

# Cap. 4 – CORPOS EM MOVIMENTO PLANO

- Momento angular de corpos rígidos com distribuição de massa pela geometria.

$$\vec{H}_O = \int_M \vec{r} \times (\vec{v}) dm$$

$\vec{r}$  = vector posição, desde ponto O até centro de massa do elemento infinitesimal “dm”.

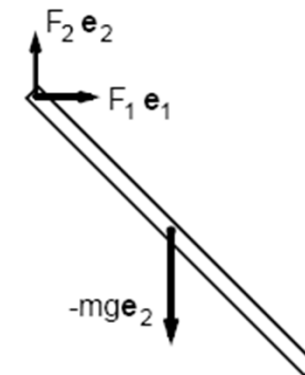
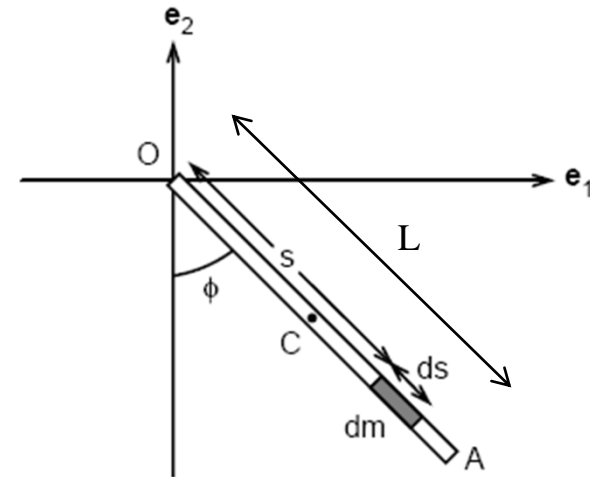
$\vec{v}$  = vector velocidade do centro de massa do elemento infinitesimal “dm”.

- Da geometria do movimento do corpo, determina-se a posição e velocidade de um ponto genérico:

$$\vec{r} = s[\sin(\phi)] \vec{e}_1 - s[\cos(\phi)] \vec{e}_2$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = s[\dot{\phi} \cos(\phi)] \vec{e}_1 + s[\dot{\phi} \sin(\phi)] \vec{e}_2$$

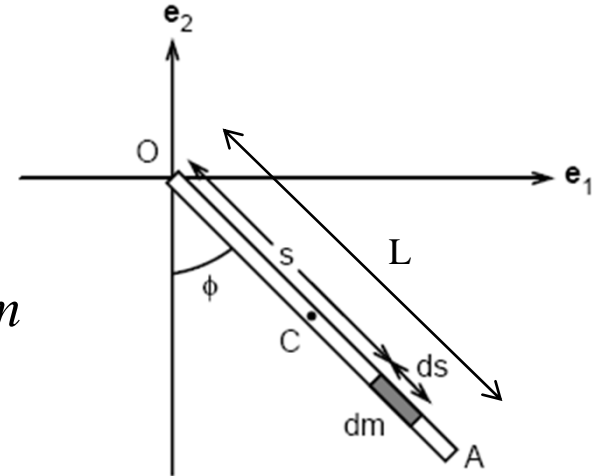
- O corpo rodará no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio com velocidade angular positiva e no sentido contrário com valor negativo.  $\vec{\omega} = \dot{\phi} \vec{e}_3 = \frac{d\phi}{dt} \vec{e}_3$  [rad / s]



# Cap. 4 – CORPOS EM MOVIMENTO PLANO

- Substituindo vector posição e vector velocidade:

$$\begin{aligned} \vec{H}_O &= \int_M \vec{r} \times (\vec{v}) dm \\ &= \int_M \begin{Bmatrix} +s \sin(\phi) \\ -s \cos(\phi) \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} s \dot{\phi} \cos(\phi) \\ s \dot{\phi} \sin(\phi) \\ 0 \end{Bmatrix} dm = \dot{\phi} \int_M \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ s^2 \end{Bmatrix} dm \end{aligned}$$



- Admitindo que a distribuição da massa é uniforme:  $\rho = M/V = M/(AL) \Leftrightarrow dm = \rho A dL$

$$\vec{H}_O = \dot{\phi} \int_L \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ s^2 \end{Bmatrix} \rho A dL = \dot{\phi} A \rho \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \int_0^L s^2 ds \end{Bmatrix} = \dot{\phi} A \rho \frac{L^3}{3} \vec{e}_3 = \dot{\phi} \frac{1}{3} ML^2 \vec{e}_3$$

- Observações:

- Considerando, capítulo anterior, “lumped mass model” (massa concentrada no CG, cap. 3, exercício 3.7), resulta em subestimar o valor do momento angular ( $w1/4 ML^2$ ), em relação ao modelo de massa distribuída ( $w1/3 ML^2$ ).

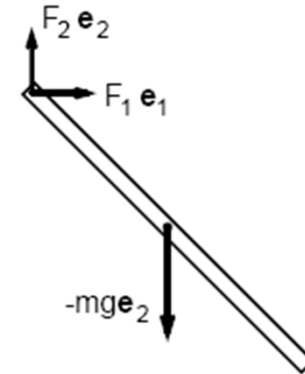
# Cap. 4 – CORPOS EM MOVIMENTO PLANO

- Equilíbrio dinâmico e diagrama de corpo livre:
  - Sendo “O” um ponto fixo;
  - A equação diferencial do movimento determina-se.

$$\frac{d\dot{\vec{H}}_O}{dt} = \sum \vec{M}_O \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{\phi} = \frac{-3g}{2L} \sin \phi$$

$$\frac{d\dot{\vec{H}}_O}{dt} = \ddot{\phi} \frac{1}{3} ML^2 \vec{e}_3$$

$$\sum M_O = -mg \frac{L}{2} \sin(\phi) \vec{e}_3$$



- Equilíbrio dinâmico e diagrama de corpo livre:
  - Utilização da equação de equilíbrio das forças.

$$\vec{r} = L/2[\sin(\phi)] \vec{e}_1 - L/2[\cos(\phi)] \vec{e}_2$$

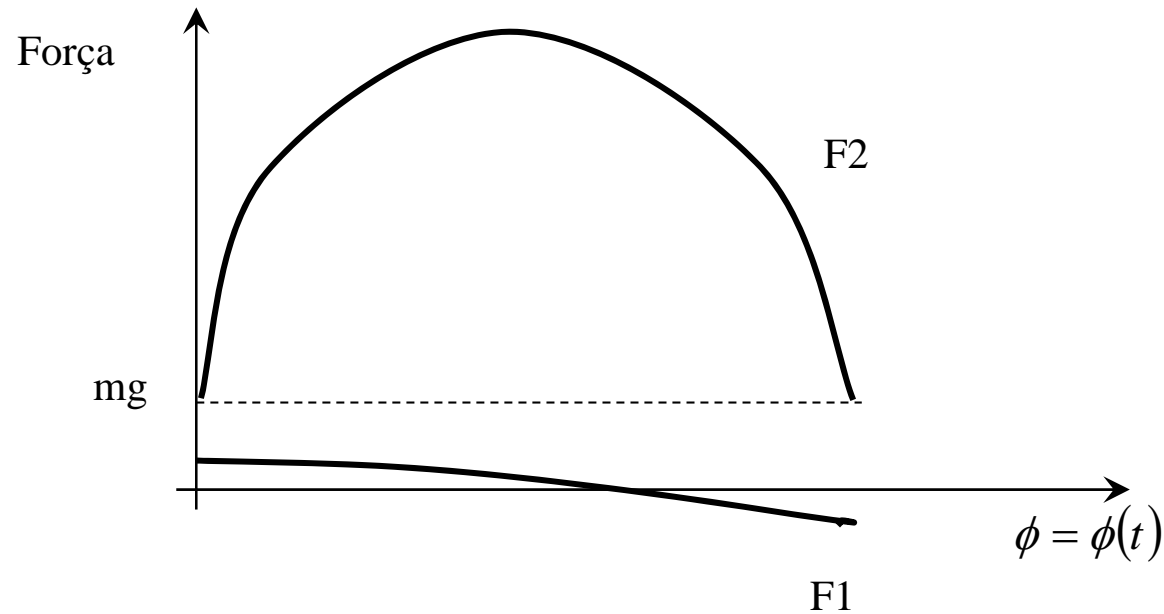
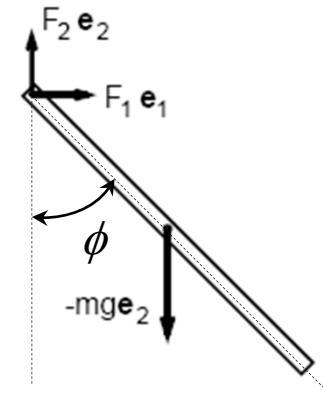
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = L/2[\dot{\phi} \cos(\phi)] \vec{e}_1 + L/2[\dot{\phi} \sin(\phi)] \vec{e}_2$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = L/2[-\dot{\phi}^2 \sin(\phi) + \ddot{\phi} \cos(\phi)] \vec{e}_1 + L/2[\dot{\phi}^2 \cos(\phi) + \ddot{\phi} \sin(\phi)] \vec{e}_2$$

# Cap. 4 – CORPOS EM MOVIMENTO PLANO

- Forças dinâmicas:

$$\sum \vec{F} = m \vec{a}_{cg} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 - mg \\ 0 \end{Bmatrix} = m \begin{Bmatrix} L/2[-\dot{\phi}^2 \sin(\phi) + \ddot{\phi} \cos(\phi)] \\ L/2[\dot{\phi}^2 \cos(\phi) + \ddot{\phi} \sin(\phi)] \\ 0 \end{Bmatrix}$$



# Cap. 4 – VELOCIDADE ANGULAR

- Corpos com geometrias variáveis, com movimento no plano:
  - Sistema E, Newtoniano (fixo);
  - Centro de massa, coincidente com C;
  - P e Q, representam pontos arbitrários;

(1)  $\vec{r}_Q = \vec{r}_P + \vec{r}_{PQ}$

(2)  $\vec{r}_{PQ} = \|\vec{r}_{PQ}\| \sin(\theta) [(\cos(\phi)\vec{e}_1 + \sin(\phi)\vec{e}_2)] + \|\vec{r}_{PQ}\| [\cos(\theta)\vec{e}_3]$

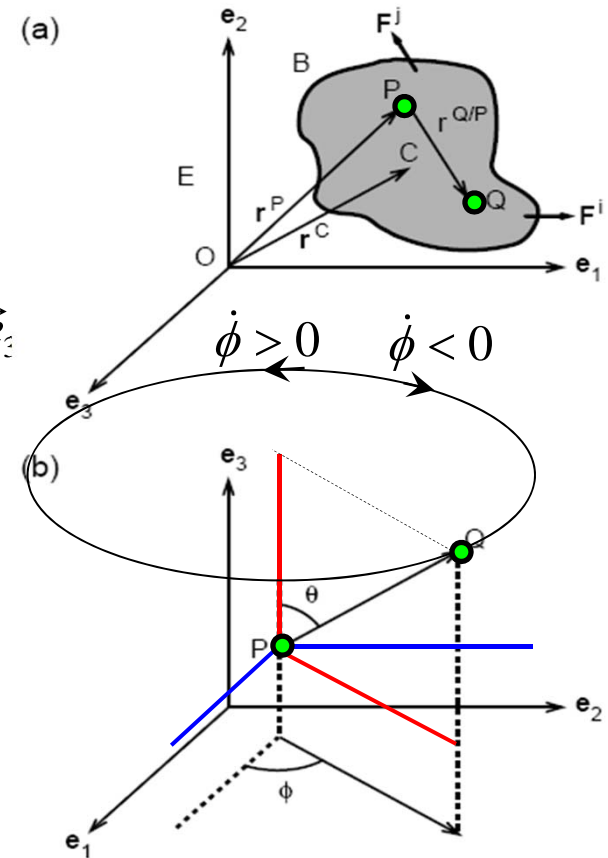
- Substituindo (2) em (1), derivando o resultado e considerando que apenas varia o ângulo  $\phi$ :

$$\vec{v}_Q = \vec{v}_P + \|\vec{r}_{PQ}\| \sin(\theta) (-\dot{\phi} \sin(\phi)\vec{e}_1 + \dot{\phi} \cos(\phi)\vec{e}_2)$$

$\vec{v}_Q = \vec{v}_P + \vec{\omega} \times \vec{r}_{PQ}$

(expressão de Mozzi)

$\vec{\omega} = \dot{\phi} \vec{e}_3$



# Cap. 4 – VELOCIDADE ANGULAR

- Vector velocidade angular (vector livre):
  - Pode variar com o tempo;
  - Para determinado instante, **não varia de ponto para ponto** e a rotação será sempre em torno de um eixo fixo;
  - Trata-se de uma característica de um corpo e não de um ponto;
  - O local do eixo de rotação não é importante em relação ao valor da velocidade angular, sendo apenas importante o sentido (conceito de vector livre);
  - O local do eixo de rotação é importante para determinar o vector velocidade linear de qualquer ponto no corpo rígido;

- Demonstração de vector livre:

- Calculando a velocidade linear em 2 pontos (P,Q);

$$\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times O\vec{P} \quad \vec{v}_Q = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times O\vec{Q}$$

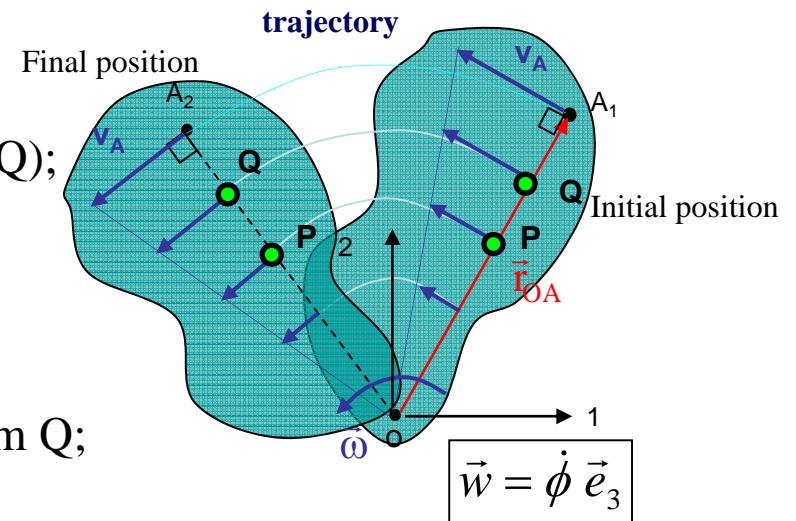
- Subtraindo membro a membro;

$$\vec{v}_P = \vec{v}_Q + \vec{\omega} \times Q\vec{P}$$

- Admitindo um vector  $\vec{w}'$  diferente localizado em Q;

$$\vec{v}_P = \vec{v}_Q + \vec{w}' \times Q\vec{P}$$

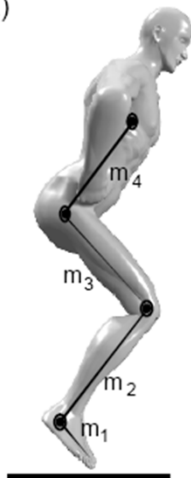
- Como o ponto P não pode ter 2 vectores velocidade diferentes, isto implica o mesmo vector velocidade angular, quando aplicado em O ou em Q.  $\vec{w}' = \vec{\omega}$



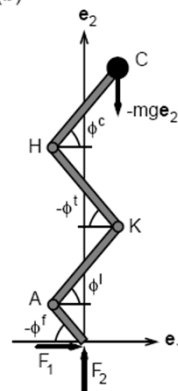
## Cap. 4 – EXEMPLO 4.1

- Salto na vertical para determinar a contribuição da velocidade angular de cada segmento no vector velocidade linear do centro de massa (vertical).
  - neste movimento, os braços não possuem movimento relativo em relação ao tronco;
  - **Objectivo**: determinar o vector velocidade do CM, para o instante tempo  $t=0.2$  [s], depois de iniciar o contra movimento de salto;
  - Dimensões do atleta:  $L_f$  (foot length)=270 [mm],  $L_l$  (ankle to knee length=leg)=480 [mm],  $L_t$  (knee to hip length=thigh)=500 [mm],  $L_c$  (hip to mass center=trunk)=280 [mm], massa do atleta = 68 [kg].
- Modelo de cálculo de engenharia biomédica:
  - Corpo modelado por 4 barras;
  - ângulos de posição em relação a um referencial fixo E:  $\phi_f$ ,  $\phi_l$ ,  $\phi_t$ ,  $\phi_c$ , considerados positivos se ampliados no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio.

