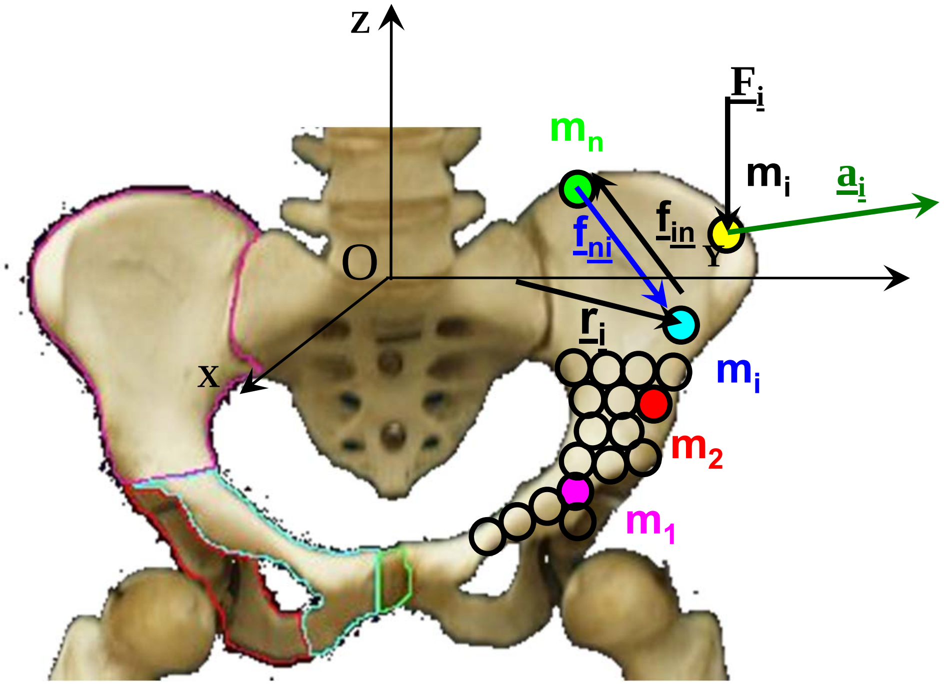
Cap. 3 - MOVIMENTO DE PARTICULAS

- Princípio:
  - Qualquer corpo ou objecto, no espaço, pode ser idealizado como um sistema de partículas, cada uma identificada com uma pequena massa elementar.



Cap. 3 - SISTEMAS DE PARTÍCULAS

- Aplicação da 2ª lei de Newton, para uma partícula genérica:
  - mi, representa a massa da partícula i;
  - ai, representa a aceleração da partícula;
  - fij, representa a acção ou força interna da partícula j sobre a partícula em estudo i;
  - Fi representa a força externa aplicada sobre partícula i (ex: força gravítica, etc.);

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \iff \vec{F}i + \sum_{j=1}^{n} \vec{f}_{ij} = m_i . \vec{a}_i$$

- Aplicação da 3ª lei de Newton, para uma partícula genérica:

$$\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$$

- Para uma partícula genérica qualquer do sistema:

$$\vec{f}_{ii} = \vec{f}_{jj} = \ldots = \vec{f}_{nn} = \vec{0}$$

Cap. 3 - SISTEMAS DE PARTÍCULAS

- Expansão para o sistema de partículas, fazendo a soma do 1º e 2º membros da equação de equilíbrio da partícula “i”,para todas as partículas “n” do sistema ou corpo:
  - ∑Fi, representa a soma de todas as forças externas aplicadas no sistema ou corpo;
  - ∑∑fij, representa a soma de todas as forças internas que actuam no sistema ou corpo;

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \vec{f}_{ij} = \sum_{i=1}^{n} m_i . \vec{a}_i$$

- Pela 3ª lei de Newton fica demostrado que as forças internas não contribuem para a aceleração do sistema partículas ou corpo.

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \vec{f}_{ij} = \vec{0}$$

- A 2ª lei de Newton pode então ser escrita, para um sistema de partículas:

$$\boxed{\sum \vec{F}i = \sum m_i . \vec{a}_i}$$

Cap. 3 - MOMENTO LINEAR

- O momento linear de um sistema de partículas.

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \left(m_i \vec{v}_i \right)$$

- Derivando em ordem ao tempo:
  - A variação do momento linear com o tempo deverá ser igual ao vector da força resultante das forças externas aplicadas no sistema de partículas.

$$\dot{\vec{L}} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \sum m \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum \vec{F}$$

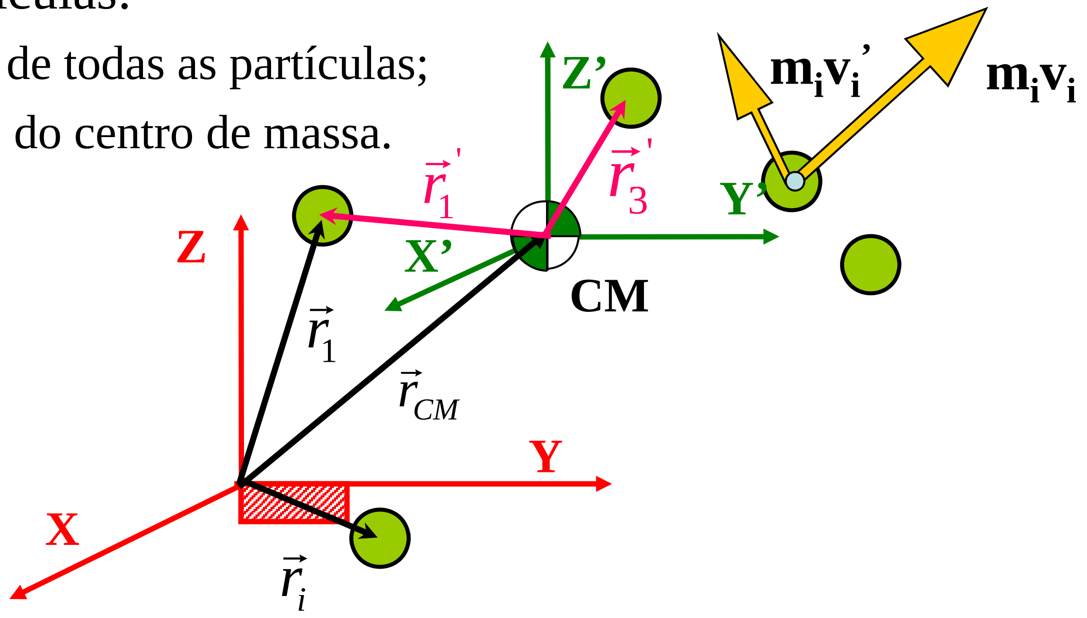
- Conservação do momento linear:
  - Sistema de partículas em repouso (capítulo 5 – estática);
  - Sistema de partículas animadas com velocidade constante.

$$\dot{\vec{L}} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0}$$

Cap. 3 - CENTRO DE MASSA DE PARTÍCULAS E MOVIMENTO

- Definição para sistemas de partículas:
  - M representa a soma da massa de todas as partículas;
  - $\mathbf{r}_{cm}$ representa o vector posição do centro de massa.

$$\boxed{M.\vec{r}_{cm} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}$$



- Observações importantes:
  - Centro de massa pode ser também conhecido pelo centro de gravidade;
  - Este ponto do espaço pode não coincidir com qualquer ponto do sistema de partículas;
- Derivação sucessiva do vector posição (centro de massa):

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i mi} \quad => \quad \vec{v}_{cm} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{\sum_i mi} \quad => \quad \vec{a}_{cm} = \frac{\sum_i m_i \vec{a}_i}{\sum_i mi}$$

[eq.1] **[eq.2]** **[eq.3]**

Cap. 3 - CENTRO DE MASSA DE PARTÍCULAS E MOVIMENTO

- Por definição da quantidade de movimento linear:
  - utilizando o resultado da derivação da equação do vector posição.

