

# Cap.5 – ESTÁTICA

- Equações de equilíbrio estático**

O movimento de um corpo é função das equações:

$$\sum \vec{F} = m \vec{a}^c$$

$$\sum \vec{M}^0 = d\vec{H}^0 / dt$$

Em que  $m$  é a massa do corpo,  $F$  as forças que actuam no corpo, e  $a^c$  é a aceleração no seu centro de massa.  $M$  é a resultante do momento. O princípio da conservação do momento em relação a um ponto é:

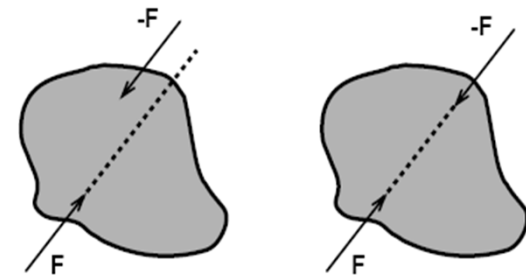
$$\vec{H}^0 = \int \vec{r} \times \vec{v} dm$$

em que  $r$  é a posição e  $v$  a velocidade do elemento de massa.

A aceleração do centro de massa é nula quando o corpo está em repouso ou em movimento constante.

Assim as **equações de equilíbrio estático** são:

$\sum \vec{F} = \vec{0}$ $\sum \vec{M}_o = \vec{0}$	$\Leftrightarrow$	$\sum F_x = 0$	$\sum F_y = 0$	$\sum F_z = 0$
		$\sum M_x = 0$	$\sum M_y = 0$	$\sum M_z = 0$



Para que exista equilíbrio, as forças devem possuir a mesma magnitude, direcção oposta e a mesma linha de acção.

# Cap.5 – ESTÁTICA

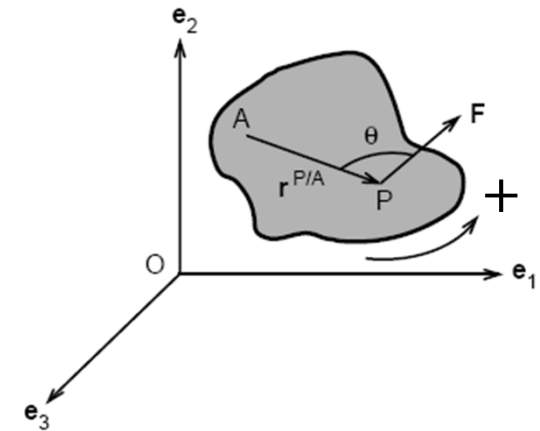
- Equações de equilíbrio estático**

O momento criado por uma força externa é definido como:

$$\vec{M}_A = \vec{r}^{P/A} \times \vec{F} = \vec{A}P \times \vec{F}_P$$

O produto desta relação produz um momento perpendicular ao plano da força e do vector posição, que vale:  $\|\vec{M}_A\| = r^{P/A} F \sin \theta$

$r^{P/A}$  é o vector que liga o ponto onde vai ser calculado o momento e qualquer ponto da linha de acção da força.



Por vezes a notação vectorial (**produto vectorial**) pode ser útil na determinação do momento:

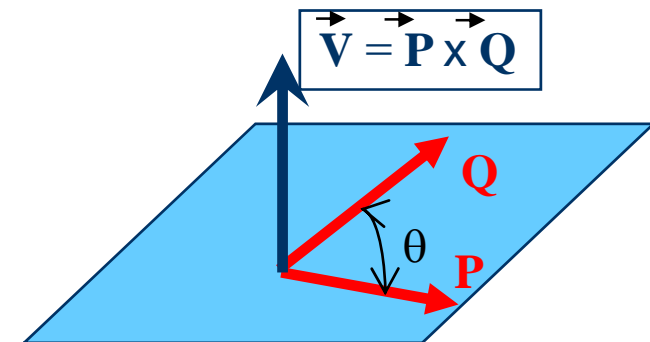
$$\vec{V} = \vec{P} \otimes \vec{Q}$$

$$\vec{V} = \vec{P} \otimes \vec{Q} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} = V_x \mathbf{i} + V_y \mathbf{j} + V_z \mathbf{k}$$