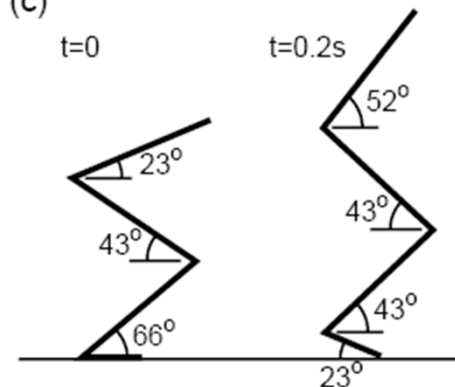
(a)



(b)



(c)



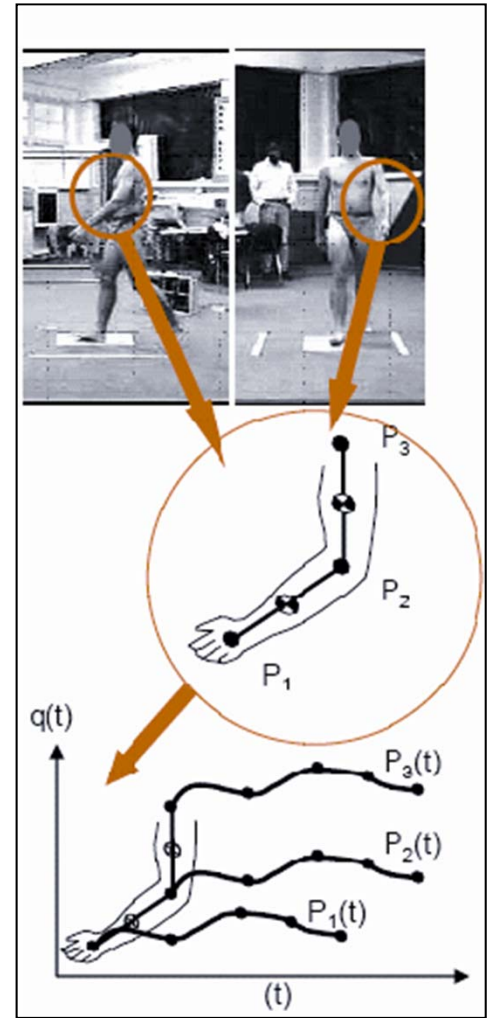
# Cap. 4 – EXEMPLO 4.1

- Condições iniciais do problema (t=0):
  - $\phi_f=0^\circ, \phi_l=66^\circ, \phi_t=-43^\circ, \phi_c=23^\circ,$
- Por aplicação da dinâmica inversa (câmara de movimento):
  - conseguem-se medir os ângulos referidos.

$$\begin{aligned}
 \phi_f &= -2t & t [s], \phi [rad] \\
 \phi_l &= 20(t - 0.15)^2 + 0.7 \\
 \phi_t &= -15(t - 0.10)^2 - 0.6 \\
 \phi_c &= 2.5t + 0.4
 \end{aligned}$$

Solução: Determinação da velocidade angular de cada segmento (corpo)

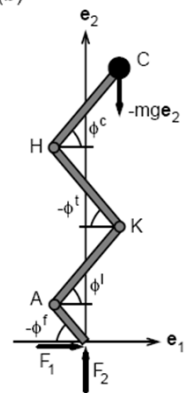
$$\begin{aligned}
 \bar{w}_f &= \dot{\phi}_f = -2 \bar{e}_3 & \bar{w}_t &= \dot{\phi}_t = -30(t - 0.10) \bar{e}_3 \\
 \bar{w}_l &= \dot{\phi}_l = 40(t - 0.15) \bar{e}_3 & \bar{w}_c &= \dot{\phi}_c = 2.5 \bar{e}_3
 \end{aligned}$$



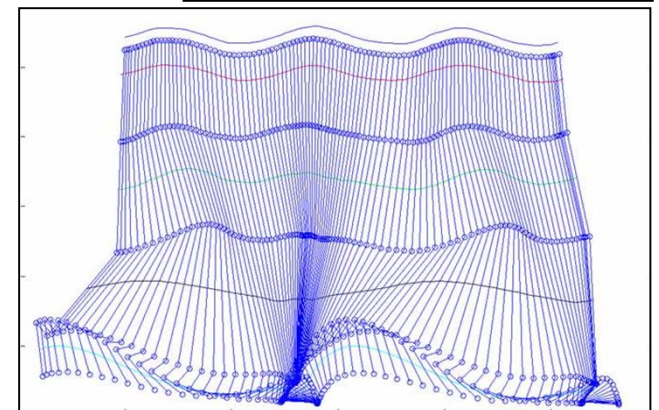
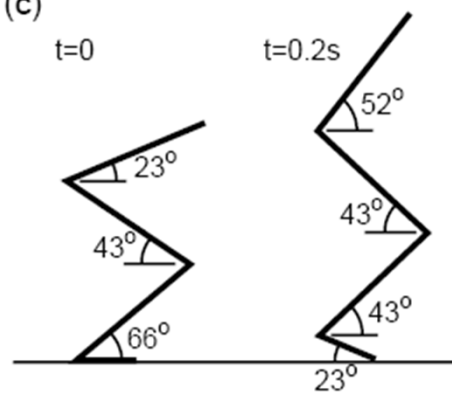
(a)



(b)



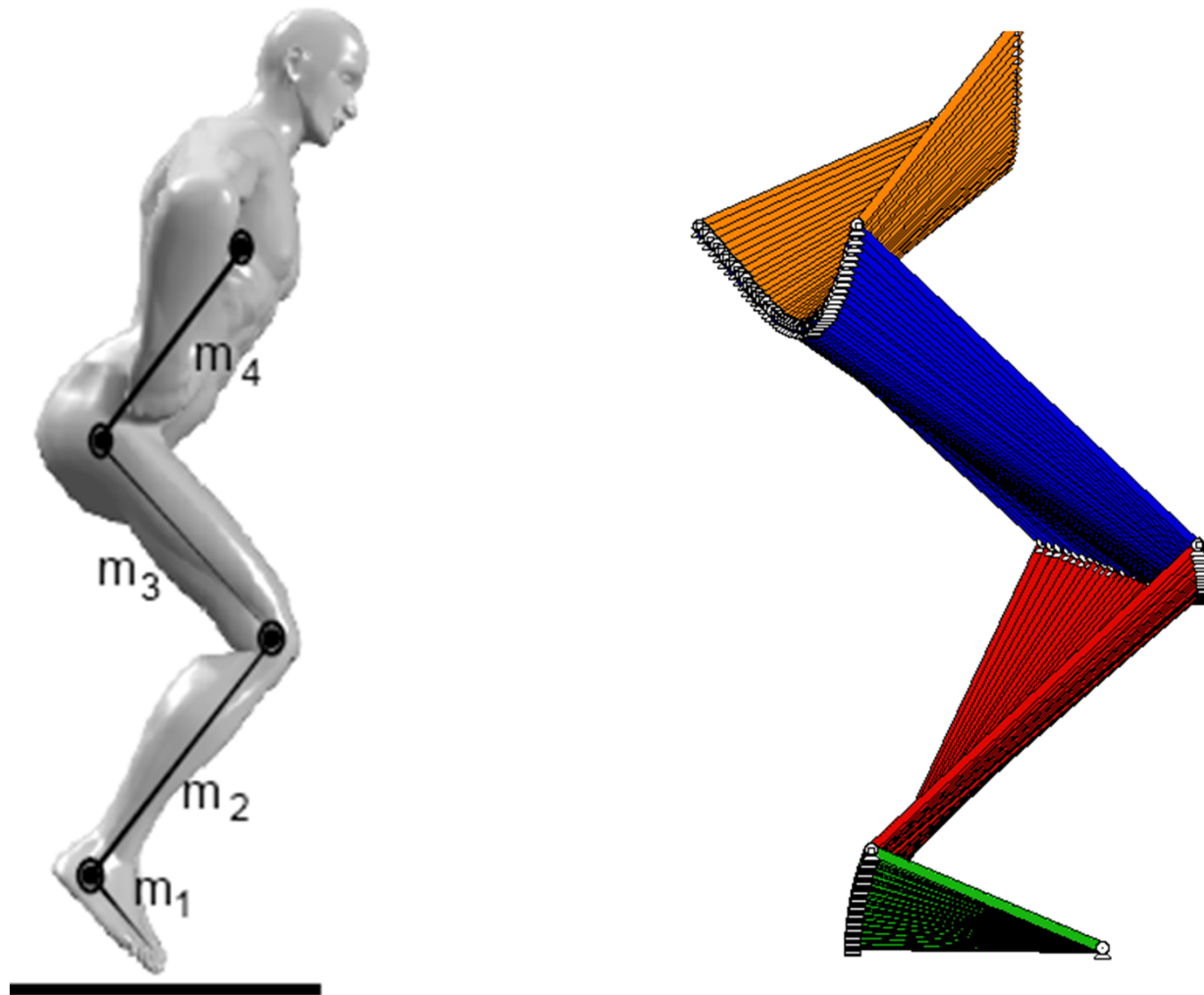
(c)





## Cap. 4 – EXEMPLO 4.1

- Modelo numérico com Interactive physics.



# Cap. 4 – EXEMPLO 4.1

Determinação da velocidade angular de cada segmento para o instante de tempo pretendido (t=0.2):

$$\bar{\omega}_f = \dot{\phi} = -2 \bar{e}_3 \quad \bar{\omega}_l = \dot{\phi}_l = 2 \bar{e}_3 \quad \bar{\omega}_t = \dot{\phi}_t = -3 \bar{e}_3 \quad \bar{\omega}_c = \dot{\phi}_c = 2.5 \bar{e}_3$$

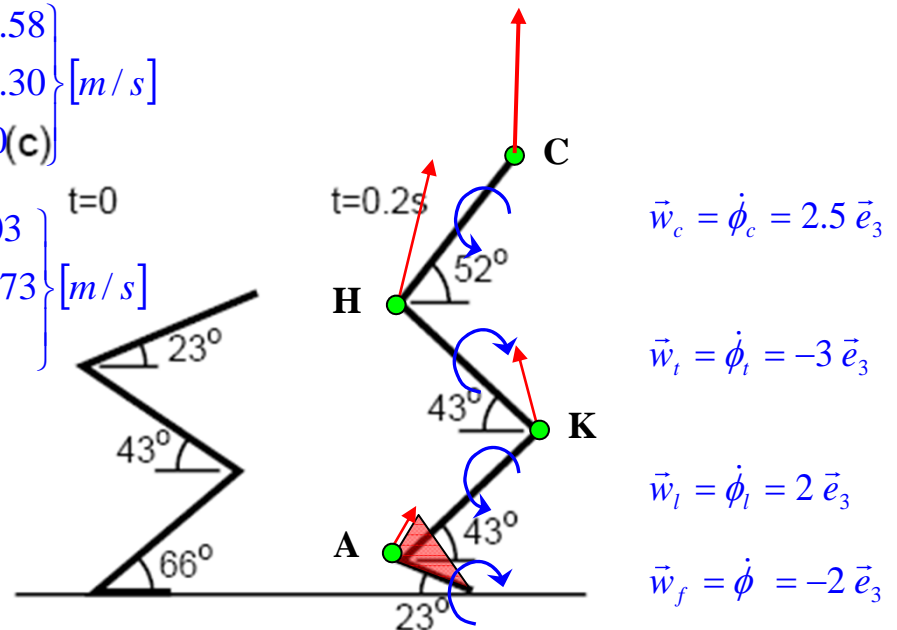
Determinação da velocidade linear, utilizando a expressão de Mozzi (t=0.2):

$$\vec{v}_A = \vec{v}_O + \bar{\omega}_f \times O\vec{A} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} -0.27 \cos(23) \\ 0.27 \sin(23) \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.21 \\ 0.50 \\ 0 \end{Bmatrix} [m/s]$$

$$\vec{v}_K = \vec{v}_A + \bar{\omega}_l \times A\vec{K} = \begin{Bmatrix} 0.21 \\ 0.50 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0.48 \cos(43) \\ 0.48 \sin(43) \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.44 \\ +1.20 \\ 0 \end{Bmatrix} [m/s]$$

$$\vec{v}_H = \vec{v}_K + \bar{\omega}_t \times K\vec{H} = \begin{Bmatrix} -0.44 \\ +1.20 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} -0.50 \cos(43) \\ +0.50 \sin(43) \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} +0.58 \\ +2.30 \\ 0(c) \end{Bmatrix} [m/s]$$

$$\vec{v}_C = \vec{v}_H + \bar{\omega}_c \times H\vec{C} = \begin{Bmatrix} +0.58 \\ +2.30 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2.5 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} +0.28 \cos(52) \\ +0.28 \sin(52) \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.03 \\ +2.73 \\ 0 \end{Bmatrix} [m/s]$$

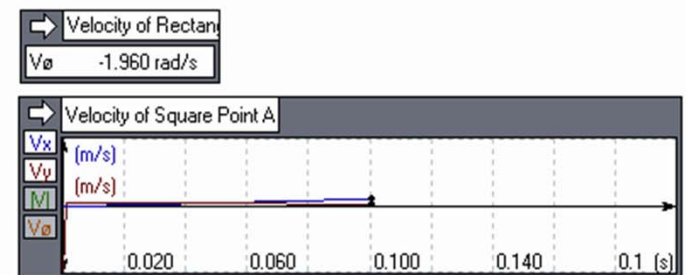
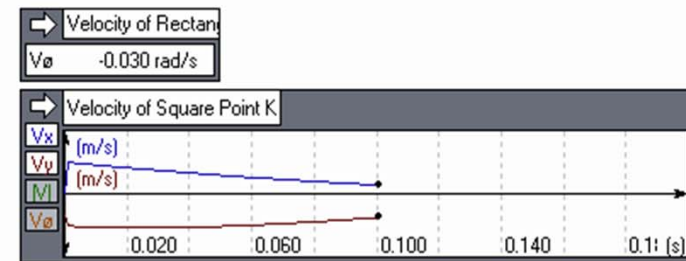
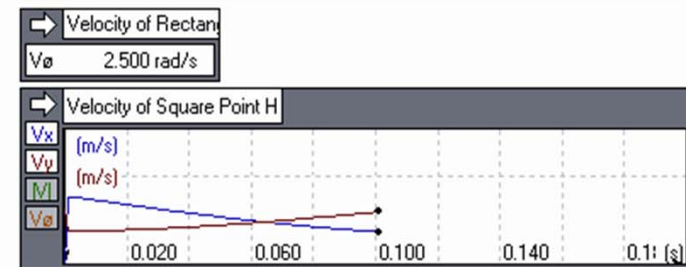
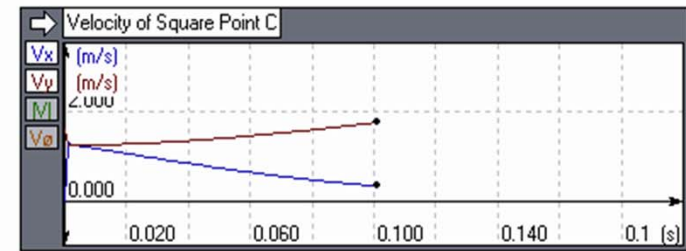
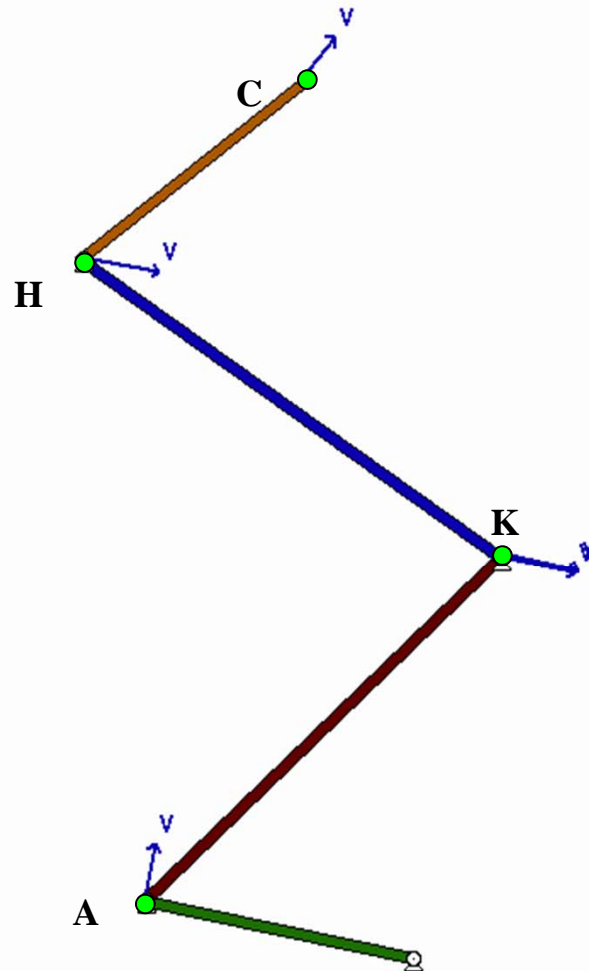


## Observação:

Bobbert e Scenau (1988) concluíram, em 10 especialistas de salto, que a velocidade média do CM aumentava de zero para 3.5 [m/s], durante a fase preparatória de salto.

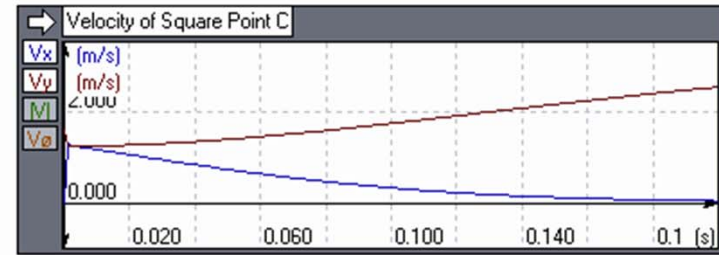
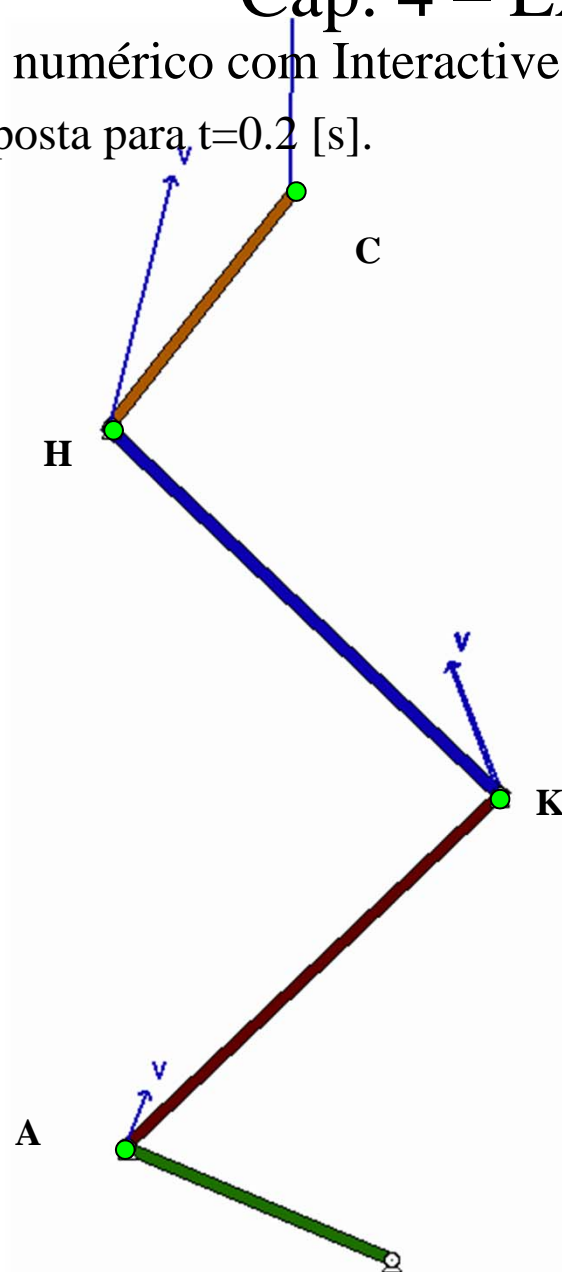
# Cap. 4 – EXEMPLO 4.1

- Modelo numérico com Interactive physics:
  - Resposta para  $t=0.1$  [s].

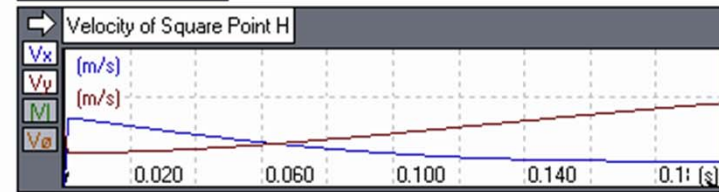


# Cap. 4 – EXEMPLO 4.1

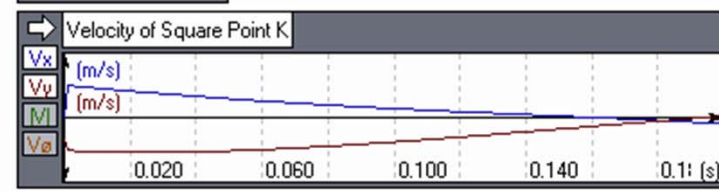
- Modelo numérico com Interactive physics:
  - Resposta para  $t=0.2$  [s].