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \left(m_i \vec{v}_i \right) = \left(\sum_i m_i \right) \vec{v}_{cm}$$

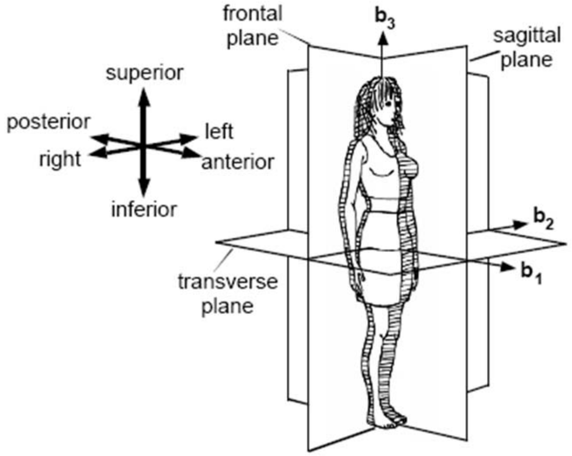
- Por aplicação da 2ª lei de Newton:
  - utilizando o resultado da derivação da equação do vector velocidade.

$$\sum_i \vec{F}i = \sum_i m_i . \vec{a}_i = \left(\sum_i m_i \right) \vec{a}_{cm}$$

- Conclusão:
  - A resultantes do sistema de forças aplicado no sistema de partículas é igual ao produto da massa total do sistema pelo vector aceleração do centro de massa respectivo.

Cap. 3 - PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS DO CORPO HUMANO

- Sistema de coordenadas (b1,b2 e b3) para posicionamento do CM:
  - Obtidos por intersecção de 3 planos principais de inércia;
  - A posição da origem deve ser função de L1,L2 e L3.



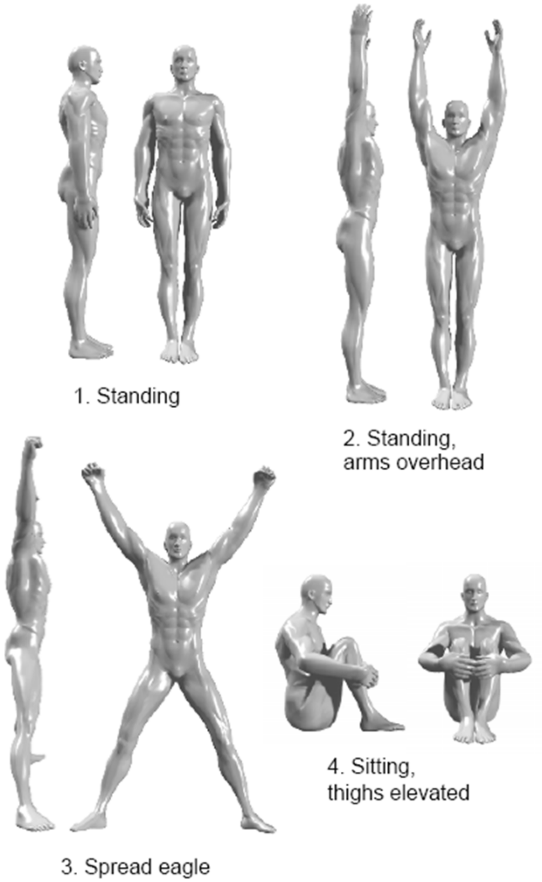
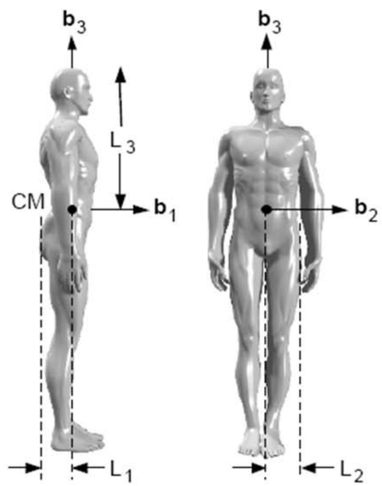


TABLE A.2.1. Mass moments of inertia and centers of gravity of y samples from data presented by Santschi et al. (1963)

Position	L_1	L_2	L_3	I_1	I_2	I_3
Subject 1: Age, 29; height, 72.2 in.; weight 173.5 lb						
1	3.62	5.31	32.2	132	119	13.1
2	3.52	5.31	29.9	174	159	12.5
3	3.34	5.31	29.5	172	135	41.9
4	7.70	5.31	23.9	41.4	37.3	29.9
Subject 2: Age, 23; height, 67.4 in.; weight, 147.3 lb						
1	3.50	4.25	29.8	95.6	81.9	10.3
2	3.49	4.25	27.5	126	110	10.2
3	3.18	4.25	27.2	125	90.3	30.0
4	7.03	4.25	21.7	32.9	30.4	21.5
Subject 3: Age, 33; height, 73.3 in.; weight, 203 lb						
1	3.81	5.61	31.8	144	129	14.2
2	3.67	5.61	29.4	188	172	13.8
3	3.56	5.61	29.5	187	142	51.2
4	7.75	5.61	23.4	48.9	41.9	36.7

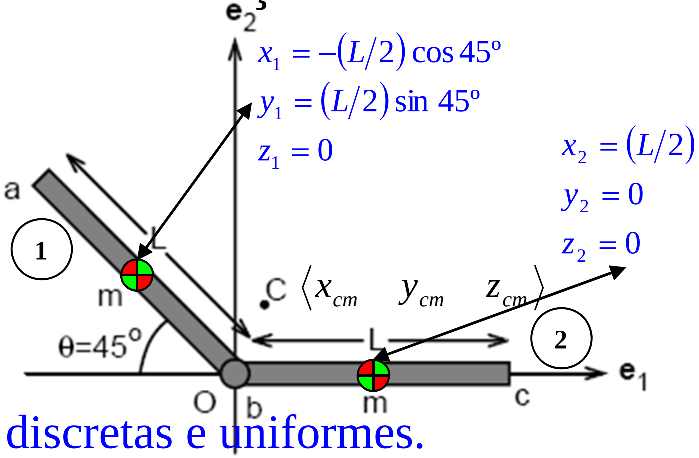
Note: All lengths (L_1, L_2, L_3) are inches (in.; multiply by 2.54 to convert to centimeters, cm) and moment of inertia (I_1, I_2, I_3) in lb-in.-s^2 (multiply by 0.11298 to convert to kg-m^2).



Mais informação: http://msis.jsc.nasa.gov/sections/section03.htm

Cap. 3 - EXERCÍCIO 3.1

- Admitindo que um corpo pode ser representado por duas barras inclinadas, ab e cd, ambas com comprimento L e massa m, ligadas através de uma articulação tipo pino, determine o centro de massa em relação ao sistema de eixos representado.



- Por definição de centro de massa:
  - Assumindo corpos constituídos por duas partes discretas e uniformes.
  - A equação vectorial pode ser dividida em 3 equações algébricas.

$$\vec{r}_{cm} = \begin{Bmatrix} x_{cm} \\ y_{cm} \\ z_{cm} \end{Bmatrix} = \frac{\sum_{i=1}^{2} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{2} m_i}$$

$$x_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{2} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{2} m_i} = \frac{m(-L/2\cos 45^\circ) + m(L/2)}{2m} = 0.427\ L$$

$$y_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{2} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{2} m_i} = \frac{m(L/2\sin 45^\circ) + m \times 0}{2m} = 0.177\ L$$

$$z_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{2} m_i z_i}{\sum_{i=1}^{2} m_i} = 0$$

Cap. 3 - EXERCÍCIO 3.2

- O processo de levantamento de braços condiciona a posição do centro de massa. Para um atleta com uma força peso de 725 [N] e uma altura de 1.75 [m], a posição do centro de massa é definida a 0.96 [m] do solo. Determine a alteração do centro de massa do corpo, depois do atleta rodar os seus braços 180 º, em torno da sua cabeça, sabendo que cada braço pesa 31 [N] (posição 2). A posição do centro de massa de cada braço altera 0.63 [m], na posição 2.