$$V_x = P_y Q_z - P_z Q_y$$

$$V_y = P_z Q_x - P_x Q_z$$

$$V_z = P_x Q_y - P_y Q_x$$



$$\mathbf{P} = P_x \mathbf{i} + P_y \mathbf{j} + P_z \mathbf{k}$$

$$\mathbf{Q} = Q_x \mathbf{i} + Q_y \mathbf{j} + Q_z \mathbf{k}$$

# Cap.5 – ESTÁTICA

- **Equações de equilíbrio estático:**  
**Momento no braço**

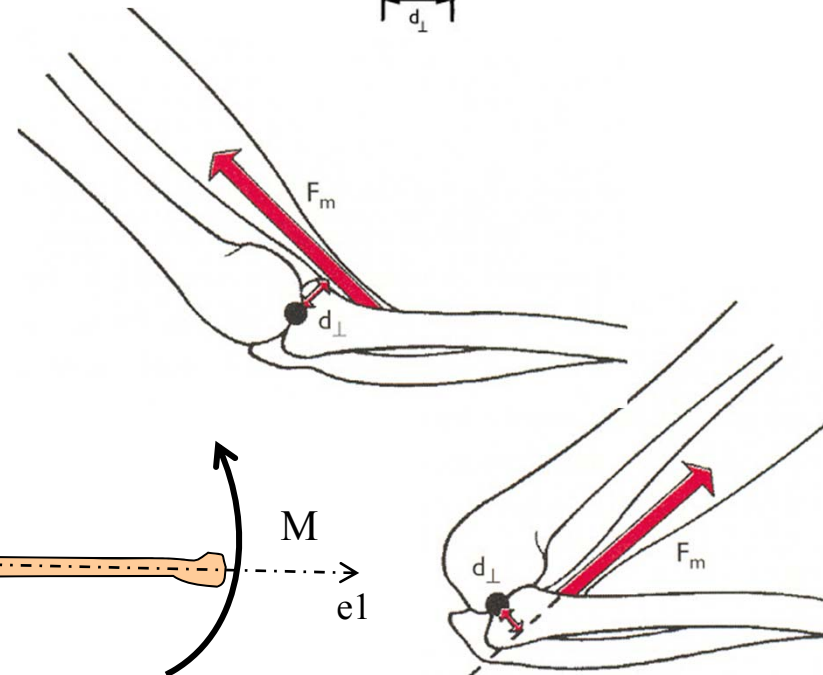
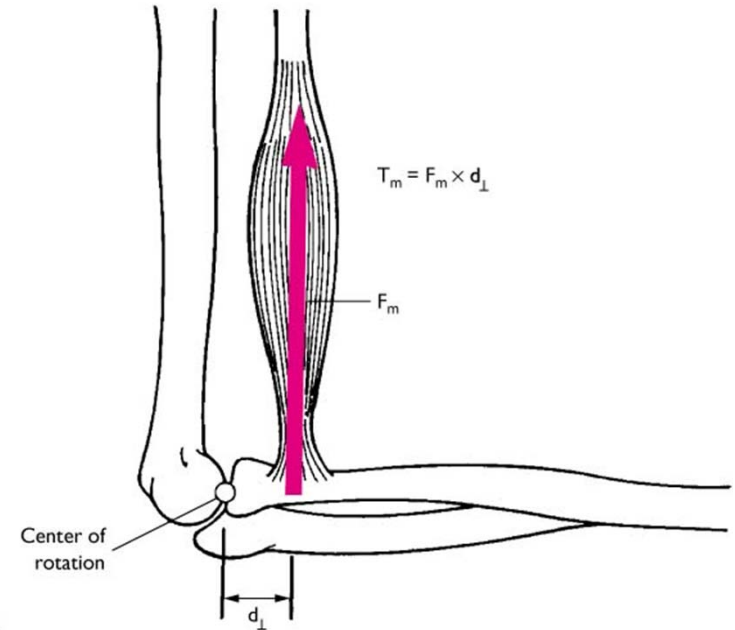
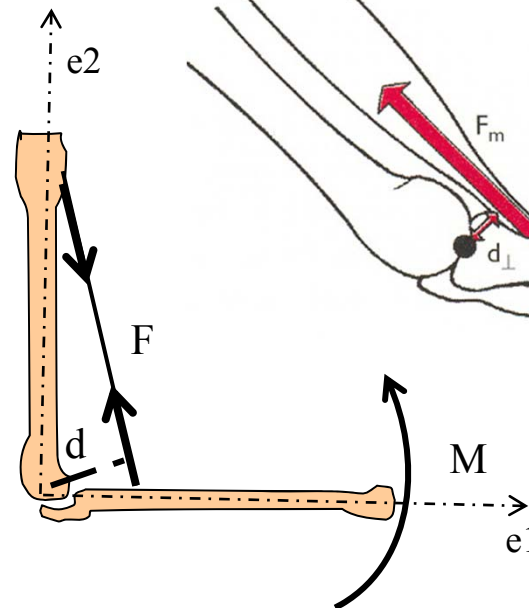
O momento do músculo do braço é perpendicular à distância entre a linha do músculo e o centro da articulação. O maior momento corresponde a uma posição angular da força de 90°.