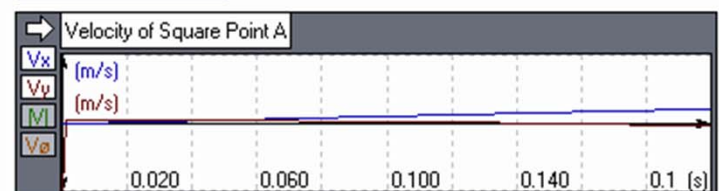
Velocity of Rectang  
 $V_\theta$  2.500 rad/s



Velocity of Rectang  
 $V_\theta$  -3.030 rad/s



Velocity of Rectang  
 $V_\theta$  2.040 rad/s

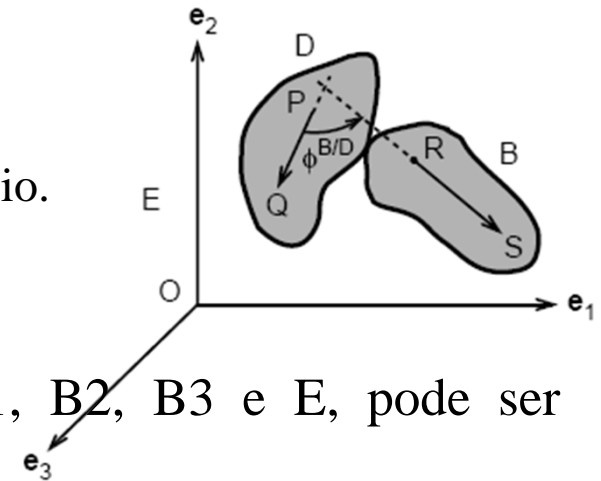


Velocity of Rectang  
 $V_\theta$  -2.000 rad/s

# Cap. 4 – VELOCIDADE ANGULAR RELATIVA

- Num sistema multicorpos, a ligação é feita através de articulações, importando saber o valor da velocidade relativa entre os corpos adjacentes.
  - os músculos actuam nas articulações para modificar estes ângulos.
  - as soluções numéricas aplicam o conceito de velocidade angular relativa.
- Considere-se a velocidade angular relativa entre B e D.
  - assumindo duas linhas imaginárias, fixas em B e em D.
  - assumindo o sentido positivo, contrário ao ponteiro relógio.

$$\vec{w}_{B/D} = \dot{\phi}_{B/D} \vec{e}_3 = \frac{d\phi_{B/D}}{dt} \vec{e}_3$$



- No caso de existirem mais corpos relacionados, B1, B2, B3 e E, pode ser utilizado o princípio da sobreposição:

$$\vec{w}_{B3/E} = \vec{w}_{B3/B2} + \vec{w}_{B2/B1} + \vec{w}_{B1/E}$$

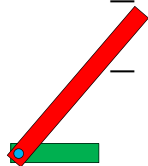
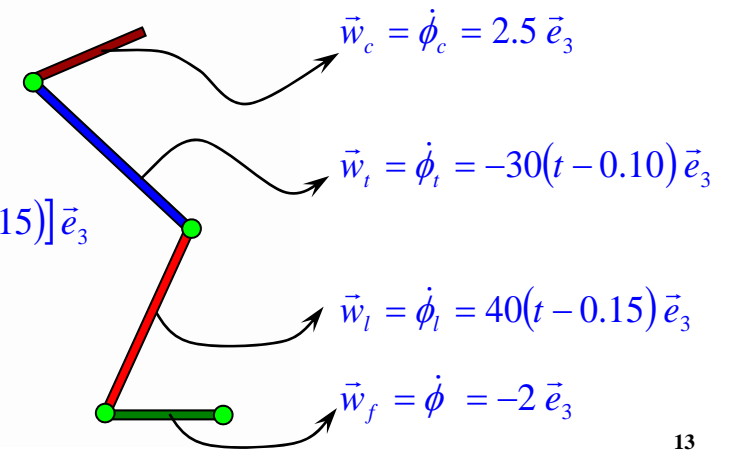
- No caso concreto do exemplo 4.1:

- actuador entre c/t:  $\vec{w}_{c/t} = [2.5] \vec{e}_3 - [-30(t-0.1)] \vec{e}_3$

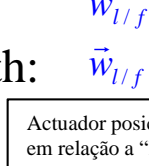
- actuador entre t/l:  $\vec{w}_{t/l} = [-30(t-0.10)] \vec{e}_3 - [40(t-0.15)] \vec{e}_3$

- actuador entre l/f:  $\vec{w}_{l/f} = [40(t-0.15)] \vec{e}_3 - [-2] \vec{e}_3$

- actuador entre f/earth:  $\vec{w}_{l/f} = [-2] \vec{e}_3 - [0] \vec{e}_3$



Actuador posicionado em "leg", em relação ao "foot" = w l/f



Actuador posicionado em "foot", em relação a "leg" = wf/l

# Cap. 4 – EXEMPLO 4.2

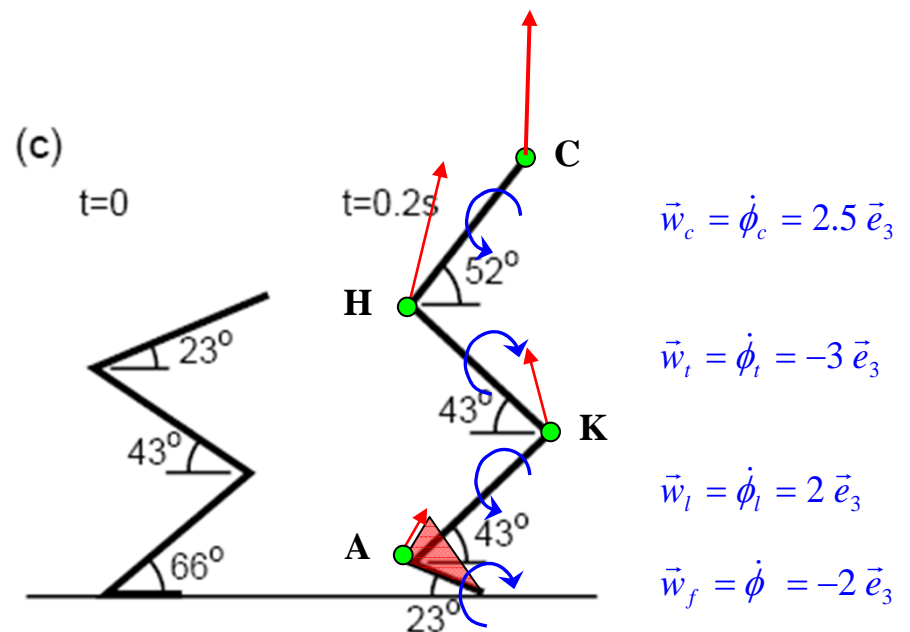
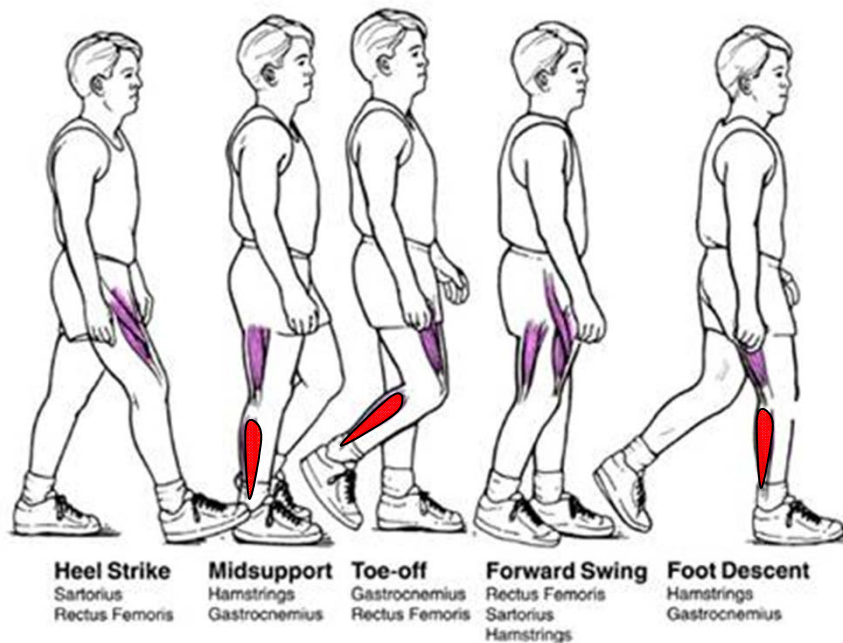
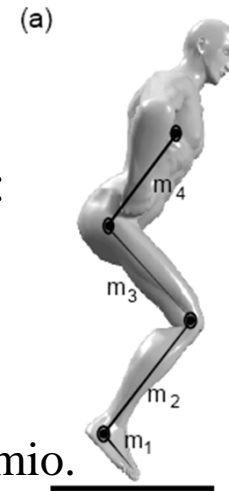
- Valores instantâneos de velocidade angular, para  $t=0.2$  [s]:

$$\bar{w}_f = \dot{\phi} = -2 \bar{e}_3 \quad \bar{w}_l = \dot{\phi}_l = 2 \bar{e}_3 \quad \bar{w}_t = \dot{\phi}_t = -3 \bar{e}_3 \quad \bar{w}_c = \dot{\phi}_c = 2.5 \bar{e}_3$$

- Valor relativo da velocidade da perna em relação ao pé, para  $t=0.2$  [s]:

$$\bar{w}_{l/f} = \bar{w}_l - \bar{w}_f = 2 \bar{e}_3 - (-2 \bar{e}_3) = 4 \bar{e}_3$$

- Este valor significa um aumento físico do ângulo entre a perna e o pé, no tornozelo.
- Este movimento é, principalmente, devido à acção do músculo gastrocnémio.

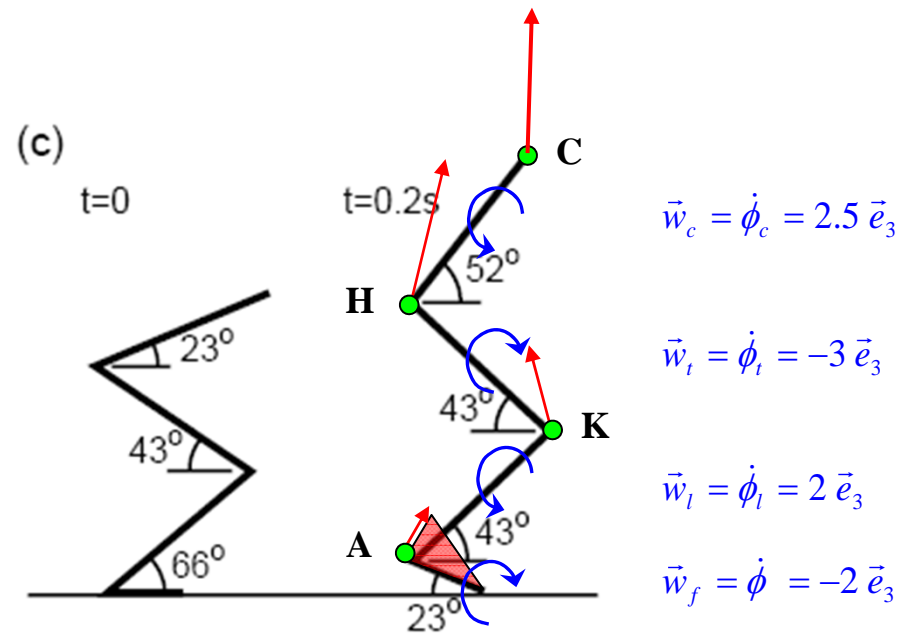
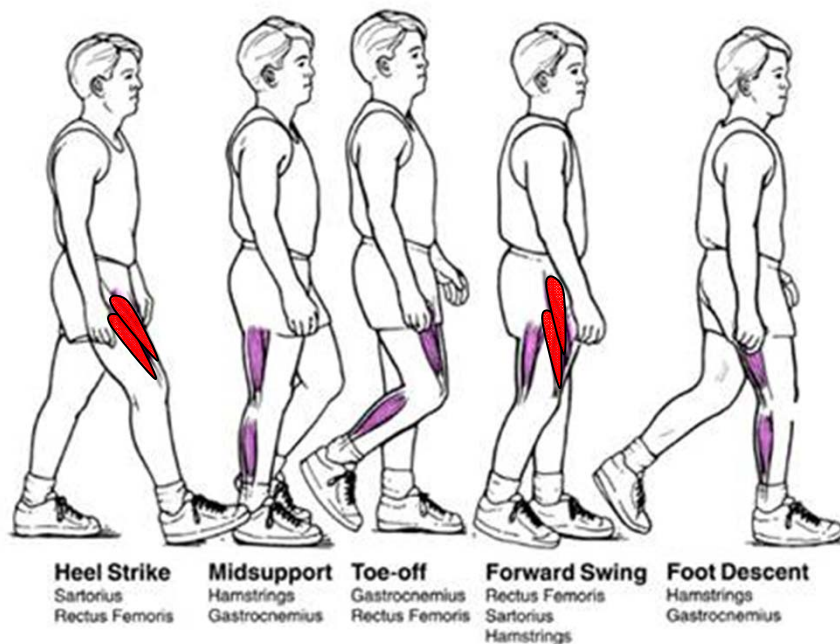


# Cap. 4 – EXEMPLO 4.2

- Valor relativo da velocidade da coxa em relação à perna, para  $t=0.2$  [s]:

$$\vec{w}_{t/l} = \vec{w}_t - \vec{w}_l = -3\vec{e}_3 - (2\vec{e}_3) = -5\vec{e}_3$$

- Este valor corresponde a uma extensão da perna.
- A actividade muscular principal é devida ao “quadriceps femoris”.



## Cap. 4 – ACELERAÇÃO ANGULAR

- Derivando a expressão que relaciona dois pontos de um corpo:  $\vec{v}_Q = \vec{v}_P + \vec{w} \times P\vec{Q}$

$$\vec{a}_Q = \frac{d\vec{v}_Q}{dt} = \vec{a}_P + \frac{d\vec{w}}{dt} \otimes P\vec{Q} + \vec{w} \otimes \frac{dP\vec{Q}}{dt}$$

- Expressão de Mozzi:

$$\boxed{\vec{a}_Q = \vec{a}_P + \dot{\vec{w}} \otimes P\vec{Q} + \vec{w} \otimes (\vec{w} \otimes P\vec{Q})}$$

- Na expressão anterior, o vector aceleração angular é definido por.

$$\boxed{\dot{\vec{w}} = \vec{\alpha} = \ddot{\phi} \vec{e}_3}$$

- No caso de movimentos planos, as regras de multiplicação sequencial originam:

$$\vec{w} \otimes (\vec{w} \otimes P\vec{Q}) = -w^2 P\vec{Q}$$



## Cap. 4 – EXEMPLO 4.3

- Objectivo: Determinação da aceleração do centro de gravidade, durante a fase preparatória de um salto na direcção vertical, considerando as seguintes condições:

- Dimensões do atleta: L foot (foot length)=270 [mm], L leg (ankle to knee length)=480 [mm], L thigh (knee to hip length)=500 [mm], Lc (hip to mass center)=280 [mm], massa do atleta = 68 [kg].

- Variação da posição dos elementos com o tempo:

$$\phi_f = -2t \quad \phi_l = 20(t - 0.15)^2 + 0.7 \quad \phi_t = -15(t - 0.10)^2 - 0.6 \quad \phi_c = 2.5t + 0.4$$

- Variação da velocidade angular com o tempo (aceleração angular):

$$\vec{w}_f = \dot{\phi} = -2 \vec{e}_3 \longrightarrow \alpha_f = \dot{w}_f = \ddot{\phi} = 0 \vec{e}_3$$

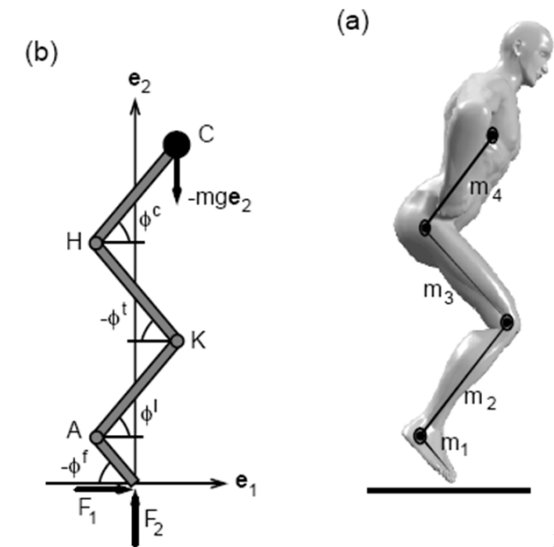
$$\vec{w}_l = \dot{\phi}_l = 40(t - 0.15) \vec{e}_3 \longrightarrow \alpha_l = \dot{w}_l = \ddot{\phi}_l = 40 \vec{e}_3$$

$$\vec{w}_t = \dot{\phi}_t = -30(t - 0.10) \vec{e}_3 \longrightarrow \alpha_t = \dot{w}_t = \ddot{\phi}_t = -30 \vec{e}_3$$

$$\vec{w}_c = \dot{\phi}_c = 2.5 \vec{e}_3 \longrightarrow \alpha_c = \dot{w}_c = \ddot{\phi}_c = 0 \vec{e}_3$$

- Determinação da aceleração do ponto A:

$$\begin{aligned} \vec{a}_A &= \vec{a}_O + \dot{w}_f \otimes O\vec{A} + w_f \otimes (w_f \otimes O\vec{A}) \\ &= \vec{0} + \vec{0} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{Bmatrix} \otimes \left( \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{Bmatrix} \otimes \begin{Bmatrix} -0.27 \cos(\phi_f) \\ 0.27 \sin(\phi_f) \\ 0 \end{Bmatrix} \right) = -4 \begin{Bmatrix} -0.27 \cos(\phi_f) \\ 0.27 \sin(\phi_f) \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$



## Cap. 4 – EXEMPLO 4.3

- Aceleração do ponto A, para  $t=0.2$  [s]:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_O + \dot{\vec{w}}_f \otimes O\vec{A} + \vec{w}_f \otimes (\vec{w}_f \otimes O\vec{A})$$

$$\vec{a}_A = -4 \begin{Bmatrix} -0.27 \cos(\phi_f) \\ 0.27 \sin(\phi_f) \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.0 \\ -0.42 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad [m/s^2]$$

- Determinação da aceleração do ponto K:

