \cos(aT))}{z^2 - 2z \cos(aT) + 1}$	$\frac{z \cos(amT) - \cos((1-m)aT)}{z^2 - 2z \cos(aT) + 1}$
$\frac{1}{b} e^{-at} \sin(bt)$	$\frac{ze^{-aT} \sin(bT)}{b(z^2 - 2ze^{-aT} \cos(bT) + e^{-2aT})}$	$\frac{e^{-amT} (z \sin(bmT) + e^{-aT} \sin((1-m)bT))}{b(z^2 - 2ze^{-aT} \cos(bT) + e^{-2aT})}$
$e^{-at} \cos(bt)$	$\frac{z^2 - ze^{-aT} \cos(bT)}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos(bT) + e^{-2aT}}$	$\frac{e^{-amT} (z \cos(bmT) + e^{-aT} \sin((1-m)bT))}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos(bT) + e^{-2aT}}$



- [1] Åström, K e Wittenmark, B., "Adaptive Control", 1985 Addison-Wesley, ISBN 0-201-55866-1
- [2] Coelho, J.P., "Processamento Digital de Sinal", 2001-2002 Instituto Politécnico de Bragança – Escola Superior de Tecnologia e Gestão.
- [3] Coelho, J.P., "Sensores e Actuadores", 2003-2005 Instituto Politécnico de Bragança – Escola Superior de Tecnologia e Gestão.
- [4] Distefano, J.J. e Stubberud, A.R. e Williams, I.J. " Sistemas de Retroacção e Controle", 1972 McGraw-Hill
- [5] Dutton, K. Thompson, S e Barraclough, B. "The Art of Control Engineering" 1997 Prentice Hall. ISBN 0-201-17545-2
- [6] Franklin, G.F., Powell, J.D. e Emami-Naeini, A. "Feedback Control of Dynamic Systems", 1994 Addison-Wesley, ISBN 0-201-52747-2
- [7] Kowalczyk, Z. *Discrete approximation of continuous-time systems: a survey*. IEE Proceedings- G, Vol. 140, No. 4, p.p. 264-278, 1993.
- [8] Moscinski, J. e Ogonowski, Z., "Advanced Control with MatLab and Simulink", 1995 Ellis Horwood Limited, ISBN 0-13-309667-4
- [9] Ogata, K. "Discrete-Time Control Systems", 1995 Prentice Hall, ISBN 0-13-034281-5.
- [10] Ogata, K., "Modern Control Engineering". 1997 Prentice Hall. ISBN 0-13-043245-8
- [11] Oppenheim, A.V, Willsky, A.S. e Nawab, S.H.. "Signals and Systems". 1997 Prentice Hall. ISBN 0-13-651175-9

- [12] Oppenheim e Shaffer. "Discrete-Time Signal Processing", 1998 Prentice-Hall, ISBN 0-13-754920-2
- [13] Phillips, C.L. e Nagle, H.T. "Digital Control System Analysis and Design". 1995 Prentice Hall. ISBN 0-13-317729-7
- [14] Shahian, B. e Hassul, M. "Control System Design Using Matlab". 1993 Prentice Hall. ISBN 0-13-014557-2.
- [15] Svrcek, W. Mahoney, D. e Young, B.. "A Real-Time Approach to Process Control", 2000 John Wiley & Sons, ISBN 0-471-80363-4.

[ ◀ REFERÊNCIAS ]

- Aliasing, 67
- Amostragem, 60, 61
  - período, 125
- Anteparo
  - propriedade de, 63
- Argand
  - plano de, 10, 100, 101
- Atraso de fase, 37
- Avanço de fase, 37
- Característica
  - equação, 10
- Constante de tempo, 17
- Conversor
  - A/D, 59, 71
  - D/A, 59, 71
- Convolução
  - operação de, 167
- Década, 21
- Diagramas de Bode, 36
- Diophantine*
  - equação de, 39
- Dirac
  - delta, 62
- Emulação
  - projecto por, 143
- Erro
  - regime permanente, 14, 28
- Estabilidade
  - assimptótica, 11
  - BIBO, 11
  - marginal, 11
- Estacionário
  - erro de estado, 13
- Euler
  - backward, 117
  - forward, 115
  - relações de, 79
- Fictício
  - amostrador, 127
- Filtro
  - anti-aliasing, 70
  - pré-, 139, veja *Filtro anti-aliasing*
- Fourier
  - série de, 168
  - transformada de, 63, 169
- Frequência
  - amostragem, 66
  - cruzamento de fase, 16
  - cruzamento de ganho, 16
  - digital, 66
  - natural, 46
  - resposta em, 10
- Função de transferência, 9
  - directa, 25
  - estritamente própria, 10
  - imprópria, 10
  - malha aberta, 25
  - malha fechada, 25
  - própria, 10
- Impulso
  - função, 62
- Inversa
  - transformada em z, 97
- Jury
  - critério de, 134
- Laplace
  - transformada de, 9, 163
- Largura de banda, 15
- Lugar das raízes, 36
- Margem
  - de fase, 15
  - de ganho, 15
- McLauren
  - série de, 83
- Oitava, 21
- Operador deslocamento
  - q, 99
- Padé
  - aproximação de, 83
- Pico de ressonância, 15
- PID, 37
  - controlador, 37

- Pólo/Zero
  - mapeamento, 122
- Progressão geométrica
  - soma dos termos de, 94
- Quantização, 60
- RdC. *veja região de convergência*
- Região de convergência
  - da transformada z, 104
- Resíduos
  - cálculo dos, 88
  - pólo dominante, 21
  - transformada inversa z, 97
  - transformada modificada, 94
- Retentor
  - de ordem zero, 77
- Ringing poles, 109
- Routh
  - critério de estabilidade, 43
  - sistemas discretos, 133
- Sistema
  - atraso puro no tempo, 91
  - causal, 9
  - estável, 11
  - fase mínima, 12
  - linear, 7
  - pólos do, 9
  - primeira ordem, 17
  - segunda ordem, 18
  - sobre-amortecido, 18
  - sub-amortecido, 18
  - tipo do, 9
  - zeros do, 9
- Sobre-elevação. *veja sobre-elongação*
- Sobre-elongação, 15
- Sylvester*
  - matriz de, 40
- Taylor
  - série de, 24, 77, 114
- Tempo
  - constante de, 15
  - de atraso, 15
  - estabelecimento, 15
  - subida, 14
- Teorema
  - amostragem, 66
  - Nyquist, 66
  - Shanon, 66
- Transformada
  - em estrela, 85
  - modificada de z, 94
  - Z, 90
- Tustin, 119
- UFC, 38
- Valor final
  - teorema, 14
  - teorema (sistemas discretos), 91
  - teorema do, 165
- Ziegler e Nichols, 41
- ZOH, 77