- Por definição de centro de massa:
  - Assumindo corpos simétricos em relação ao eixo y.
  - A equação algébrica "y" é suficiente para posicionar CM.
- Posição 1:

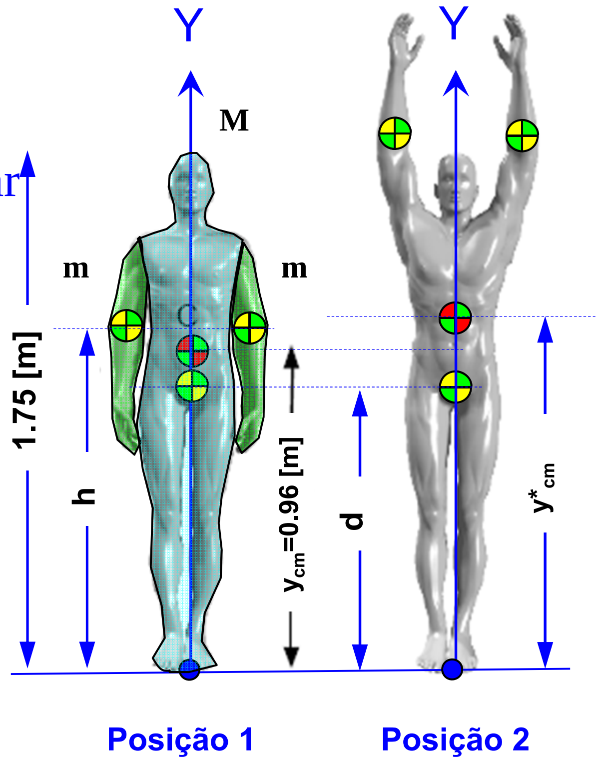
$$y_{cm} = 0.96 = \frac{\sum_{i=1}^{2} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{2} m_i} = \frac{M(d) + 2m \times h}{M + 2m} \quad \textbf{(eq.1)}$$

- Posição 2:

$$y^*_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{2} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{2} m_i} = \frac{M(d) + 2m \times (h + 0.63)}{M + 2m} \quad \textbf{(eq.2)}$$

- Combinando eq.1 com a eq.2, obtém-se:

$$y^*_{cm} = 1.014\,[m]$$



Cap. 3 - EXERCÍCIO 3.3

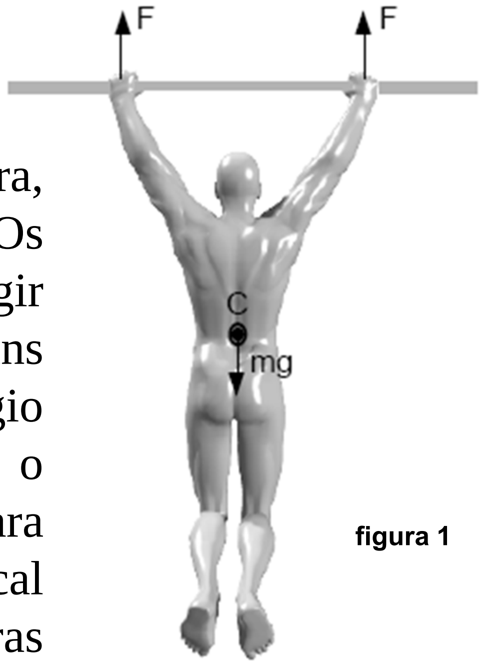
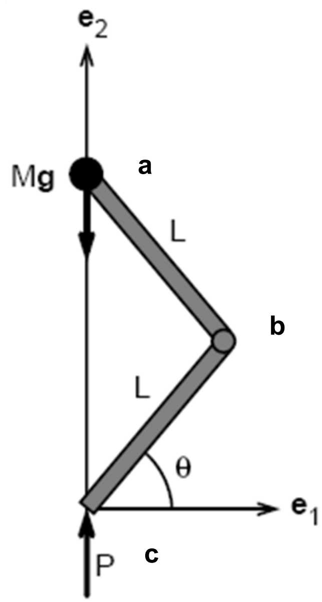


figura 1

- Os humanos saltam para atingir posições mais elevadas em altura, para ultrapassar obstáculos ou ainda por motivos de competição. Os jogadores de basquetebol e de voleibol são forçados a reagir instantaneamente (fracções de segundo) em relação ao jogo. Alguns processos de registo de video demomstram que a duração do estágio propulsivo demora cerca de 0.3 [s]. Neste período de tempo, o ângulo entre os vários segmentos dos membros inferiores altera para levantar os membros superiores. O mecanismo do salto vertical pode ser capturado, com precisão, utilizando o modelo de 4 barras ou segmentos (figura 2).

- A análise pode ser simplificada, utilizando o modelo de 2 barras sem massa, com massa dos membros e corpo superior concentrada na extremidade de uma delas. As barras ab e bc devem ser ligadas através de um sistema músculo tendão que permite a alteração do ângulo relativo. Na ausência de tal mecanismo, as duas barras colapsavam no solo.
- O objectivo deste exercício será determinar as condições do salto para o modelo de dois segmentos ou de duas barras.



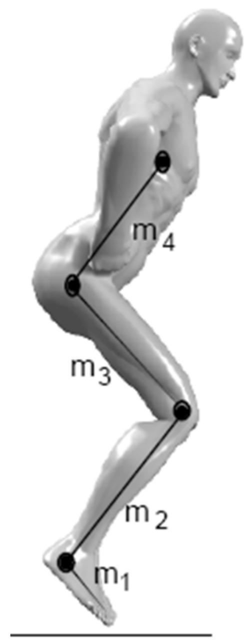
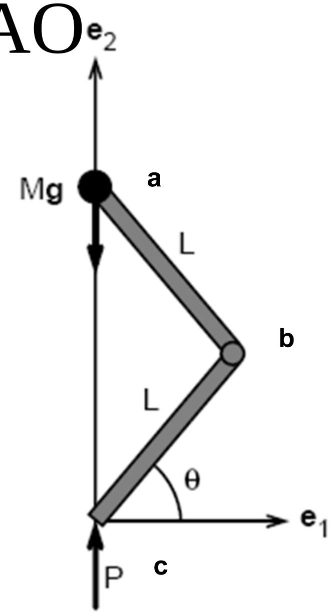


figura 2

Cap. 3 - EXERCÍCIO 3.3 - RESOLUÇÃO



- Vector posição do centro de massa:

$$\vec{r} = 2L \sin\theta \, \vec{e}_2$$

- Derivando duas vezes o vector posição:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 2L\dot{\theta}\cos\theta \, \vec{e}_2$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left[-2L\dot{\theta}^2 \sin\theta + 2L\ddot{\theta}\cos\theta\right]\vec{e}_2$$

- Aplicar a equação de equilíbrio dinâmico (movimento do centro de massa):

$$\sum_i \vec{F}i = \left(\sum_i m_i\right)\vec{a}_{cm}$$

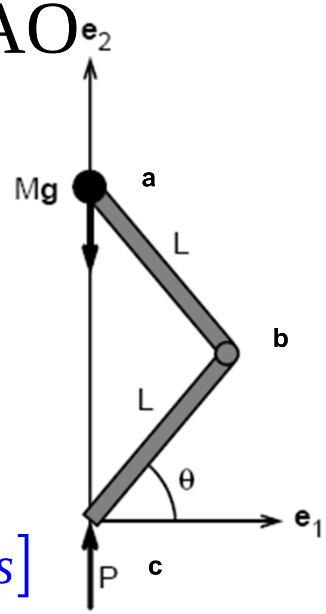
$$\sum F_{e2} = M \; a_{cm,e2} \quad \Leftrightarrow \quad P - Mg = M\left[-2L\dot{\theta}^2 \sin\theta + 2L\ddot{\theta}\cos\theta\right]$$

$$P = M\left[g - 2L\dot{\theta}^2 \sin\theta + 2L\ddot{\theta}\cos\theta\right]$$

- No instante do salto, a reacção do solo vale zero, pelo que a equação diferencial do movimento.

$$g = 2L\dot{\theta}^2 \sin\theta + 2L\ddot{\theta}\cos\theta$$

Cap. 3 - EXERCÍCIO 3.3 - RESOLUÇÃO



- Concretizando para um instante de tempo (imagem fotográfica), t=0, considerando possível:
  - ângulo de posição = 60º;
  - comprimento cada membro, L=0.5
  - aceleração angular = 0 rad/s^2.

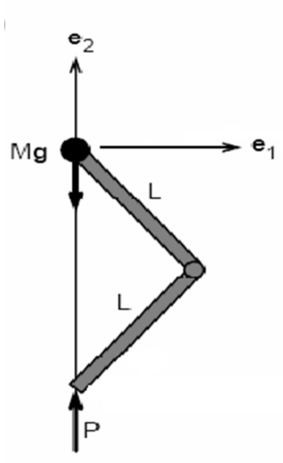
$$g = 2L\dot{\theta}^2 \sin\theta + 2L\ddot{\theta}\cos\theta \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\theta} = 3.25\,[rad/s] \Leftrightarrow \dot{\theta} \approx 180\,[^{o}/s]$$

- Considerações:
  - Para que a reacção do solo tenda para zero, será necessário que o ângulo entre a tíbia e o fémur aumente a uma taxa superior a 180 [º/s];
  - Caso as pernas se endireitem a uma velocidade inferior, o salto não deverá ocorrer, uma vez que a reacção continuará a exercer um valor finito;
  - A velocidade vertical da posição do centro de massa aumenta com o aumento do comprimento das barras.