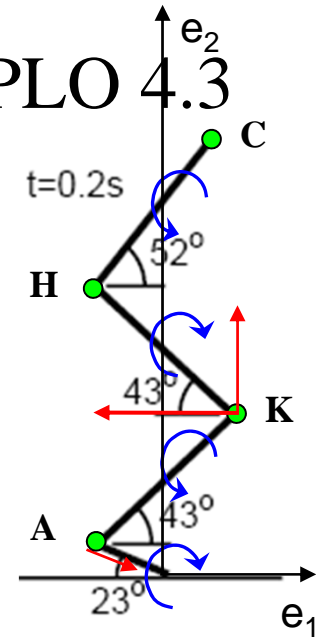
$$\vec{a}_K = \vec{a}_A + \dot{\vec{w}}_l \otimes A\vec{K} + \vec{w}_l \otimes (\vec{w}_l \otimes A\vec{K})$$

$$= \begin{Bmatrix} 1.08 \cos(\phi_f) \\ -1.08 \sin(\phi_f) \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 40 \end{Bmatrix} \otimes \begin{Bmatrix} 0.48 \cos(\phi_l) \\ 0.48 \sin(\phi_l) \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 40(t-0.15) \end{Bmatrix} \otimes \left( \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 40(t-0.15) \end{Bmatrix} \otimes \begin{Bmatrix} 0.48 \cos(\phi_l) \\ 0.48 \sin(\phi_l) \\ 0 \end{Bmatrix} \right)$$

- Aceleração do ponto K, para  $t=0.2$  [s]:

$$\vec{a}_K = \vec{a}_A + \dot{\vec{w}}_l \otimes A\vec{K} + \vec{w}_l \otimes (\vec{w}_l \otimes A\vec{K})$$

$$= \begin{Bmatrix} 1.0 \\ -0.42 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -13.09 \\ +14.04 \\ 0 \end{Bmatrix} - [2]^2 \begin{Bmatrix} 0.351 \\ 0.327 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -13.5 \\ 12.3 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad [m/s^2]$$



$$\vec{w}_c = \dot{\phi}_c = 2.5 \vec{e}_3 \quad \vec{\alpha}_c = 0 \vec{e}_3$$

$$\vec{w}_l = \dot{\phi}_l = -3 \vec{e}_3 \quad \vec{\alpha}_l = -30 \vec{e}_3$$

$$\vec{w}_l = \dot{\phi}_l = 2 \vec{e}_3 \quad \vec{\alpha}_l = 40 \vec{e}_3$$

$$\vec{w}_f = \dot{\phi}_f = -2 \vec{e}_3 \quad \vec{\alpha}_f = 0 \vec{e}_3$$

## Cap. 4 – EXEMPLO 4.3

- Determinação da aceleração do ponto H:

$$\begin{aligned}\vec{a}_H &= \vec{a}_K + \dot{\vec{w}}_t \otimes K\vec{H} + \vec{w}_t \otimes (\vec{w}_t \otimes K\vec{H}) \\ &= \begin{Bmatrix} 1.08 \cos(\phi_f) - 19.2 \sin(\phi_t) - [40(t - 0.15)]^2 0.48 \cos(\phi_t) \\ -1.08 \sin(\phi_f) + 19.2 \cos(\phi_t) - [40(t - 0.15)]^2 0.48 \sin(\phi_t) \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -30 \end{Bmatrix} \otimes \begin{Bmatrix} -0.5 \cos(\phi_t) \\ +0.5 \sin(\phi_t) \\ 0 \end{Bmatrix} - [-30(t - 0.1)]^2 \begin{Bmatrix} -0.5 \cos(\phi_t) \\ +0.5 \sin(\phi_t) \\ 0 \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} 1.08 \cos(\phi_f) - 19.2 \sin(\phi_t) - [40(t - 0.15)]^2 0.48 \cos(\phi_t) + 15 \sin(\phi_t) + [-30(t - 0.1)]^2 0.5 \cos(\phi_t) \\ -1.08 \sin(\phi_f) + 19.2 \cos(\phi_t) - [40(t - 0.15)]^2 0.48 \sin(\phi_t) + 15 \cos(\phi_t) - [-30(t - 0.1)]^2 0.5 \sin(\phi_t) \\ 0 \end{Bmatrix}\end{aligned}$$

- Aceleração do ponto H, para t=0.2 [s]:

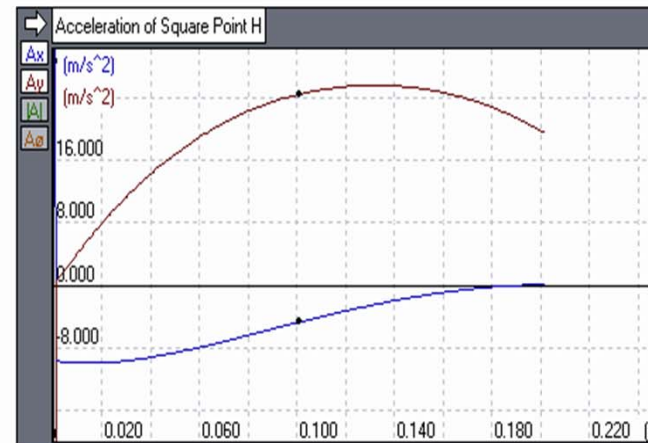
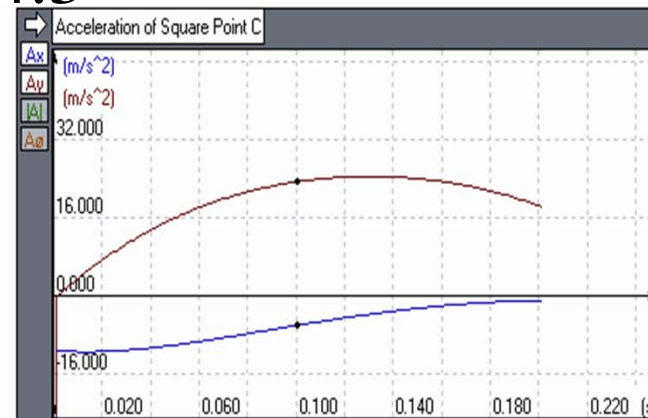
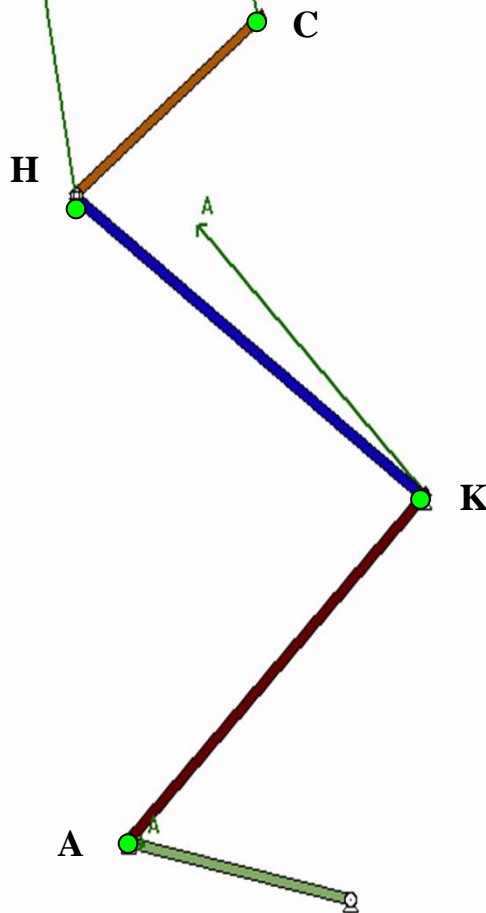
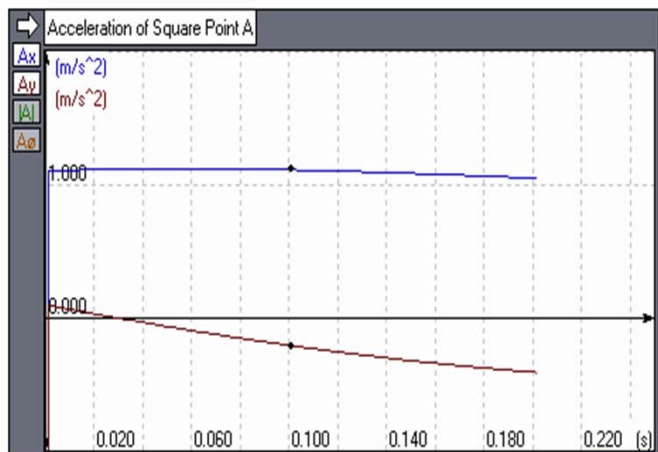
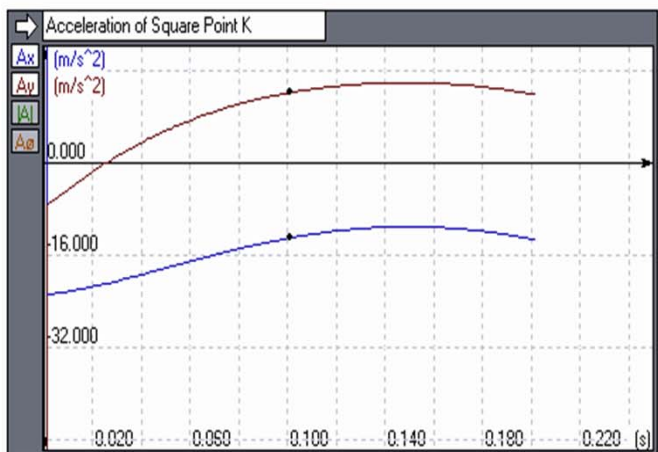
$$\vec{a}_H = \begin{Bmatrix} 0.1 \\ 20.2 \\ 0 \end{Bmatrix} [m/s^2]$$

- Aceleração do ponto C, para t=0.2 [s]:

$$\begin{aligned}\vec{a}_C &= \vec{a}_H + \dot{\vec{w}}_c \otimes H\vec{C} + \vec{w}_c \otimes (\vec{w}_c \otimes H\vec{C}) \\ &= \begin{Bmatrix} -1.0 \\ 18.8 \\ 0 \end{Bmatrix} [m/s^2]\end{aligned}$$

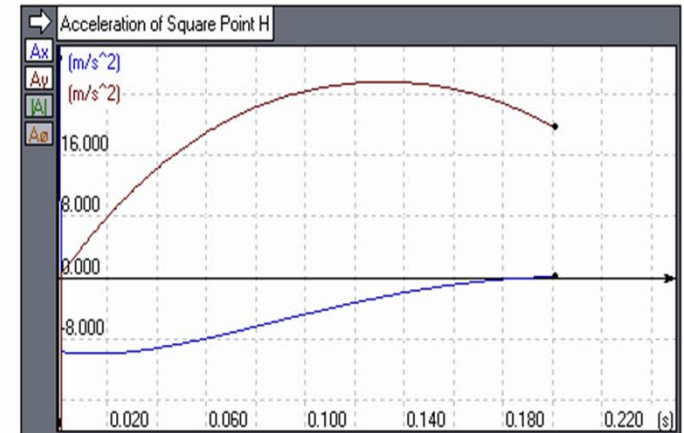
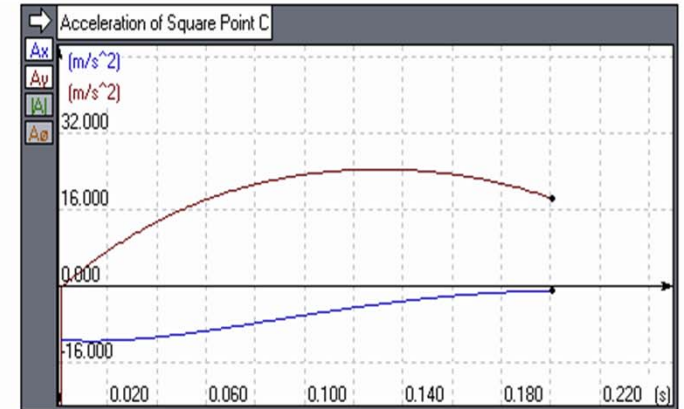
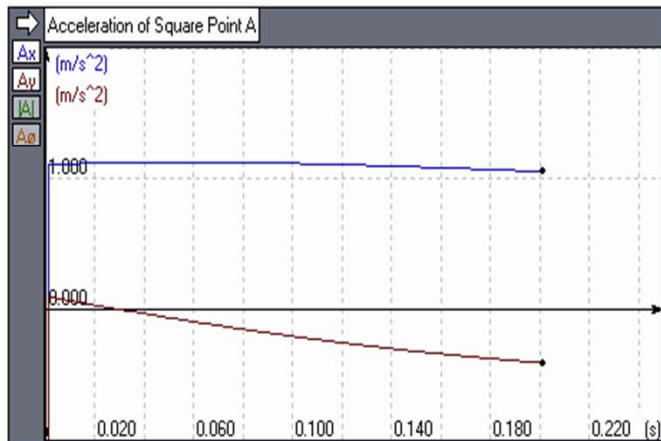
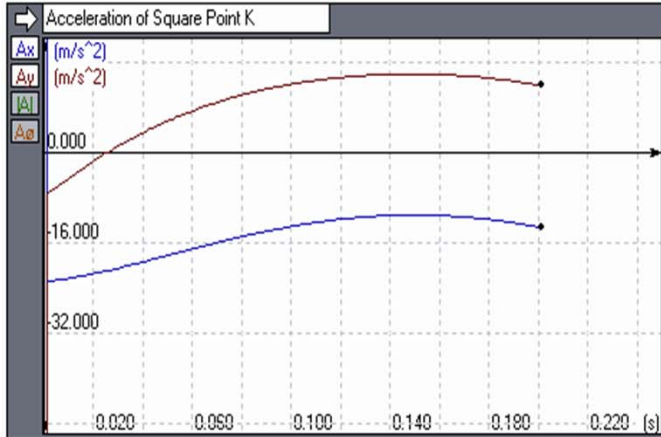
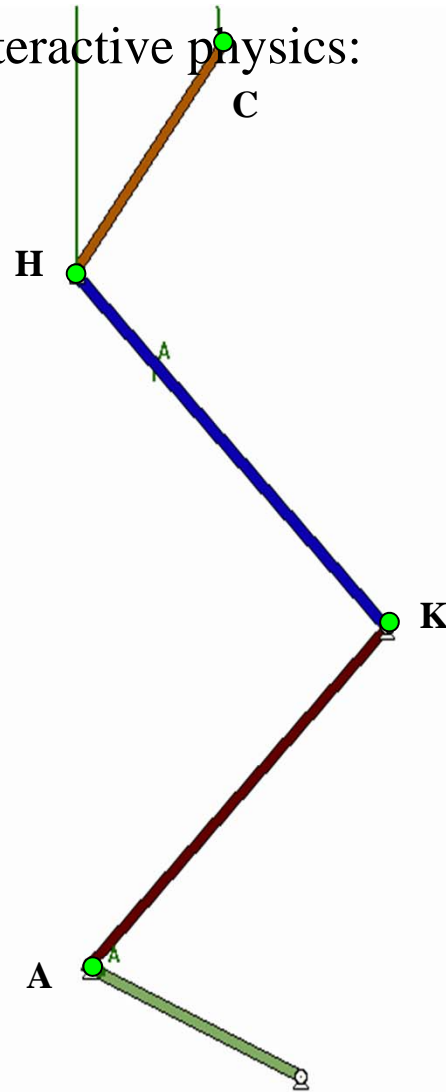
# Cap. 4 – EXEMPLO 4.3

- Modelo numérico com Interactive physics:
  - Resposta para  $t=0.1$  [s].



# Cap. 4 – EXEMPLO 4.3

- Modelo numérico com Interactive physics:
  - Resposta para  $t=0.2$  [s].



## Cap. 4 – EXEMPLO 4.3

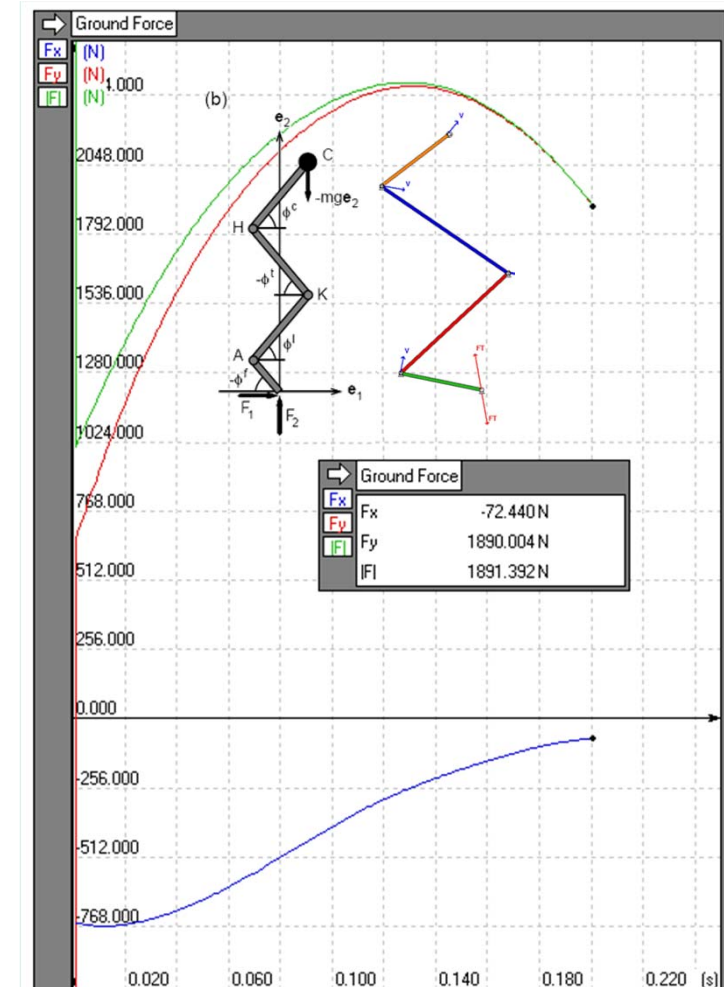
- FORÇAS DINÂMICAS REACTIVAS:

- Determine o valor da força reactiva do solo no atleta, para o instante correspondente a  $t=0.2$  [s].

$$\sum \vec{F} = m \vec{a}_{cg} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 - mg \\ 0 \end{Bmatrix} = m \begin{Bmatrix} -1.0 \\ 18.8 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

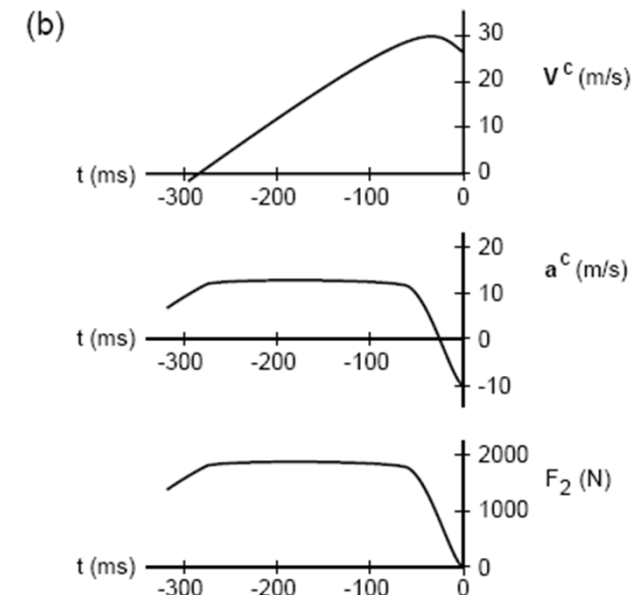
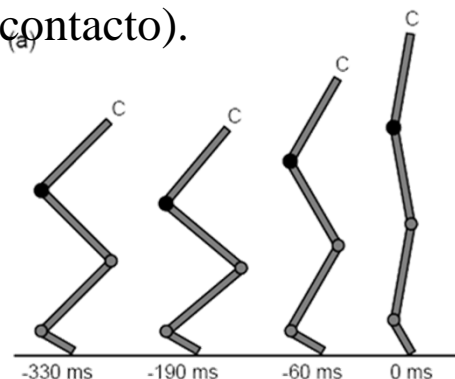
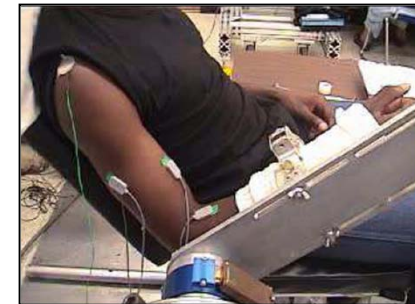
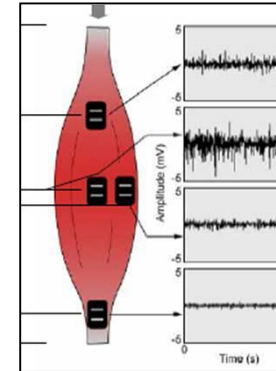
$$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -68.0 \\ 1945.5 \\ 0 \end{Bmatrix} [N]$$

- A força vertical actuante é, aproximadamente, igual a 3 vezes o valor da força peso.