Cap. 3 - EXERCÍCIO 3.3 - RESOLUÇÃO

- Qual a distância percorrida na vertical, quando o modelo de 2 barras salta no ar?
  - A força da gravidade é a única força exterior a ser exercída;
  - O movimento do centro de massa segue as equações de corpos em queda livre;
  - Será necessário determinar a velocidade inicial do centro de massa:
    - Para L=0.5 [m], θ=60 [º], dθ/dt=3.25 [rad/s];

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 2L\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{e}_2 = 1.625\,[m/s]$$



  - Equações que regem o movimento do corpo;

$$\vec{a} = -g\,[m/s^2]\,\vec{e}_2$$
$$\vec{v} = (1.625 - gt)\,\vec{e}_2$$
$$\vec{r} = (1.625t - 1/2\,gt^2)\,\vec{e}_2$$

  - O centro de massa atinge o ponto mais alto para a condição de velocidade nula (inversão do sentido de movimento).

$$\vec{v} = (1.625 - gt)\,\vec{e}_2 = \vec{0} \Leftrightarrow t = 1.625/g$$
$$\vec{r} = \left(1.625^2/g - 1/2\,g(1.625/g)^2\right)\vec{e}_2 = 0.13\,\vec{e}_2\,[m]$$

  - A distância vertical percorrida por um corpo, num movimento de salto é dada por:

$$h = v_0^2/2g$$

Cap. 3 - EQUILÍBRIO DE CORPOS – EQUAÇÕES VECTORIAIS

- A definição do movimento do centro de massa é necessária mas não é suficiente para definir o movimento do corpo ou do sistema de partículas.
- A equação que se segue não dá qualquer informação em relação ao movimento de rotação do corpo ou em relação ao movimento relativo de partículas num sistema de partículas.

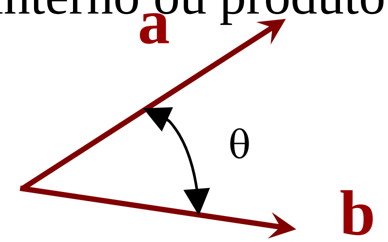
$$\sum_i \vec{F}i = \left(\sum_i m_i \right) \vec{a}_{cm}$$

- Qual será a lei de Newton para o equilíbrio de rotação de corpos?
  - Por intuição, quanto mais afastada se aplicar uma força em relação a um ponto ou eixo de rotação, maior será a capacidade de induzir a rotação.

$$\sum_i \vec{r}i_{cm} \times \vec{F}i = \frac{d\vec{H}_{cm}}{dt}$$

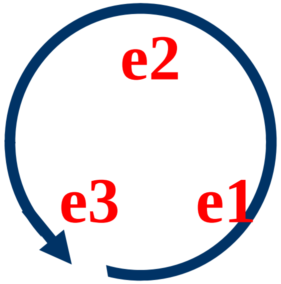
Cap. 3 - ÁLGEBRA VECTORIAL

- Produto interno ou produto escalar (função escalar de campo vectorial):



$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\| \cos(\theta)$$

- Características do produto interno ou produto escalar:
  - Pode assumir qualquer valor algébrico;
  - O produto de dois vectores perpendiculares entre si vale zero;
  - O resultado do produto entre os versores das direcções 1, 2 e 3, vale;



$$\vec{e}_1 \bullet \vec{e}_2 = \vec{e}_1 \bullet \vec{e}_3 = \vec{e}_2 \bullet \vec{e}_3 = \vec{e}_2 \bullet \vec{e}_1 = \vec{e}_3 \bullet \vec{e}_1 = \vec{e}_3 \bullet \vec{e}_2 = 0$$

$$\vec{e}_1 \bullet \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \bullet \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \bullet \vec{e}_3 = 1$$

  - Propriedade comutativa.
- Outras formas de operar:

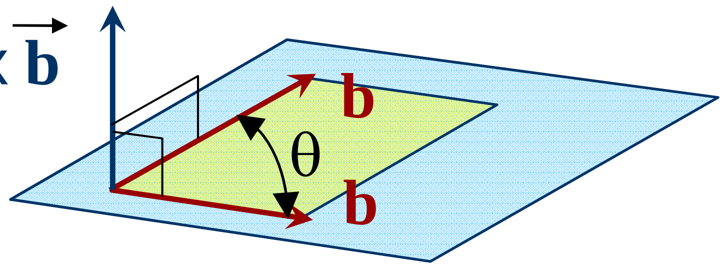
$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$$
$$\vec{b} = b_1\vec{b}_1 + b_2\vec{b}_2 + b_3\vec{b}_3$$

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \vec{b} \bullet \vec{a}$$

Cap. 3 - ÁLGEBRA VECTORIAL

- Produto externo ou produto vectorial (função vectorial de campo vectorial):

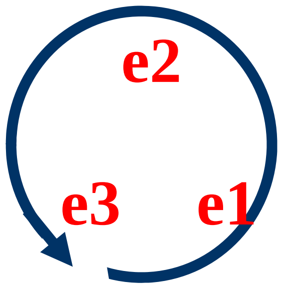
$\overrightarrow{\mathbf{axb}} = \overrightarrow{\mathbf{a}} \times \overrightarrow{\mathbf{b}}$



$$\vec{a} \otimes \vec{b} = \|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\| \sin(\theta) \, \vec{e}$$

A amplitude do vector resultante é igual ao valor da área do paralelogramo definido por “a” e “b”.

- Características do produto externo ou produto vectorial:
  - As componentes do vector resultado podem assumir qualquer valor algébrico;
  - O produto de dois vectores paralelos entre si vale um vector nulo;
  - O resultado do produto entre os versores das direcções 1, 2 e 3, vale;



$$\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \otimes \vec{e}_3 = 0$$

$$\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2 = \vec{e}_3 = -\vec{e}_2 \otimes \vec{e}_1$$

$$\vec{e}_2 \otimes \vec{e}_3 = \vec{e}_1 = -\vec{e}_3 \otimes \vec{e}_2$$

$$\vec{e}_3 \otimes \vec{e}_1 = \vec{e}_2 = -\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_3$$

  - Não goza da propriedade comutativa.

- Outras formas de operar:

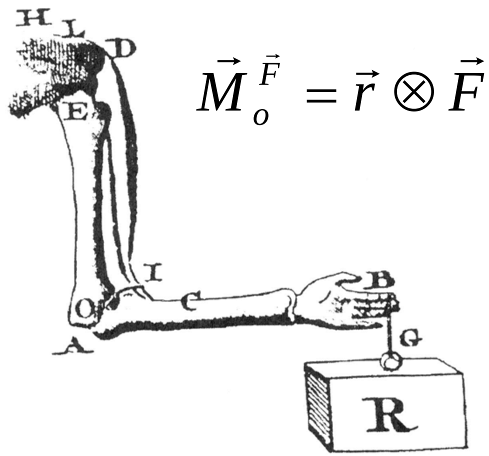
$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$$

$$\vec{b} = b_1\vec{b}_1 + b_2\vec{b}_2 + b_3\vec{b}_3$$

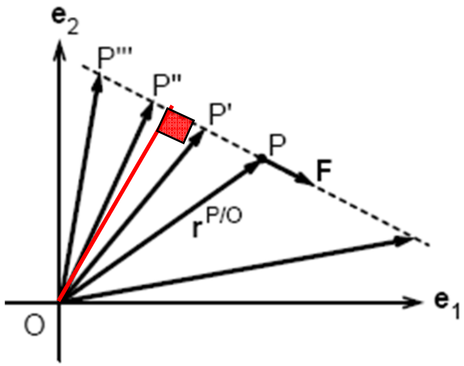
$$\vec{a} \otimes \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\vec{e}_1 - (a_1 b_3 - a_3 b_1)\vec{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\vec{e}_3 = -\vec{b} \otimes \vec{a}$$