## Cap. 4 – OUTROS ESTUDOS

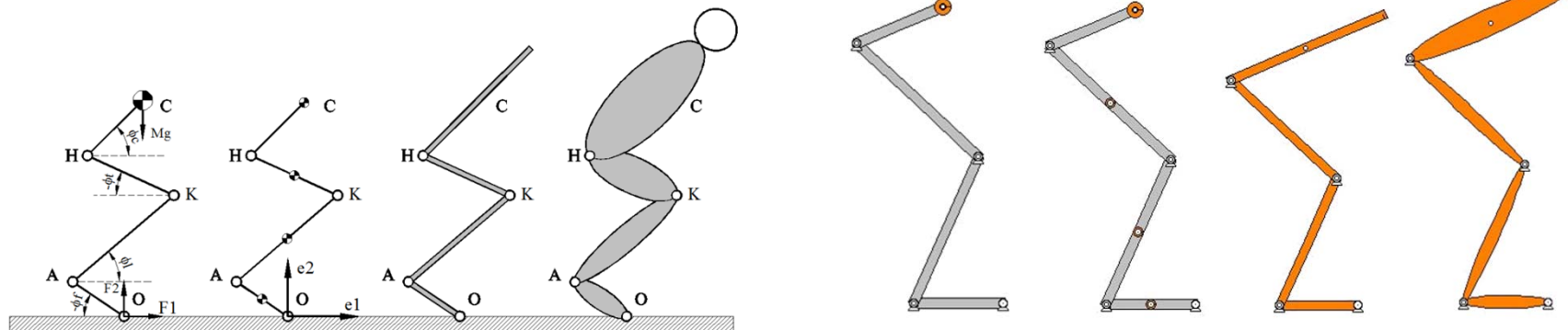
- Robbert e Schenau (1988) efectuaram medições experimentais em 10 atletas de voleibol, nomeadamente:
  - tempo de contacto na preparação do salto;
  - actividade eléctrica dos músculos das pernas (EMG);
  - ângulo de rotação dos segmentos anatómicos.
- Na figura apresentam-se alguns resultados :
  - nos instantes iniciais a força reactiva é inferior à força peso dos atletas;
  - nos instantes posteriores, este valor duplica o valor da força peso dos atletas;
  - finaliza em zero (perda de contacto).





# Cap. 4 – OUTROS ESTUDOS

- Cátia Fidalgo, Célio Cerqueira, Diana Cidre, Diana Barros, Hélder Silva, Paulo A. G. Piloto; “Simulação do movimento preparatório do salto utilizando diferentes modelos antropométricos”, actas do 3º congresso nacional de biomecânica, pp. 367-371, ISBN 978-989-96100-0-2; CD ISBN: 978-989-96114-0-5; 11-12 de Fevereiro de 2009.
  - Estudo de diferentes modelos antropométricos, utilizando 4 segmentos e 5 pontos de controlo.
  - Análise cinemática e dinâmica do protocolo em estudo.
  - Estudo comparativo dos métodos de integração numérica.
  - Objectivo: comparação das forças de reacção e de outros parâmetros cinemáticos.



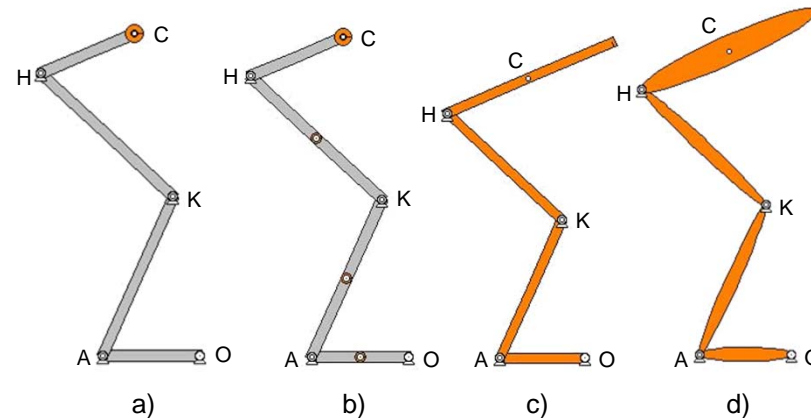


# Cap. 4 – OUTROS ESTUDOS

- Propriedades anatómicas:

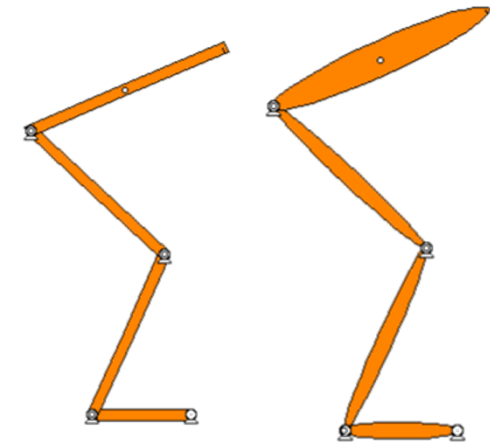
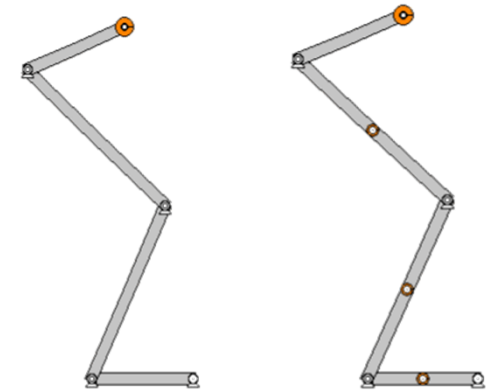
Seg.	Nº	Massa [kg]	Massa [%]	Comp. [m]
Total	-	68,00	100	-
AO=f	2	2,04	3,0	0,27
AK=l	2	6,12	9,0	0,48
KH=t	2	14,28	21,0	0,50
HC <sup>+</sup> =c	1	45,56	67,0	0,28

- Modelo a):
  - Massa concentrada no ponto C.
- Modelo b):
  - Massa concentrada nos 4 segmentos.
- Modelo c):
  - Massa distribuída com forma rectangular.
- Modelo d):
  - Massa distribuída com forma elíptica.



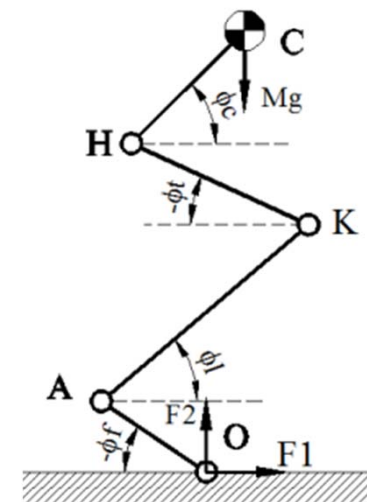
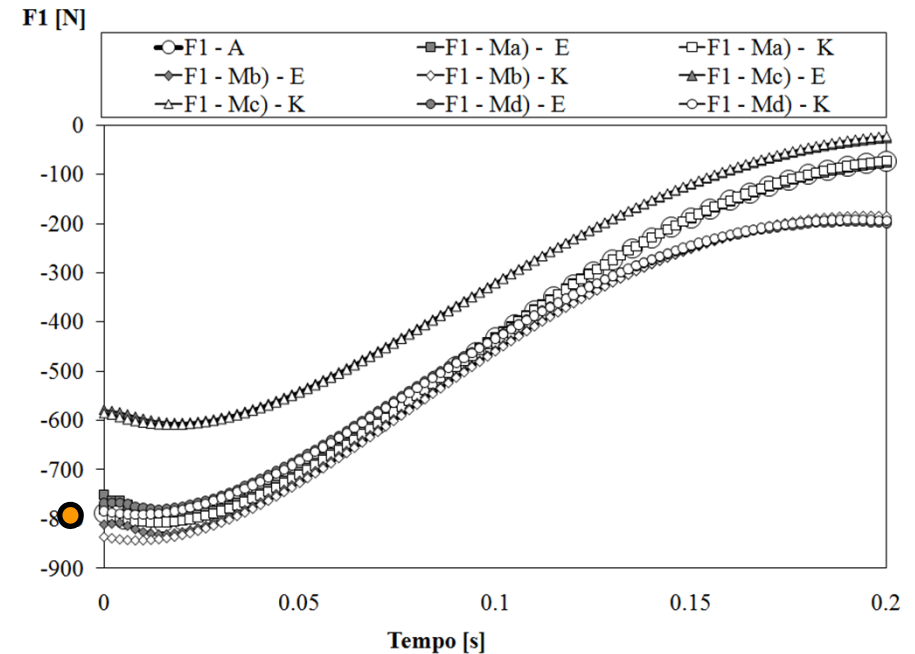
## Cap. 4 – OUTROS ESTUDOS

- Os modelos de massa concentrada foram simulados com a utilização de pequenos corpos rígidos de forma circular.
- Foram utilizados dois métodos de integração numérica:
  - Euler:
    - método de 1ª ordem;
    - com aproximação em expansão de série de Taylor,
    - com passo de integração fixo;
    - explícito;
    - mais rápido e não adequado para movimentos rápidos.
  - Kutta Merson:
    - método de alta ordem;
    - com aproximação em expansão de série de Taylor;
    - explícito;
    - com passo de integração variável, no caso do erro ultrapassar um valor definido, o tempo de integração é reduzido para metade;
    - mais exacto.



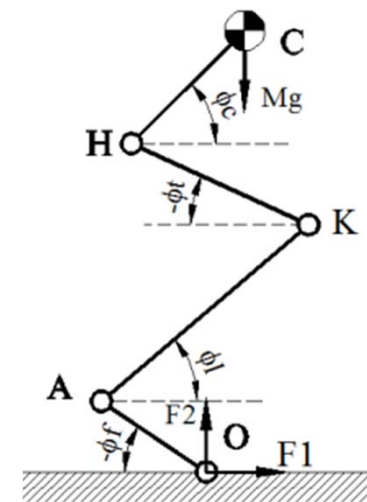
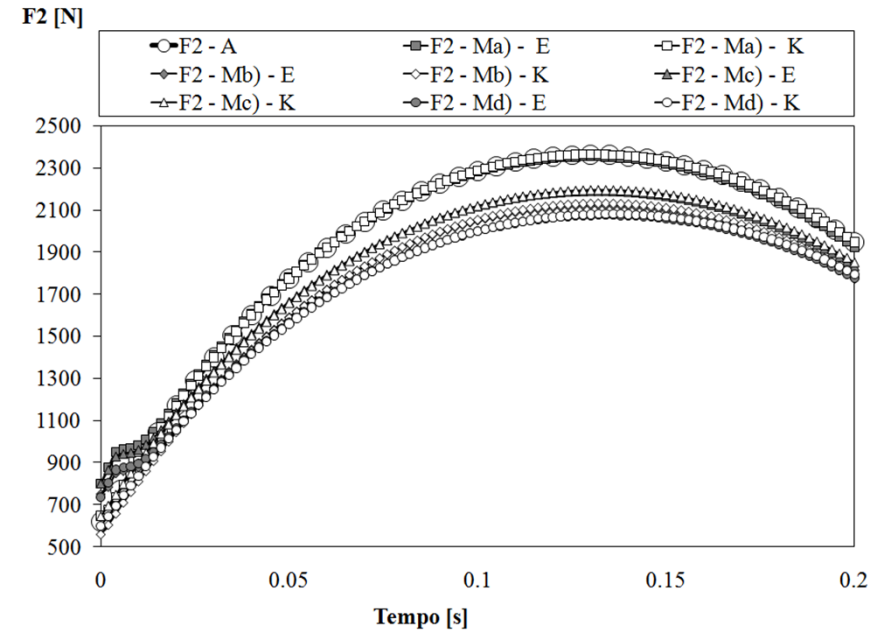
## Cap. 4 – OUTROS ESTUDOS

- Força de reacção horizontal (F1):
  - Solução analítica;
  - Solução para 4 modelos e dois métodos de integração.
- Os resultados numéricos que mais se aproximam da variação analítica são os correspondentes ao modelo a).
- Os resultados do modelo c) subestimam o valor desta componente, enquanto que os resultados dos modelos b) e d) sobrestimam os valores na parte final do movimento.
- Os resultados numéricos obtidos com o método de Euler apresentam perturbações iniciais para todos os modelos.



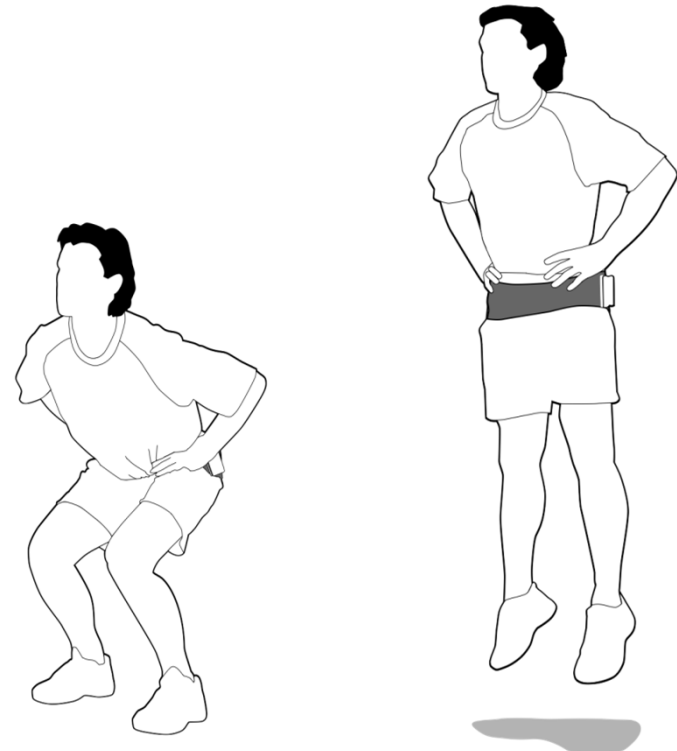
# Cap. 4 – OUTROS ESTUDOS

- Força de reacção vertical(F2):
  - Solução analítica;
  - Solução para 4 modelos e dois métodos de integração.
- Os resultados demonstram que, antes de se iniciar a fase de voo, esta componente apresenta valores inferiores ao valor da força peso do indivíduo, aumentando para valores da ordem de grandeza superior a três vezes o valor da força peso.
- Os resultados numéricos do modelo a) são os mais próximos dos valores analíticos. Todos os outros modelos subestimam o valor de F2.
- Os resultados numéricos obtidos com o método de Euler apresentam perturbações iniciais para todos os modelos.



## Cap. 4 – OUTROS ESTUDOS

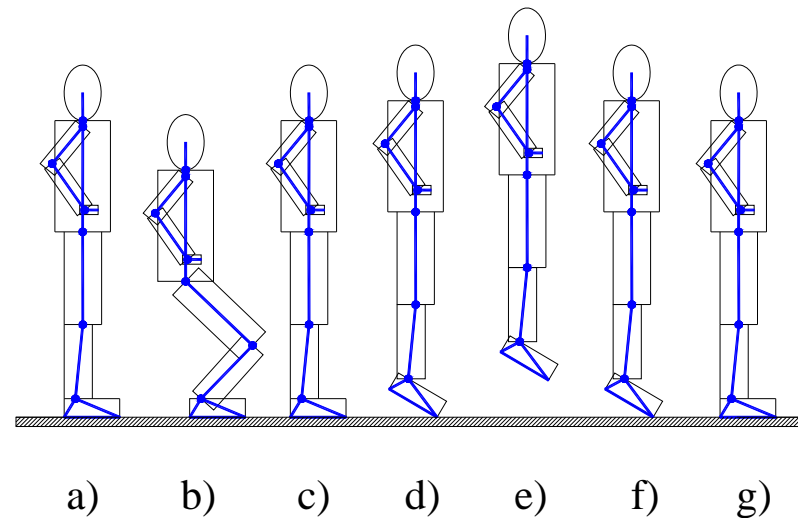
- *Cátia Fidalgo, Célio Cerqueira, Diana Cidre, Diana Barros, Hélder Silva, Paulo A. G. Piloto; “Análise experimental do movimento preparatório de salto em altura”, actas do 3º congresso nacional de biomecânica, pp. 265-270, ISBN 978-989-96100-0-2; CD ISBN: 978-989-96114-0-5; 11-12 de Fevereiro de 2009.*
  - Estudo comparativo do protocolo SJ.
  - Avaliação dos parâmetros cinemáticos e dinâmicos.
  - Avaliação da eficiência do salto SJ.
  - Resultados experimentais com acelerómetro, Myotest.
  - Análise de movimento assistido por vídeo e computador.