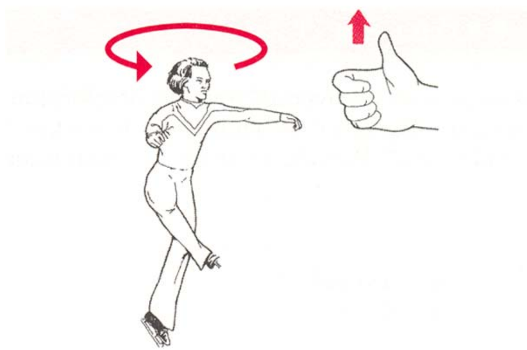
Cap. 3 - MOMENTO DE UMA FORÇA

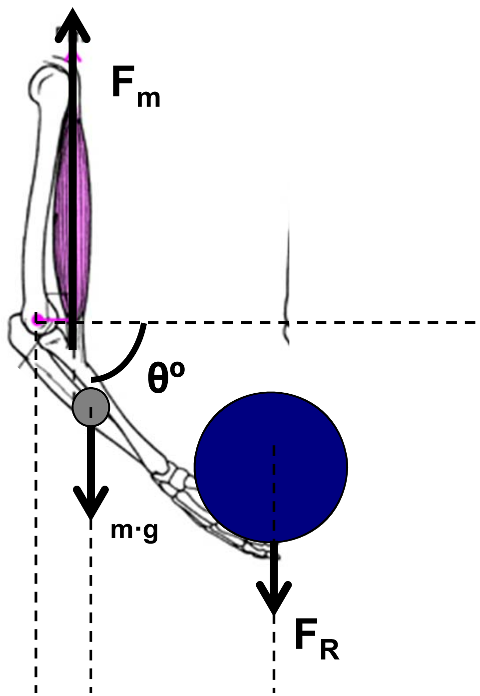
- Momento de uma força em relação a um ponto:
  - O vector de posição r deverá ter origem no ponto em que se pretende calcular o momento (O) e destino em qualquer ponto da linha de acção da força.
  - A amplitude é igual ao valor da força multiplicado pelo braço da mesma.



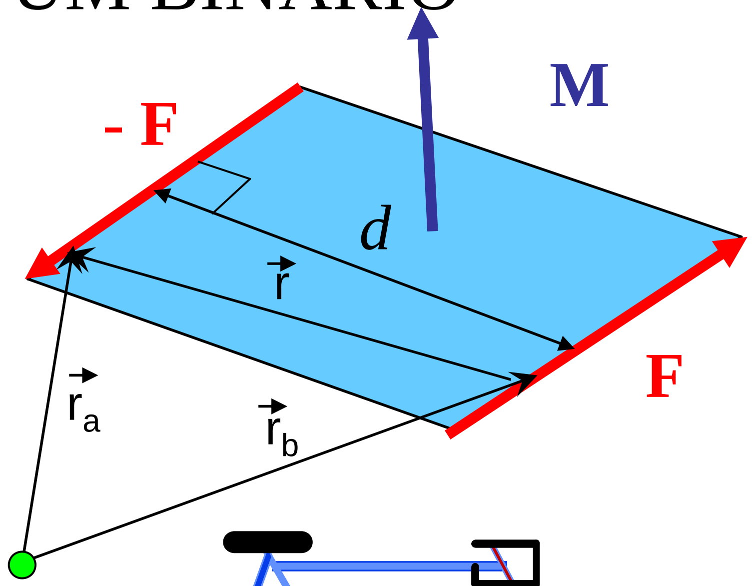
$$\vec{M}_o^{\vec{F}} = \vec{r} \otimes \vec{F}$$







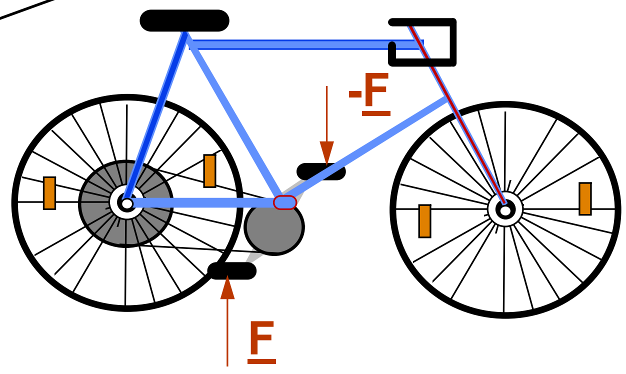
Cap. 3 - MOMENTO DE UM BINÁRIO

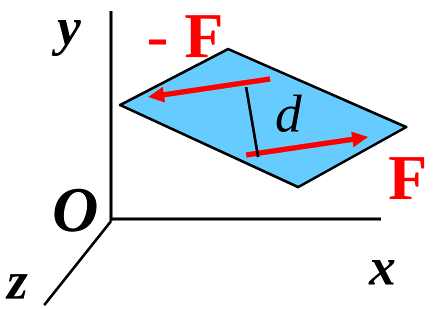


- Duas forças com sentido oposto, igual amplitude, dispostas paralelamente, formam um binário, cujo amplitude do momento é igual a “Fd”.
  - Esta quantidade é independente do local onde o momento é calculado.
- Característica:

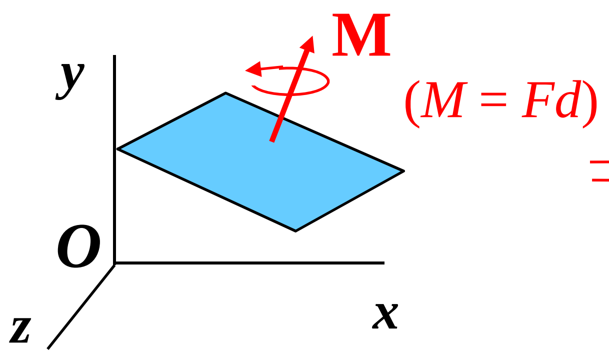
$$\sum_{i=1}^{2}\vec{F}_i=\vec{0} \;\text{ e }\; \sum_{i=1}^{2}\vec{M}_P^{\vec{F}_i}\neq\vec{0}$$

$$\begin{aligned}\vec{M}_O^{\vec{F}+(-\vec{F})} &= \vec{r}a\times\vec{F}+\vec{r}b\times(-\vec{F})\\ &=(\vec{r}a-\vec{r}b)\times\vec{F}\\ &=\vec{r}\times\vec{F}\end{aligned}$$

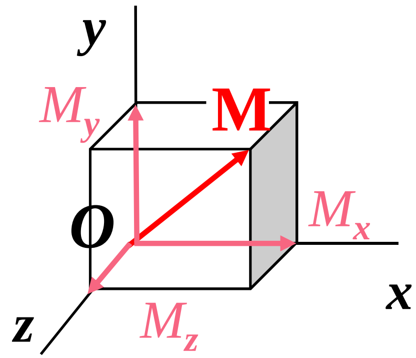




$=$

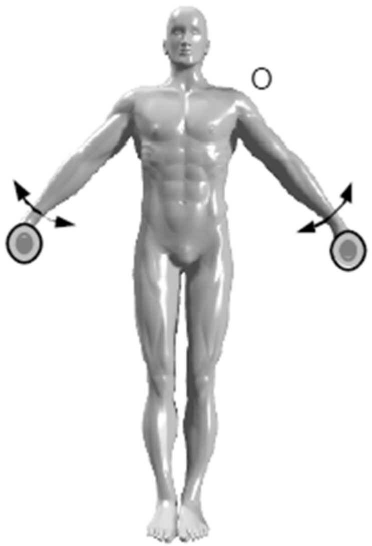


$=$



Cap. 3 - EXERCÍCIO 3.5

- Determinar o momento gerado pelo sistema de pesos, com massa de 10 [kg], em relação ao ponto "O", nas condições angulares de θ=0º, θ=45º e θ=90º. O sistema é utilizado pelo atleta para exercitar os músculos. O comprimento do braço estendido é igual a 66 [cm].

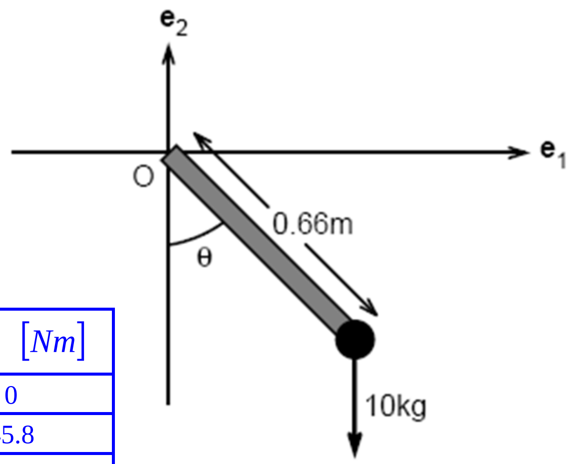


$$\vec{r} = \begin{Bmatrix} L\sin(\theta) \\ -L\cos(\theta) \\ 0 \end{Bmatrix} = L\sin(\theta)\,\vec{e}_1 - L\cos(\theta)\vec{e}_2$$

$$\vec{F} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -10g \\ 0 \end{Bmatrix} = -10g\;\vec{e}_2$$

$$\vec{M}_O^{\vec{F}} = \vec{r} \otimes \vec{F} = \begin{Bmatrix} L\sin(\theta) \\ -L\cos(\theta) \\ 0 \end{Bmatrix} \otimes \begin{Bmatrix} 0 \\ -10g \\ 0 \end{Bmatrix}$$

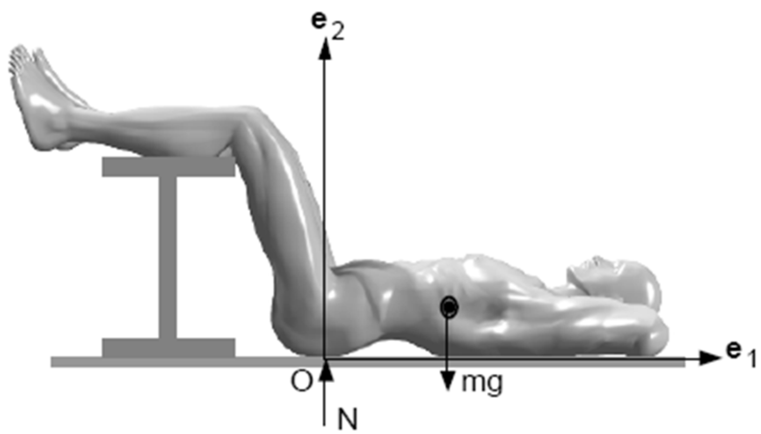
$$\vec{M}_O^{\vec{F}} = \vec{r} \otimes \vec{F} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ L\sin(\theta)(-10g) - (-L\cos(\theta)(0)) \end{Bmatrix} = -10gL\sin(\theta)\,\vec{e}_3$$



θ	$\left\|\vec{M}_O^{\vec{F}}\right\|$ $[Nm]$
0	0
45	45.8
90	64.7

Cap. 3 - EXERCÍCIO 3.6

- Para o atleta representado na figura, determine o valor do momento criado pela parte superior do corpo, na zona pélvica, para o momento em que o processo abdominal faz levantar a parte superior do corpo. A distância entre a zona pélvica e o centro de massa da parte superior do corpo é de 340 [mm] e a massa desta parte vale 25 [kg].

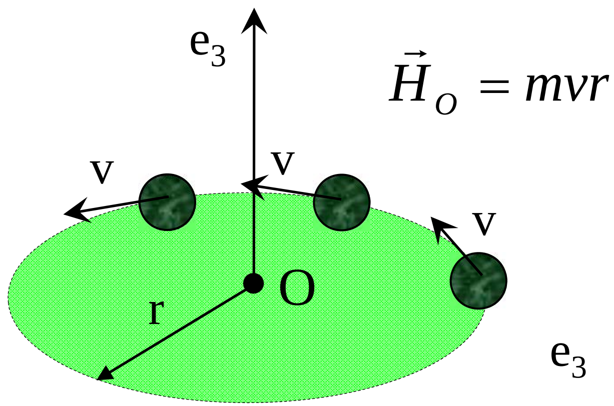


Cap. 3 - MOMENTO ANGULAR DE UMA PARTÍCULA

- Vector momento da quantidade de momento linear ($\vec{L}=m\vec{v}$):
  - Escrito num referencial newtoniano (fixo).

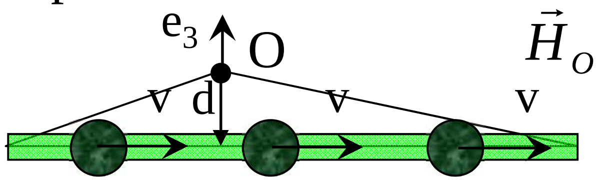
$$\vec{H}_O = \vec{OP} \otimes m_i \vec{v}_i$$

- Caso especial: movimento circular uniforme.
  - Momento angular constante.

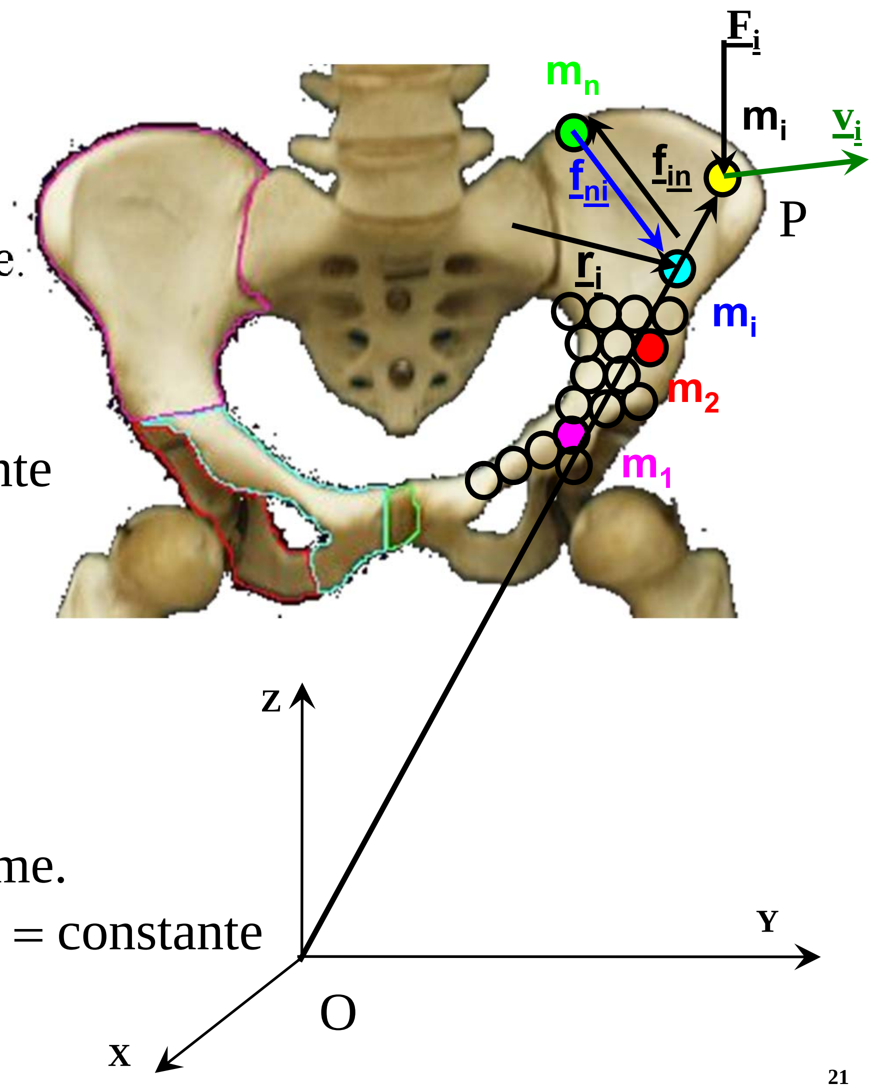


$$\vec{H}_O = mvr\,\vec{e}_3 = \text{constante}$$

- Caso especial: movimento rectilineo uniforme.



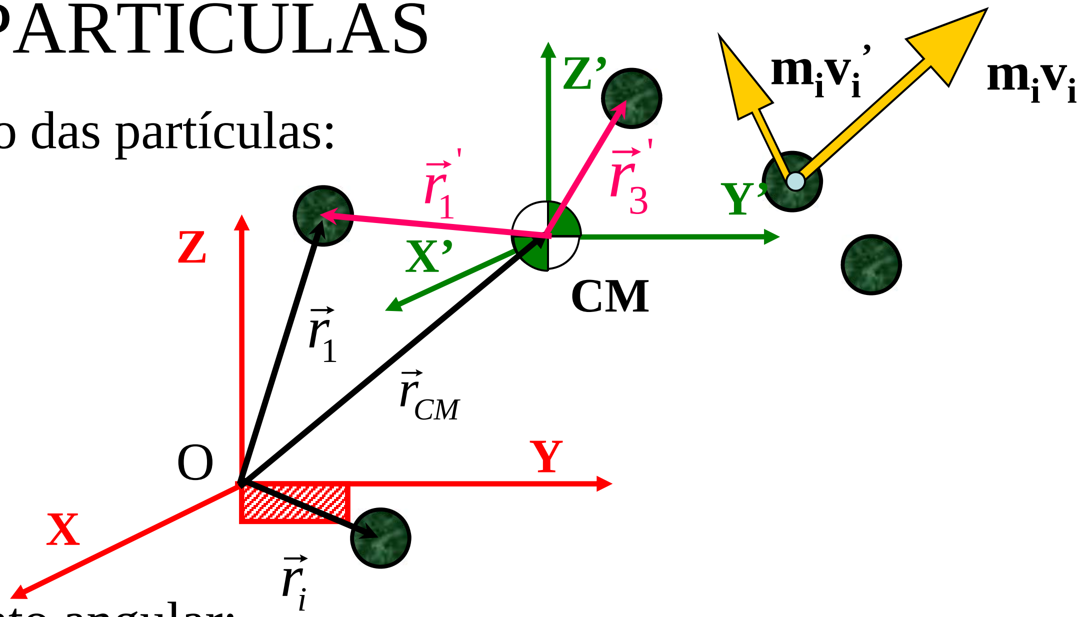
$$\vec{H}_O = mvd\,\vec{e}_3 = \text{constante}$$