## Cap. 4 – OUTROS ESTUDOS

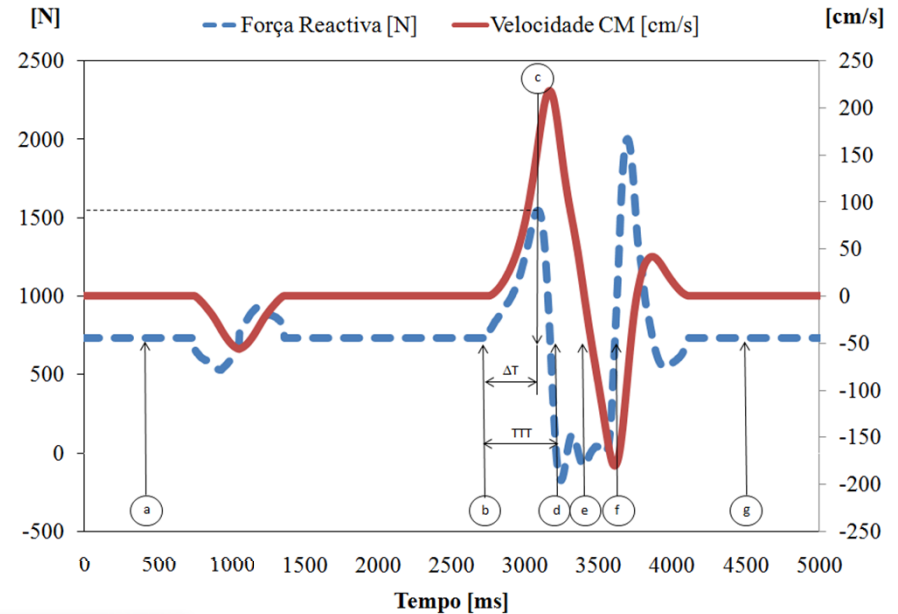
- Posição inicial de cada indivíduo:
  - Planta dos pés no chão;
  - Mãos na cintura;
  - Agachamento inicial ( $A_i$ ).
- O salto SJ “Squat Jump” foi efectuado por 5 indivíduos, amadores, sem preparação inicial.
- A posição de partida é representada pela referência a), o agachamento inicial é representado pela referência b), sendo que as restantes referências, c) a g), são representativas da fase propulsiva, voo, contacto e amortecimento.

Sexo	Ident.	Massa	Comprimento	Idade
[M/F]	[Nº]	[kg]	[m]	[anos]
M	1	62,0	1,66	19
M	2	76,6	1,86	21
F	3	48,6	1,56	19
F	4	64,3	1,63	19
F	5	48,0	1,70	19



# Cap. 4 – OUTROS ESTUDOS

- Foram determinados 2 parâmetros:
  - RFD – Taxa de variação da força propulsiva;
  - TTT- Tempo necessário para a fase a propulsiva.



Freq=200 [Hz]



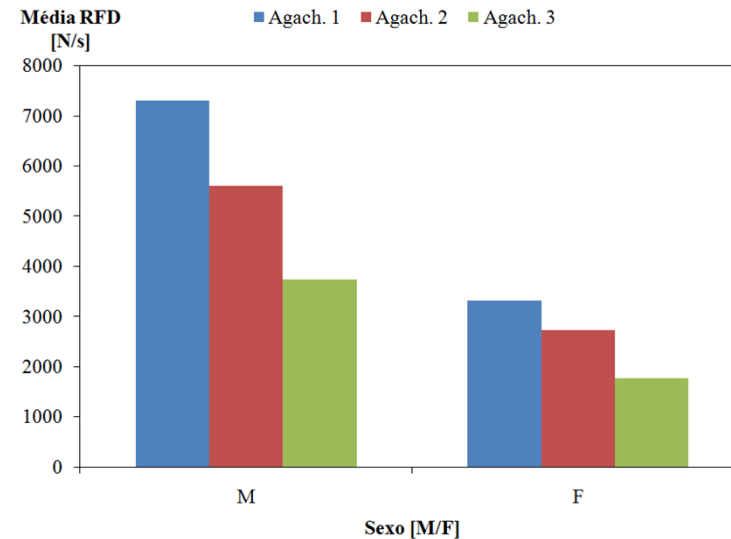
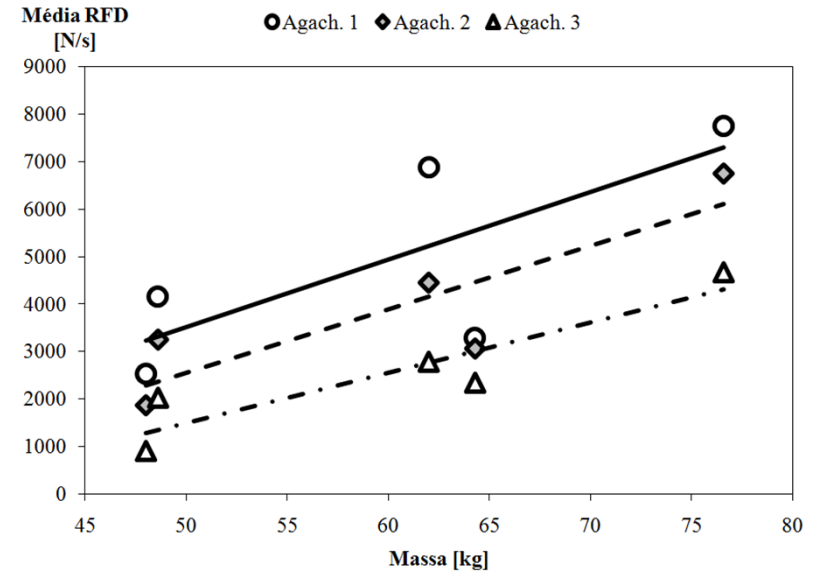
Freq=25 [Hz]

$$RFD = \frac{F_{\max} - F_{weight}}{t_{F_{\max}} - t_{F_{weight}}}$$

$$TTT = t_{F=0} - t_{F=weight}$$

## Cap. 4 – OUTROS ESTUDOS

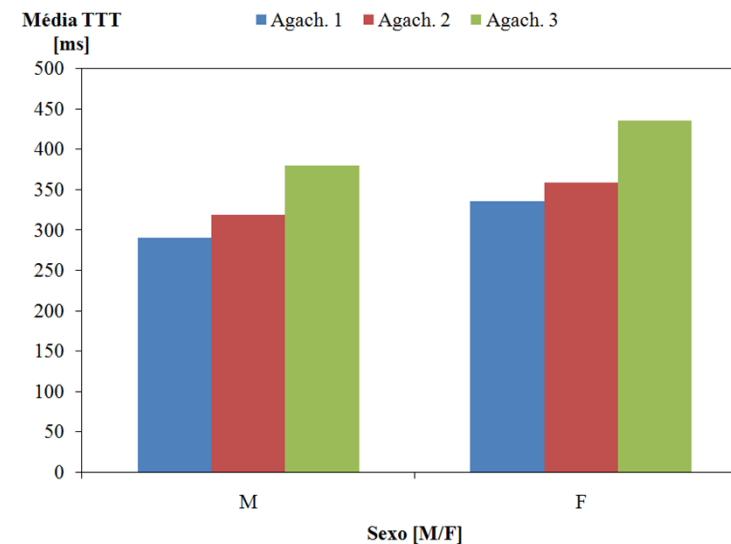
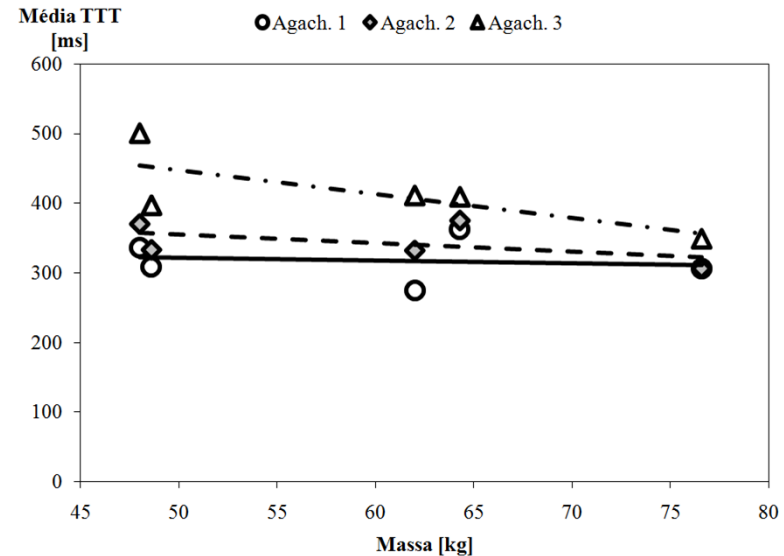
- A figura permite concluir que quanto maior for a massa do indivíduo, maior será o valor deste parâmetro RFD, independentemente do nível de agachamento. Também se pode concluir que a taxa de variação da força propulsiva será tanto maior, quanto menor for o valor do agachamento.
- O grupo do sexo masculino (M) apresenta um valor médio do parâmetro RFD superior ao grupo do sexo feminino (F), independentemente do valor do agachamento inicial. Estes resultados estão de acordo com os trabalhos de investigação desenvolvidos por Karlsson and Belt, (1981) e por Bell and Jacobs, (1986).





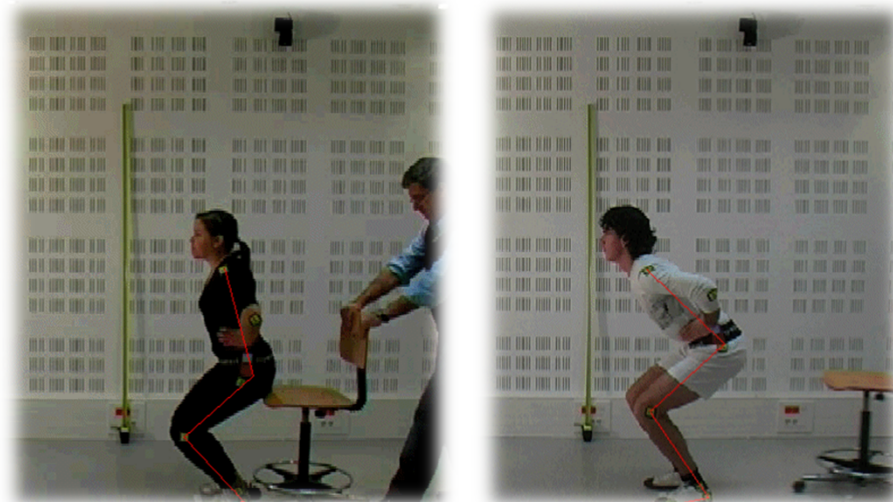
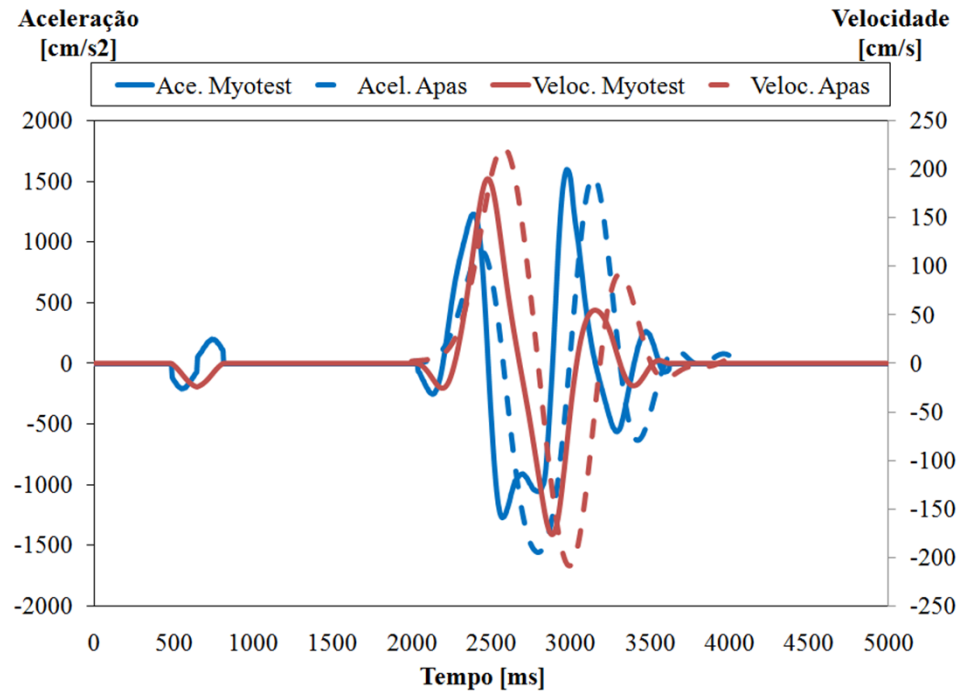
## Cap. 4 – OUTROS ESTUDOS

- A figura permite concluir que este parâmetro é pouco sensível em relação ao valor da massa de cada indivíduo. Também se pode concluir que o valor do tempo necessário para a fase propulsiva será tanto maior, quanto maior for o valor do agachamento inicial.
- A variação do parâmetro TTT para o grupo do sexo feminino é superior ao do grupo masculino, independentemente do nível de agachamento inicial.



## Cap. 4 – OUTROS ESTUDOS

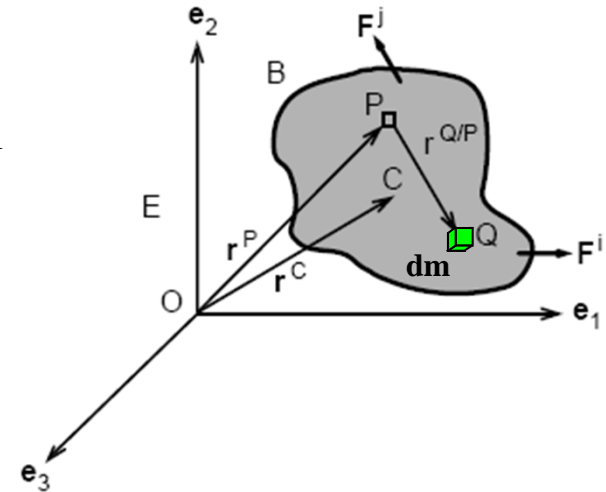
- Os resultados determinados por processamento de imagem confirmam as conclusões obtidas para os parâmetros de eficiência (RFD, TTT), determinados pelo método do acelerômetro.
- As curvas dos parâmetros cinemáticos, velocidade e aceleração, estão muito próximas umas das outras, com variações também semelhantes.



# Cap. 4 – MOMENTO ANGULAR – MATRIZ DE MASSA

- Momento angular de um corpo rígido, em relação a ponto P, do próprio corpo:
  - Considere-se um elemento infinitesimal de massa em ponto genérico.
  - Q representa o centro geométrico do elemento infinitesimal, dm;

$$\vec{H}_P = \int_M P\vec{Q} \times (\vec{v}_Q) dm$$



- Utilização das expressões de Mozzi, para a relação de velocidade entre dois pontos do mesmo corpo:

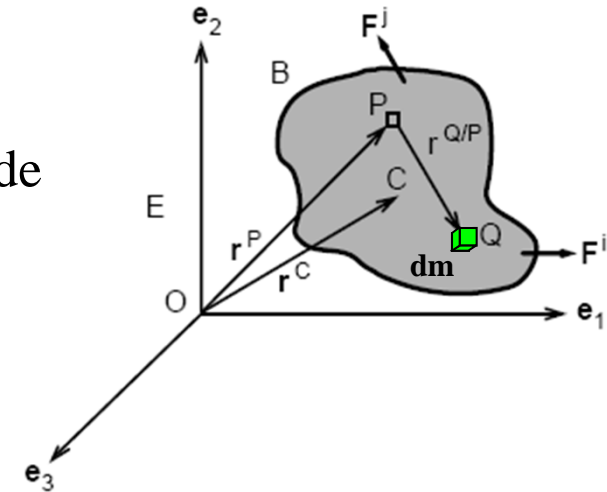
$$\vec{v}_Q = \vec{v}_P + \vec{\omega} \otimes P\vec{Q}$$

# Cap. 4 – MOMENTO ANGULAR – MATRIZ DE MASSA

$$\vec{H}_P = \int_M P\vec{Q} \times (\vec{v}_P + \vec{W} \times P\vec{Q}) dm$$

- Neste integral,  $\mathbf{v}_P$  e  $\mathbf{w}$ , não dependem da variável de integração, embora possam variar com o tempo.
  - podem ser removidos para fora do integral.

$$\vec{H}_P = \int_M P\vec{Q} dm \times (\vec{v}_P) + \int_M P\vec{Q} \times (\vec{W} \times P\vec{Q}) dm$$



- Neste integral, a primeira parcela será nula em dois casos:
  - Caso o ponto P seja fixo (pertença a um eixo fixo de rotação,  $\mathbf{v}_P=0$ );
  - Caso o ponto P seja coincidente com o centro de massa (lembrar definição do cm).
- Nestas condições, substituindo as componentes do vector posição e do vector velocidade angular pelos respectivos valores genéricos :

$$P\vec{Q} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \text{ e } \vec{\omega} = \begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{Bmatrix} \quad \vec{H}_P = \int_M \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} x_3 \omega_2 - x_2 \omega_3 \\ x_1 \omega_3 - x_3 \omega_1 \\ x_2 \omega_1 - x_1 \omega_2 \end{Bmatrix} dm$$

# Cap. 4 – MOMENTO ANGULAR – MATRIZ DE MASSA

- Expressão do momento angular, escrita numa forma matricial dá origem a uma matriz de massa, nos dois casos.

$$\vec{H}_P = \begin{bmatrix} \int_M (x_2^2 + x_3^2) dm & - \int_M (x_1 x_2) dm & - \int_M (x_1 x_3) dm \\ \int_M (x_1^2 + x_3^2) dm & - \int_M (x_2 x_3) dm & \\ \int_M (x_2^2 + x_1^2) dm & & \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{H}_P = [I_P] \vec{w}$$

**Matriz de massa é simétrica:**

- é calculada num ponto, em relação a um sistema de eixo;
- Depende da geometria;
- Depende da distribuição de massa;
- 6 componentes independentes;
- $I_{x_i x_j}$ , designados momentos de inércia;
- $P_{x_i x_j}$ , designados produtos de inércia.

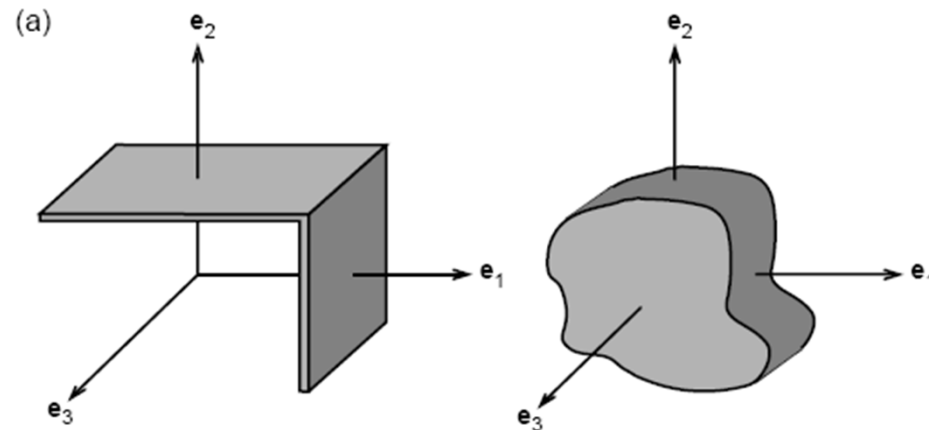
- No caso do movimento ser plano,  $\vec{w} = \langle 0 \quad 0 \quad w_z \rangle$ .

$$\vec{H}_P = \begin{bmatrix} \int_M (x_2^2 + x_3^2) dm & - \int_M (x_1 x_2) dm & - \int_M (x_1 x_3) dm \\ \int_M (x_1^2 + x_3^2) dm & - \int_M (x_2 x_3) dm & \\ \int_M (x_2^2 + x_1^2) dm & & \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ w_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{11} & -P_{12} & -P_{13} \\ -P_{12} & I_{22} & -P_{23} \\ -P_{13} & -P_{23} & I_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ w_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -P_{13} w_3 \\ -P_{23} w_3 \\ I_{33} w_3 \end{Bmatrix}$$

# Cap. 4 – MOMENTO ANGULAR

- No caso de movimento plano ocorrer num plano de simetria:

$$\vec{H}_P = \begin{bmatrix} I_{11} & -P_{12} & 0 \\ -P_{12} & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ w_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{33} w_z \end{Bmatrix}$$



# Cap. 4 – MATRIZ DE MASSA

- Momentos de inércia:

- significado físico: quantificam a maior ou menor dificuldade de rotação do corpo em relação aos eixos em consideração.