Cap. 3 - MOMENTO ANGULAR DE UM SISTEMA DE PARTÍCULAS

- Momento angular do conjunto das partículas:

$$\vec{H}_0 = \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \right)$$



- Derivada temporal do momento angular:

$$\dot{\vec{H}}_0 = \frac{d\vec{H}_O}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{d\vec{r}_i}{dt} \times m_i \vec{v}_i \right) + \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{r}_i \times m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \right)$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \left(\vec{v}_i \times m_i \vec{v}_i \right)}_{=0} + \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{r}_i \times m_i \vec{a}_i \right)$$

- Utilizando a 2ª lei de Newton, Fi representa a força externa aplicada na partícula i:

$$\dot{\vec{H}}_O = \frac{d\vec{H}_O}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{r}_i \times \vec{F}_i \right)$$

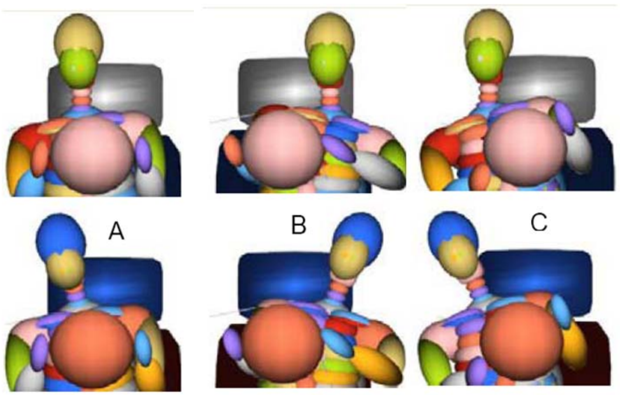
Cap. 3 - EQUILÍBRIO DE UM SISTEMA DE PARTÍCULAS

- Para um sistema de partículas (corpo), as leis do movimento expressam:
  - M_O, momento gerado pelas forças externas no ponto O;
  - H_O momento angular permanece constante, até que seja aplicado um momento;

$$\dot{\vec{L}} = \left(\sum m_i\right) a_{cm} = \sum \vec{F}$$

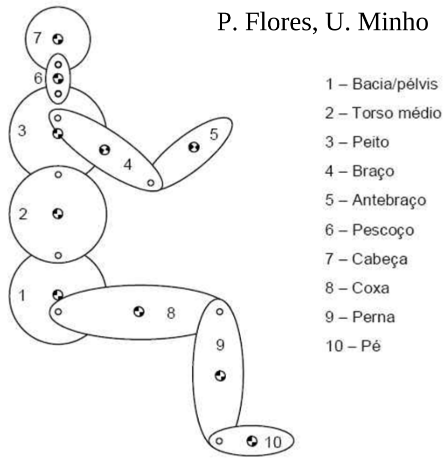
$$\dot{\vec{H}}_o = \sum \vec{M}_o$$

- A simulação do movimento será baseada no método dos corpos com massa concentrada (método utilizado em testes de impacto de veículos, método utilizado em mecânica estrutural para a análise do efeito sísmico).



ATD – Anthropomorphic Test Devives, Miguel Silva, IST

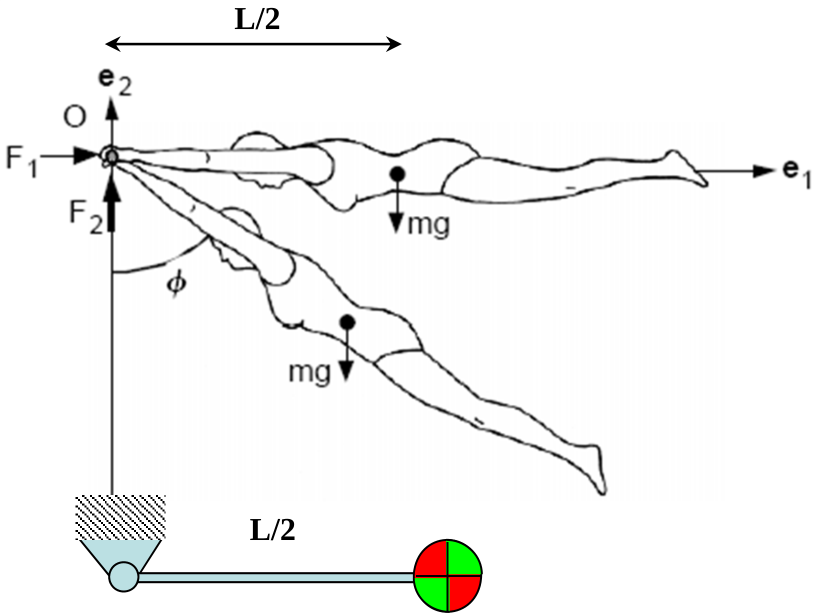
http://www.dentonatd.com/dentonatd/anthropomorphic.html



P. Flores, U. Minho

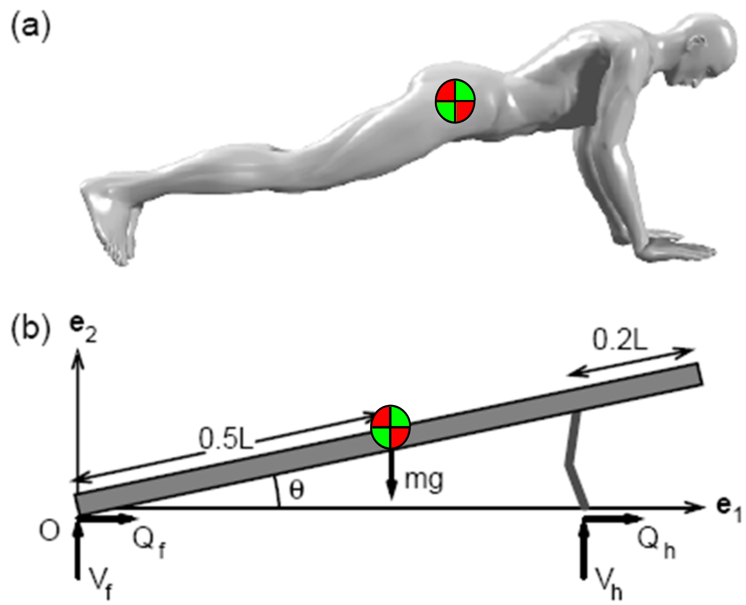
Cap. 3 - EXERCÍCIO 3.7

- Uma ginasta encontra-se na posição de horizontal, segura pelas suas mãos, roda no sentido dos ponteiros do relógio pela acção da gravidade, mantendo o corpo esticado. Determine as equações do movimento da ginasta.