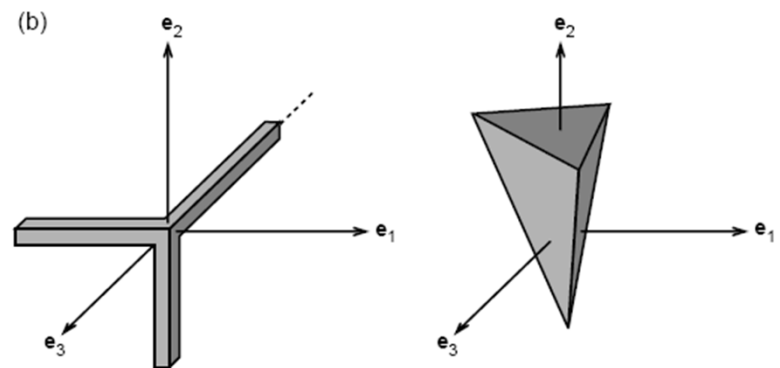
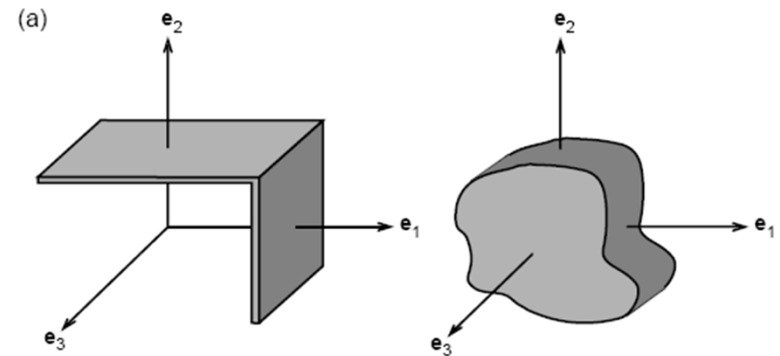
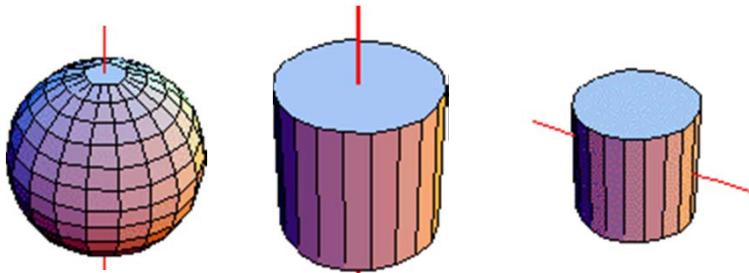
$$I_{11} = \int_M (x_2^2 + x_3^2) dm$$

$$I_{22} = \int_M (x_1^2 + x_3^2) dm$$

$$I_{33} = \int_M (x_1^2 + x_2^2) dm$$

- Produtos de inércia:

- significado físico: quantificam a distribuição da massa em relação aos sistemas de eixo.
- tomam valores nulos, quando um dos eixos for de simetria.



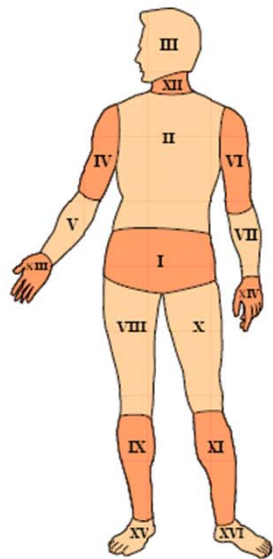
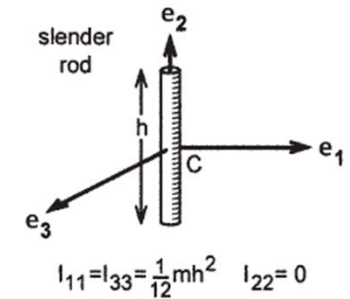
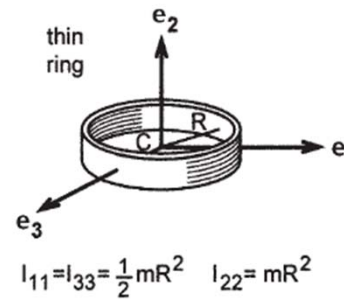
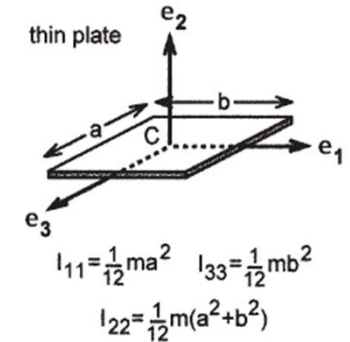
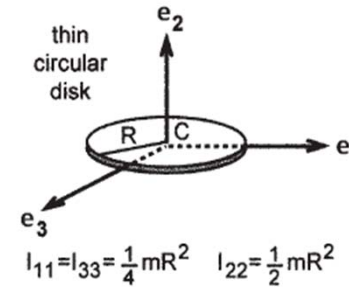
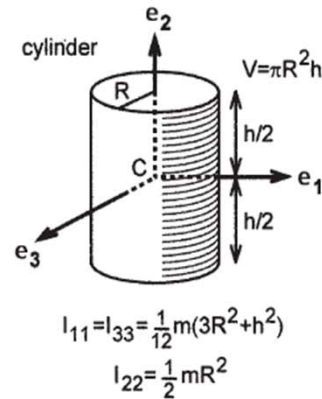
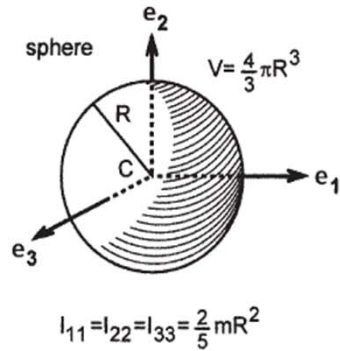
$$P_{12} = \int_M (x_1 \times x_2) dm$$

$$P_{13} = \int_M (x_1 \times x_3) dm$$

$$P_{23} = \int_M (x_2 \times x_3) dm$$

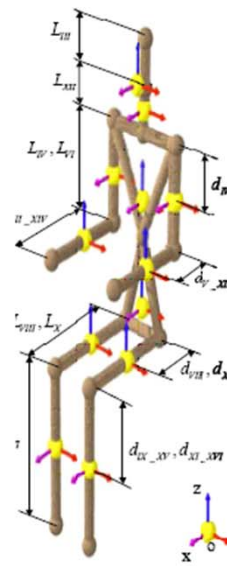
# Cap. 4 – MATRIZ DE MASSA – CORPOS ELEMENTARES

- Características de massa de corpos elementares.

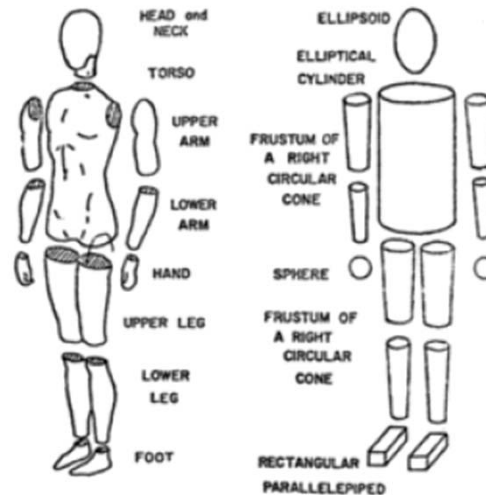


Segmentos Anatómicos

Miguel Silva, IST



Antropometria e topologia

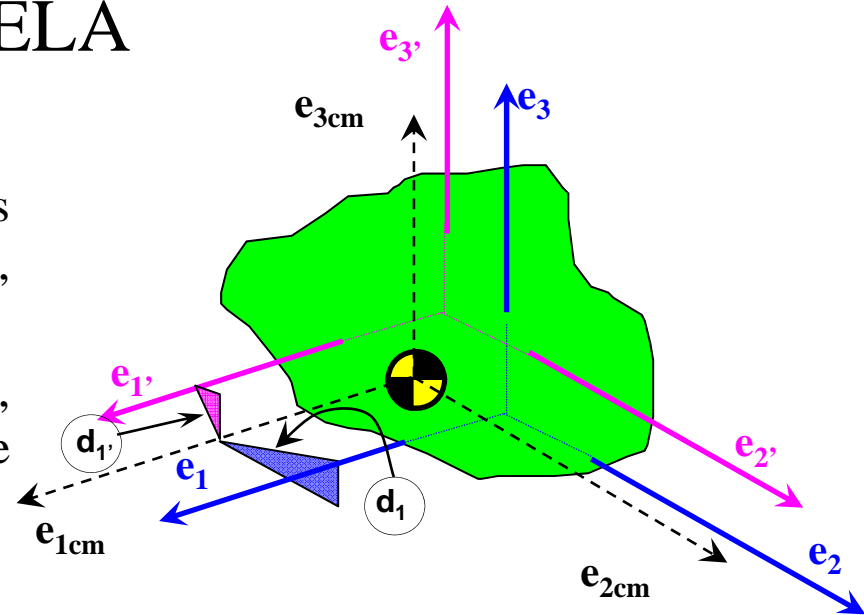


Modelo Antropométrico de Whitsett



# Cap. 4 – MATRIZ DE MASSA – TRANSPOSIÇÃO PARALELA

- Teorema dos eixos paralelos (Steiner):
  - Estabelece a relação para as componentes da matriz, em relação a pontos diferentes, mantendo o paralelismo dos eixos.
  - Os valores das componentes são mínimos, quando calculados em relação ao centro de massa.



$$I_{11} = I_{1cm1cm} + M \times d_1^2 \quad P_{12} = P_{1cm2cm} + M \times (\bar{x}_1 \times \bar{x}_2)$$

$$I_{1'1'} = I_{1cm1cm} + M \times d_1'^2 \quad P_{1'2'} = P_{1cm2cm} + M \times (\bar{x}_1' \times \bar{x}_2')$$

- Demonstração:

$$x_1 = x_1' + \bar{x}_1$$

$$x_2 = x_2' + \bar{x}_2$$

$$x_3 = x_3' + \bar{x}_3$$

$$P_{12} = \int_M x_1 x_2 dm$$

$$P_{12} = \int_M (x_1' + \bar{x}_1) \times (x_2' + \bar{x}_2) dm = \int_M x_1' x_2' dm + \int_M x_1' \bar{x}_2 dm + \int_M \bar{x}_1 x_2' dm + \int_M \bar{x}_1 \bar{x}_2 dm$$

$\begin{matrix} \nearrow =0 \\ \nearrow =0 \end{matrix}$



Jacob Steiner (1796-1863)

$$[I_{O'}]_{S'} = \begin{bmatrix} I_{11} & -P_{12} & -P_{13} \\ -P_{12} & I_{22} & -P_{23} \\ -P_{13} & -P_{23} & I_{33} \end{bmatrix}_{S'} - M \begin{bmatrix} (\bar{x}_2^2 + \bar{x}_3^2) & \dots & -(\bar{x}_1 \times \bar{x}_2) \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} + M \begin{bmatrix} (\bar{x}_2^2 + \bar{x}_3^2) & \dots & (\bar{x}_1' \times \bar{x}_2') \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

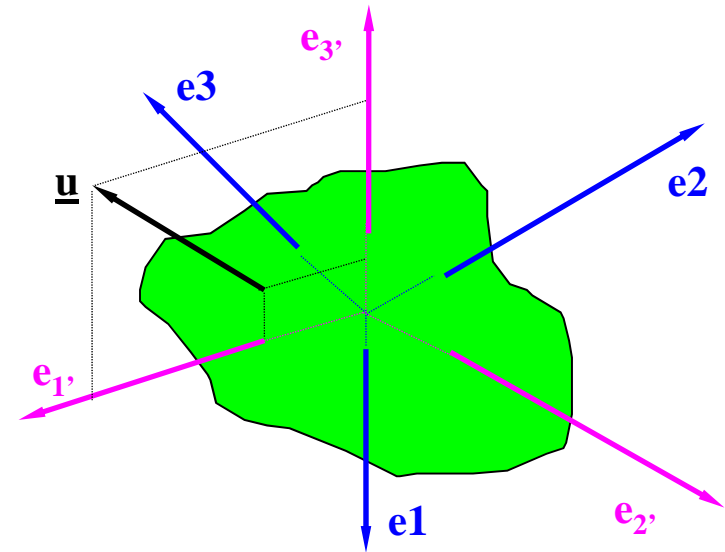
# Cap. 4 – MATRIZ DE MASSA – TRANSPOSIÇÃO POR ROTAÇÃO

- Rotação de um referencial.
  - Na representação de um vector será necessário determinar a matriz de transformação entre os dois sistemas.

$$\vec{u}|_{S'} = [T_{S \rightarrow S'}] \cdot \vec{u}|_S$$

$$T_{S \rightarrow S'} = \begin{bmatrix} \cos(e_1, e_{1'}) & \cos(e_2, e_{1'}) & \cos(e_3, e_{1'}) \\ \cos(e_1, e_{2'}) & \cos(e_2, e_{2'}) & \cos(e_3, e_{2'}) \\ \cos(e_1, e_{3'}) & \cos(e_2, e_{3'}) & \cos(e_3, e_{3'}) \end{bmatrix}$$

$\uparrow \qquad \qquad \uparrow \qquad \qquad \uparrow$   
 $e_i$  projectado em  $S'$



- Como a matriz é ortogonal:

$$[T_{S \rightarrow S'}] = [T_{S' \rightarrow S}]^t$$

- Âmbito de aplicação possível:

$$\vec{H}_O|_{S'} = [T_{S \rightarrow S'}] \cdot \vec{H}_O|_S$$

# Cap. 4 – MOMENTO ANGULAR – EQUI. DINÂMICO

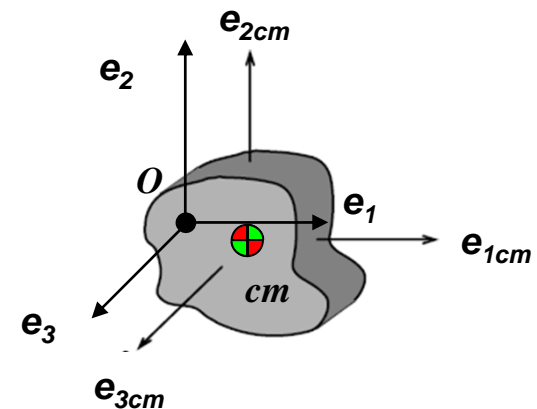
- Equilíbrio dinâmico de momentos, em relação a um ponto fixo “O” ou em relação ao centro de massa “CM”:

$$\frac{d\vec{H}_O}{dt} = \sum \vec{M}_O \qquad \frac{d\vec{H}_{CM}}{dt} = \sum \vec{M}_{CM}$$

- No caso de um movimento plano de um corpo rígido (simétrico em relação ao plano do movimento):

$$\vec{H}_O = \begin{bmatrix} I_{11} & -P_{12} & 0 \\ -P_{12} & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{33}\omega_3 \end{bmatrix}$$

$$\vec{H}_{CM} = \begin{bmatrix} I_{1cm1cm} & -P_{1cm2cm} & 0 \\ -P_{1cm2cm} & I_{2cm2cm} & 0 \\ 0 & 0 & I_{3cm3cm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{3cm3cm}\omega_3 \end{bmatrix}$$



- A derivada do momento angular deve ter em consideração o estado do sistema de eixo (parado ou a acompanhar o movimento do corpo).
  - No caso de estar parado, o valor do momento de inércia poderá variar com o tempo.
- Admitindo que a inércia não varia com o tempo (movimento plano):

$$I_{33}\dot{\omega}_3 \vec{e}_3 = \sum \vec{M}_O \qquad I_{3cm3cm}\dot{\omega}_3 \vec{e}_3 = \sum \vec{M}_{CM}$$

# Cap. 4 – EQUILÍBRIO DINÂMICO DE CORPOS

- Equações a utilizar (movimento plano):

$$\sum \vec{F} = m \vec{a}_{cm}$$

$$\sum \vec{M}_{CM} = I_{3cm3cm} \dot{\omega}_3 \vec{e}_3$$

- A massa é uma medida da resistência de um corpo para um movimento uniformemente acelerado;
- O momento de inércia é uma medida da resistência de um corpo para uma alteração da velocidade de rotação;
- A força resultante, F, determina a trajectória do centro de massa;
- O momento resultante, M, será responsável pela alteração da velocidade angular.

## Cap. 4 – EXEMPLO 4.4

- Determine as equações do movimento do corpo circular que se encontra a rodar em torno de um ponto fixo “O”. O corpo possui massa “m” e raio “R”.
- Determine ainda as reacções dinâmicas no apoio.

- **Desenhar diagrama de corpo livre.**

- Forças de ligação;
- Força externa gravítica.

- **Análise cinemática – determinação da aceleração no centro de gravidade.**

$$\vec{r}_{cm} = R \sin \phi \vec{e}_1 - R \cos \phi \vec{e}_2$$

$$\vec{v}_{cm} = R \dot{\phi} \cos \phi \vec{e}_1 + R \dot{\phi} \sin \phi \vec{e}_2$$

$$\vec{a}_{cm} = R[\ddot{\phi} \cos \phi - \dot{\phi}^2 \sin \phi] \vec{e}_1 + R[\ddot{\phi} \sin \phi + \dot{\phi}^2 \cos \phi] \vec{e}_2$$

- **Geometria de massas ( $I_{33}$  não varia com tempo, mesmo com sistema fixo):**

$$I_o = I_{CM} + md^2 = \frac{1}{2}mR^2 + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2$$

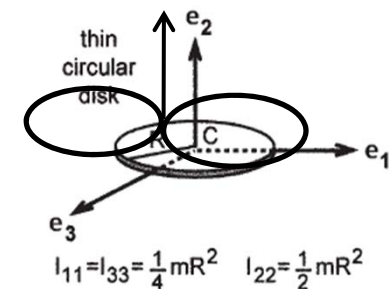
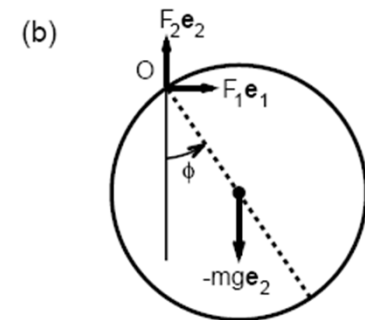
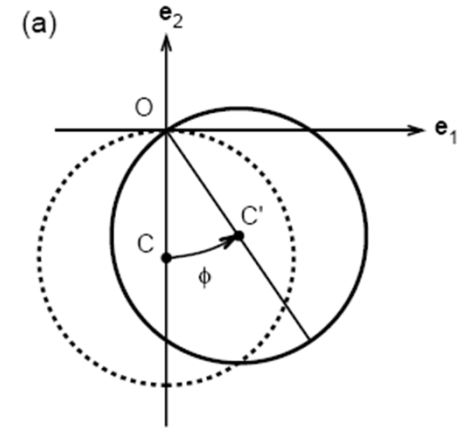
- **Equações a aplicar:**

$$\sum \vec{F} = m \vec{a}_{cm} \Leftrightarrow F_1 \vec{e}_1 + F_2 \vec{e}_2 = m \vec{a}_{cm}$$

Nota 1: Depois da resolução da equação do movimento, determinam-se as forças reactivas.

$$\sum \vec{M}_O = I_{33} \dot{\omega}_3 \vec{e}_3 \Leftrightarrow -mg R \sin \phi \vec{e}_3 = \frac{3}{2}mR^2 \ddot{\phi} \vec{e}_3$$

Nota 2: Eq. diferencial do movimento. A sua resolução depende das condições iniciais.



# Cap. 4 – APLICAÇÃO NA DINÂMICA HUMANA (EXEMPLO 4.7)

- Determine a velocidade angular no instante correspondente à posição representada em (d), sabendo que a velocidade angular de saída vale  $w_{(b)} = 2\pi \text{ [rad / s]}$ . O valor do momento de inércia do atleta na posição (b) vale  $134 \text{ [lb in s}^2\text{]}$  e na posição (d) vale  $34 \text{ [lb in s}^2\text{]}$ .

$$\sum \vec{M}_{cm} = \vec{0} = \frac{d\vec{H}_{cm}}{dt}$$

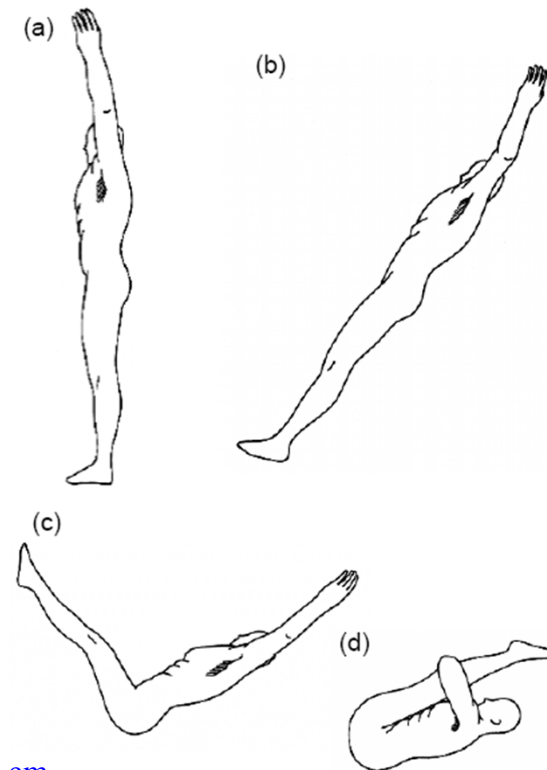
Nota 1: Conservação do momento angular, pelo que  $H_{cm(c)}$  é igual ao valor no instante correspondente a (d).

$$\vec{H}_{cm(b)} = \vec{H}_{cm(d)} \Leftrightarrow I_{cm(b)} w_{3(b)} \vec{e}_3 = I_{cm(d)} w_{3(d)} \vec{e}_3$$

$$\Leftrightarrow w_{3(d)} \vec{e}_3 = -24.75 \vec{e}_3$$

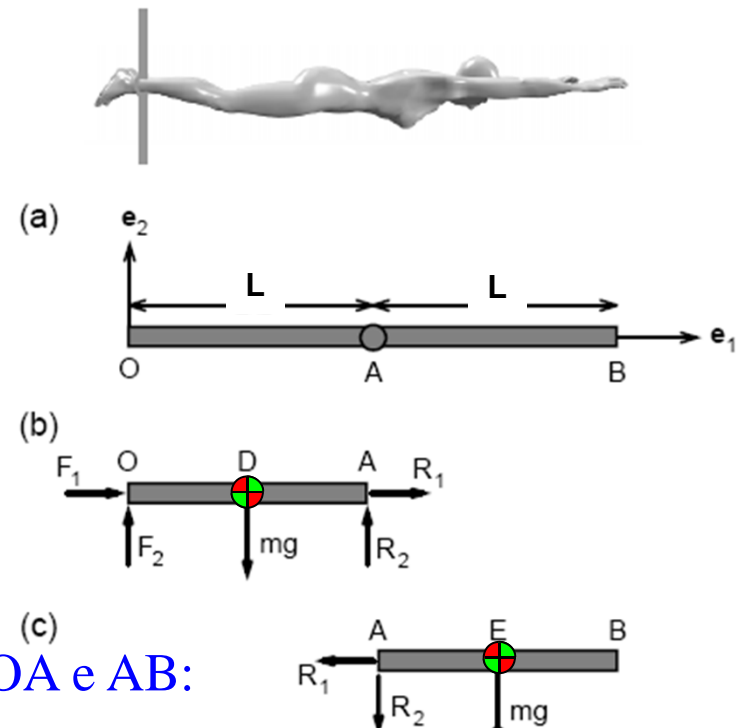
Nota 2: De acordo com o resultado, a velocidade em (d) quadruplica em relação à posição (b).

Nota 3: Neste tipo de desporto, o momento angular é definido na partida, mantendo-se constante até o atleta entrar na água.



# Cap. 4 – APLICAÇÃO NA DINÂMICA HUMANA (EXEMPLO 4.8)

- Num atleta de ginástica com argolas, de massa  $2m$  e comprimento  $2L$ , os pés encontram-se articulados no equipamento desportivo. O ginasta é libertado do repouso, na sua posição horizontal, sendo modelado por duas barras articuladas em “O” e em “A”.
- Determine a aceleração angular dos segmentos OA e AB.
- Verifique como se comporta o corpo do atleta.



- Estabelecimento dos diagramas de corpo rígido OA e AB:
- Aplicação da 3ª lei de Newton, na zona de articulação dos dois segmentos.
- Total de seis incógnitas,  $F_1, F_2, R_1, R_2, \alpha_{OA}$  e  $\alpha_{AB}$ .

$$\sum \vec{F} = m \vec{a}_{cm}$$

$$\sum \vec{M}_{CM} = I_{3cm3cm} \dot{\omega}_3 \vec{e}_3$$

# Cap. 4 – APLICAÇÃO NA DINÂMICA HUMANA (EXEMPLO 4.8)

- Determinação da aceleração angular do centro de massa do segmento OA, no instante inicial, (t=0)

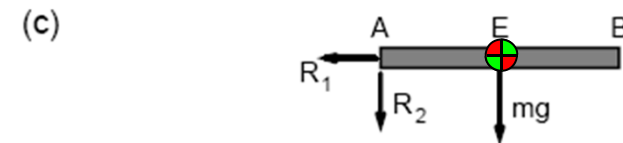
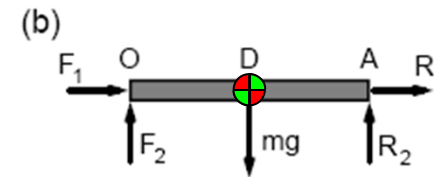
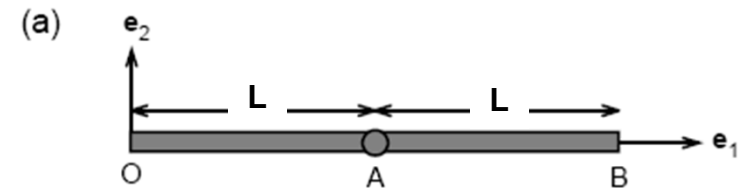
$$\begin{aligned}\vec{a}_D &= \vec{a}_O + \dot{\vec{w}}_{OA} \times O\vec{A} + \vec{w}_{OA} \times (\vec{w}_{OA} \times O\vec{A}) \\ &= \vec{0} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{w}_{OA} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} L/2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - w_{OA}^2 \begin{Bmatrix} L/2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -w_{OA}^2 L/2 \\ \dot{w}_{OA} L/2 \\ 0 \end{Bmatrix}\end{aligned}$$

- Sendo o corpo libertado do repouso, todas as velocidades são nulas.

$$\vec{a}_D = \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{w}_{OA} L/2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

- Determinação da aceleração angular do centro de massa do segmento AB, no instante inicial, (t=0), considerando velocidade angular de AB, também, nula.

$$\begin{aligned}\vec{a}_E &= \vec{a}_A + \dot{\vec{w}}_{AB} \times A\vec{E} + \vec{w}_{AB} \times (\vec{w}_{AB} \times A\vec{E}) \\ &= \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{w}_{OA} L \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{w}_{AB} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} L/2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - w_{AB}^2 \begin{Bmatrix} L/2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -w_{AB}^2 L/2 \\ \dot{w}_{OA} L + \dot{w}_{AB} L/2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{w}_{OA} L + \dot{w}_{AB} L/2 \\ 0 \end{Bmatrix}\end{aligned}$$





# Cap. 4 – APLICAÇÃO NA DINÂMICA HUMANA (EXEMPLO 4.8)

- Equação do movimento do centro de massa, para os dois segmentos:

$$\sum \vec{F} = m \vec{a}_{cm} \Leftrightarrow \begin{cases} F_1 + R_1 = m \times 0 \\ F_2 + R_2 - mg = m\dot{\omega}_{OA}L/2 \end{cases}$$

$$\sum \vec{F} = m \vec{a}_{cm} \Leftrightarrow \begin{cases} -R_1 = m \times 0 \\ -R_2 - mg = m\dot{\omega}_{OA}L + m\dot{\omega}_{AB}L/2 \end{cases}$$

- Equação do momento equilíbrio do momento angular:

$$\sum \vec{M}_O = I_{33}\dot{\omega}_3 \vec{e}_3 \Leftrightarrow -mgL/2 + R_2L = (1/3mL^2)\dot{\omega}_{OA}$$

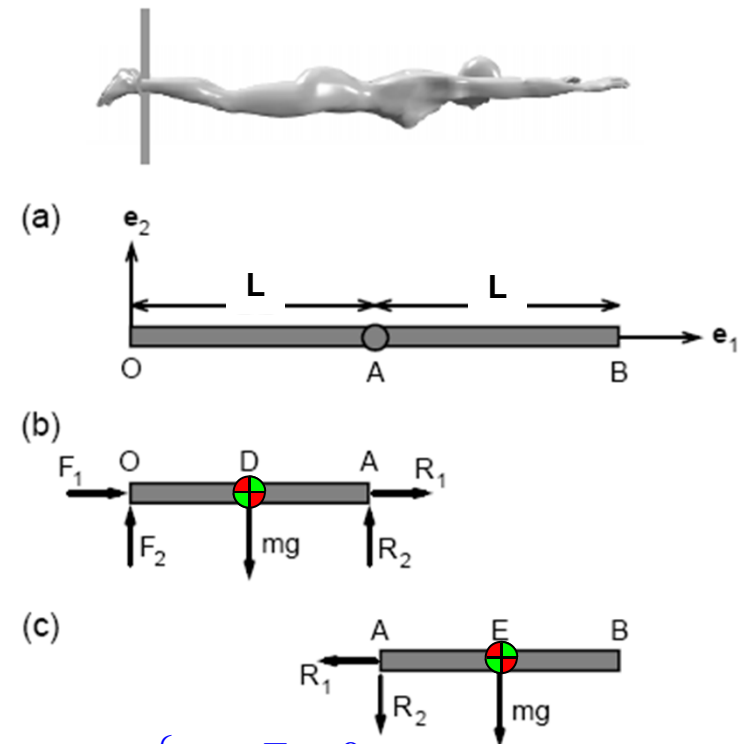
$$\sum \vec{M}_{cm} = I_{3cm3cm}\dot{\omega}_3 \vec{e}_3 \Leftrightarrow R_2L/2 = (1/12mL^2)\dot{\omega}_{AB}$$

- Solução para o instante fotográfico representado:

$$\dot{\omega}_{OA} = -9g/7L$$

$$\dot{\omega}_{AB} = 3g/7L$$

- O atleta começa por rodar as pernas no sentido dos ponteiros, enquanto que o tronco rodará no sentido contrário, necessitando utilizar músculos abdominais para se manter na posição de alinhado.

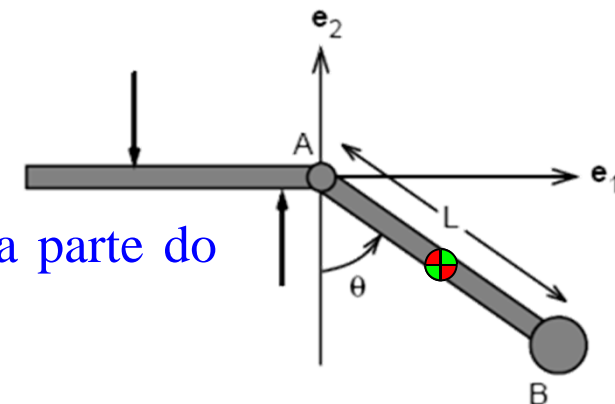
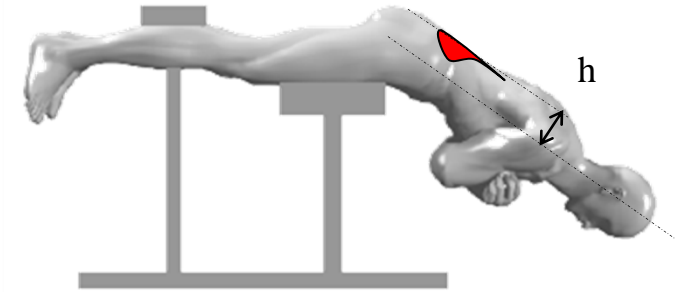


$$\Rightarrow \begin{cases} F_1 = 0 \\ F_2 = (4/14)mg \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} R_1 = 0 \\ R_2 = (1/14)mg \end{cases}$$

# Cap. 4 – APLICAÇÃO NA DINÂMICA HUMANA (EXEMPLO 4.9)

- O atleta representado utiliza um sistema especial para flectir o tronco na posição horizontal. O movimento oscila entre a posição representada e a posição horizontal.
- Assumindo que o músculo traseiro “erector spinae” é o único envolvido no movimento, determine a força muscular em função da posição do tronco  $\theta=45^\circ$ , considerando  $m=34$  [kg],  $L=0.9$  [m],  $h=0.06$  [m] e  $\alpha=2$  [rad/s<sup>2</sup>].

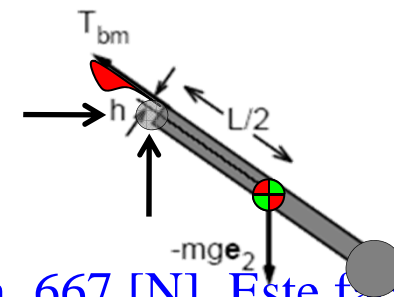


- Estabelecimento do diagrama de corpo livre, para parte do segmento anatómico, de comprimento L.
- Tbm, representa a força muscular.
- Equação do momento equilíbrio do momento angular:

$$\sum \vec{M}_A = I_{33} \dot{\omega}_3 \vec{e}_3 \Leftrightarrow -mgL/2 \sin \theta + T_{bm} \times h = (1/3mL^2) \dot{\omega}_{AB}$$

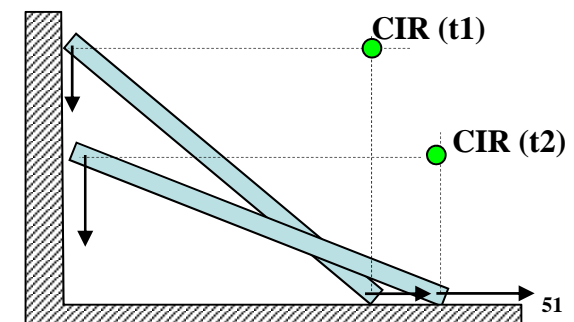
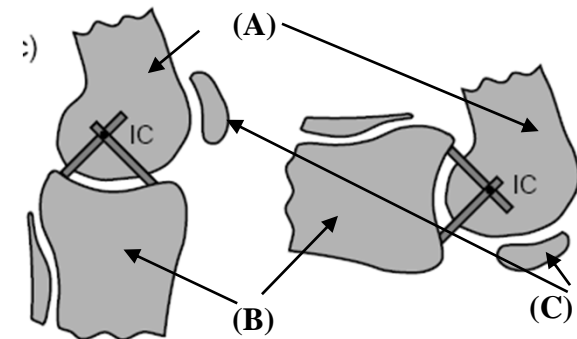
$$T_{bm} = \frac{m}{h} [gL/2 \sin \theta + L^2 / 3 \dot{\omega}_{AB}] = 2074 [N]$$

- A força exercida pelo músculo é superior ao peso do atleta, 667 [N]. Este facto deve-se ao pequeno valor do braço da força do músculo em relação ao ponto A ( $h=0.06$  [m]).



## Cap. 4 – CENTRO INSTANTÂNEO DE ROTAÇÃO

- O joelho humano representa uma junta múltipla, na qual o fêmur da coxa (A) se relaciona com a tíbia da perna (B) e com a patela (rótula) (C).
- No movimento desta rótula, o eixo de rotação sofre alterações de posição, fazendo aparecer o conceito de centro instantâneo de rotação (CIR).
- A localização do CIR pode ser determinada, em cada instante de tempo, através da velocidade linear de quaisquer dois pontos.
- O CIR é caracterizado pelo facto de possuir velocidade linear nula, em cada instante.
- A velocidade em qualquer outro ponto do corpo é proporcional à distância em relação ao CIR.
- O CIR, na junta do joelho, coincide com a intersecção dos ligamentos. Estes são considerados com elevada rigidez, dificilmente alteram o seu comprimento, pelo que as velocidades dos pontos de origem e de inserção mantêm-se perpendiculares aos ligamentos.



## Cap. 4 – CENTRO INSTANTÂNEO DE ROTAÇÃO

- As trajetórias do CIR, obtidas no movimento relativo da tíbia em relação ao fêmur e no movimento relativo contrário, definem arcos chamados “polodes”. Estas duas curvas ajudam a identificar situações anómalas de instabilidade do joelho.
- Num joelho normal, os arcos de CIR dão origem a uma curva compacta em relação a um ponto. Na prática, o centro destes arcos é utilizado como centro de rotação da junta.
- Para mais informações, consultar:
  - Kento R. Kaufman; Kai-Nan An; “*Joint- Articulating Surface Motion*”; Bronzino, 1995.