Cap. 3 - EXERCÍCIO 3.9

- Determine as forças de reacção verticais exercidas pelos pés e pelas mãos durante o movimento de flexão. Considere que as condições cinemáticas do movimento da partícula são conhecidas, isto é: são conhecidos os valores de $\theta(t), \quad \dot{\theta}(t), \quad \ddot{\theta}(t)$



Cap. 3 - MOMENTO ANGULAR NO CENTRO DE MASSA

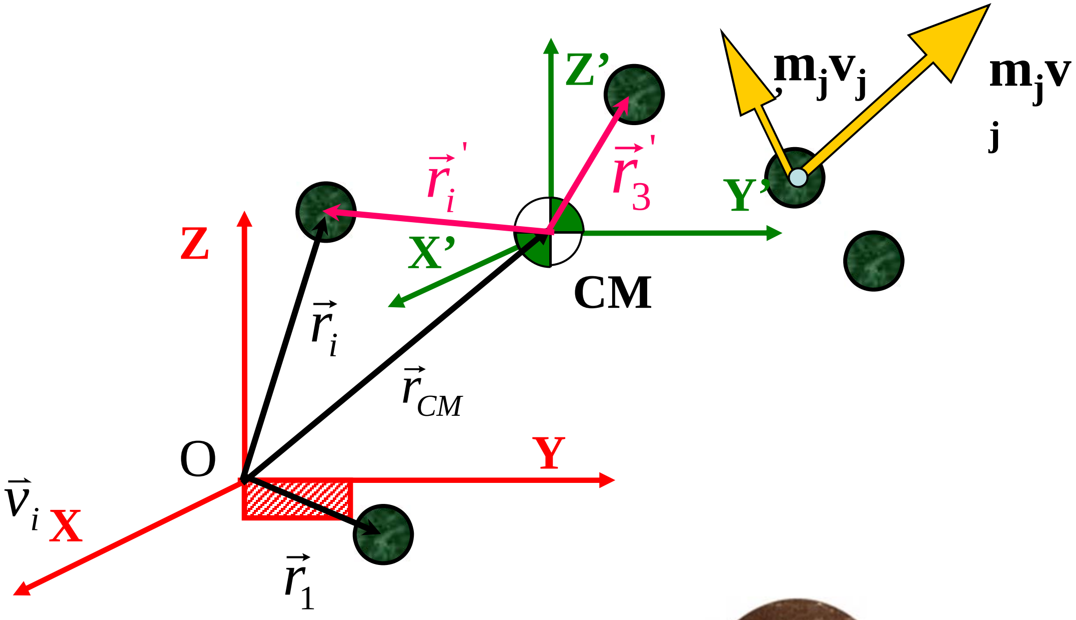
- Em certos casos, estudo da locomoção ou do movimento no ar, é útil determinar momento angular no centro de massa.

$$\vec{H}_O = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$

Utilizando a regra do paralelogramo:

$$\vec{H}_O = \sum_i \left(\vec{r}_{cm} + \vec{r}_i'\right) \times m_i \vec{v}_i$$

$$\vec{H}_O = \sum_i \left(\vec{r}_{cm}\right) \times m_i \vec{v}_i + \sum_i \left(\vec{r}_i'\right) \times m_i \vec{v}_i$$



A posição do centro de massa pode ser colocada em evidência:

$$\vec{H}_O = \vec{r}_{cm} \times \vec{L} + \sum_i \left(\vec{r}_i'\right) \times m_i \vec{v}_i$$

$$\vec{H}_O = \vec{r}_{cm} \times \vec{L} + \vec{H}_{cm} \qquad \text{(1º teorema de Koenig)}$$

Samuel Koenig, German physicist , (1712-1757)

Cap. 3 - MOMENTO ANGULAR NO CENTRO DE MASSA

$$\vec{H}_O = \vec{r}_{cm} \times \vec{L} + \vec{H}_{cm}$$

- Derivada em relação ao tempo.

$$\frac{d\vec{H}_O}{dt} = \frac{d\vec{r}_{cm}}{dt} \times \vec{L} + \vec{r}_{cm} \times \frac{d\vec{L}}{dt} + \frac{d\vec{H}_{cm}}{dt}$$

- Aplicando a 2ª lei de Newton:

$$\frac{d\vec{H}_O}{dt} = \underbrace{\vec{v}_{cm} \times \vec{L}}_{=0} + \vec{r}_{cm} \times \sum \vec{F}_i + \frac{d\vec{H}_{cm}}{dt} \qquad [1]$$

- Caso “O” seja ponto fixo (origem do sistema eixo, ver *slide* anterior):

$$\frac{d\vec{H}_O}{dt} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_i \vec{M}_O \qquad [2]$$

- Comparando as duas equações [1] e [2]:

$$\frac{d\vec{H}_{cm}}{dt} = \sum \vec{r}\,'_{cm} \times \vec{F}_i = \sum \dot{\vec{H}}_{cm}$$

Cap. 3 - EXERCÍCIO 3.8

- Determinação do momento angular dos braços em relação ao centro de gravidade do corpo (origem do sistema de eixos), no movimento de balanço alternado, com frequência constante, admitindo que o modelo se encontra parado. O modelo possui braços com massa “m”, comprimento “L”e distância entre ombros “2d”.
- Assumindo modelo de massa concentrada no sistema de partículas

$$\vec{H}_O = \sum_{i=1}^{2} \vec{r}_i \otimes m\vec{v}_i = dL\dot{\theta}\cos(\theta) m\,\vec{e}_2$$

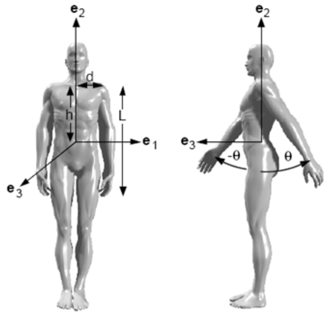
$$\vec{r}_1 = h\,\vec{e}_2 + d\,\vec{e}_1 - L/2\sin(\theta)\,\vec{e}_3 - L/2\cos(\theta)\,\vec{e}_2 = \begin{Bmatrix} d \\ h - L/2\cos(\theta) \\ -L/2\sin(\theta) \end{Bmatrix}$$

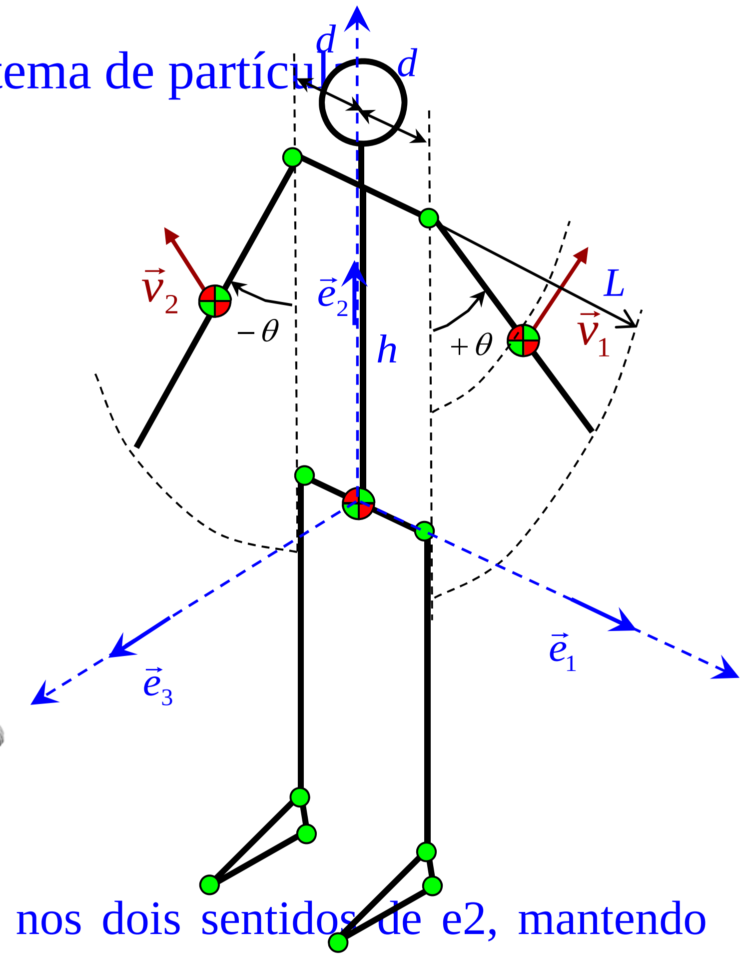
$$\vec{r}_2 = h\,\vec{e}_2 - d\,\vec{e}_1 + L/2\sin(\theta)\,\vec{e}_3 - L/2\cos(\theta)\,\vec{e}_2 = \begin{Bmatrix} -d \\ h - L/2\cos(\theta) \\ +L/2\sin(\theta) \end{Bmatrix}$$

- Determinação da velocidade no centro de massa de cada braço.

$$\vec{v}_1 = \frac{d\vec{r}_1}{dt} = \begin{Bmatrix} 0 \\ +L/2\,\dot{\theta}\sin(\theta) \\ -L/2\,\dot{\theta}\cos(\theta) \end{Bmatrix}$$

$$\vec{v}_2 = \frac{d\vec{r}_2}{dt} = \begin{Bmatrix} 0 \\ L/2\,\dot{\theta}\sin(\theta) \\ L/2\,\dot{\theta}\cos(\theta) \end{Bmatrix}$$





Conclusão: para compensar este momento, o dorso roda nos dois sentidos de e2, mantendo HO=0, em qualquer instante.