Sentido:

“counterclockwise” (+)  
anti-horário

“clockwise” (-)  
horário

$$M = F \cdot d_{\perp} \text{ [N.m]}$$



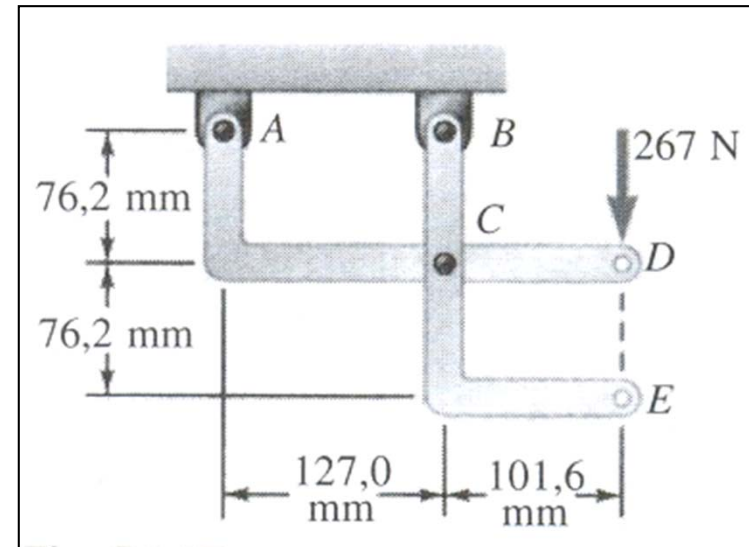
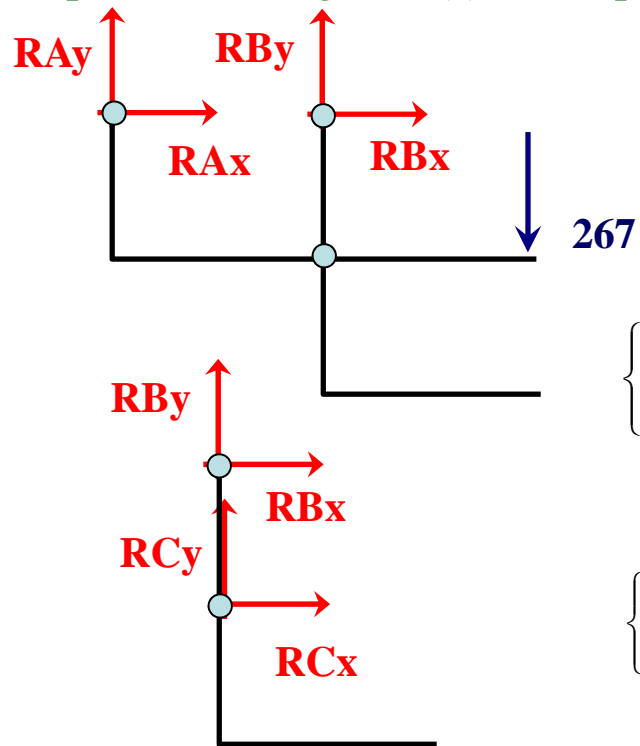
# Cap.5 – ESTÁTICA

## Exercício 5.1

### Sistema estrutural

Determine as componentes rectangulares das reacções em A e B do sistema representado, se for aplicada uma força de 267 [N] em D.

1º representar diagrama(s) de corpo livre.



2º estabelecer equações de equilíbrio.

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum \vec{F} = \vec{0} \\ \sum \vec{M} = \vec{0} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_{PQ}^z = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} RA_x + RB_x = 0 \\ RA_y + RB_y - 267 = 0 \\ 127 \times RB_y - 267 \times 228,6 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} RA_x + RB_x = 0 \\ RA_y = -213 [N] \\ RB_y = 480,6 [N] \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum \vec{F} = \vec{0} \\ \sum \vec{M} = \vec{0} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_{PQ}^z = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} RC_x + RB_x = 0 \\ RC_y + RB_y = 0 \\ 76,2 \times RC_x = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} RB_x = 0 \\ RC_y = -480,6 [N] \\ RC_x = 0 [N] \end{array} \right.$$

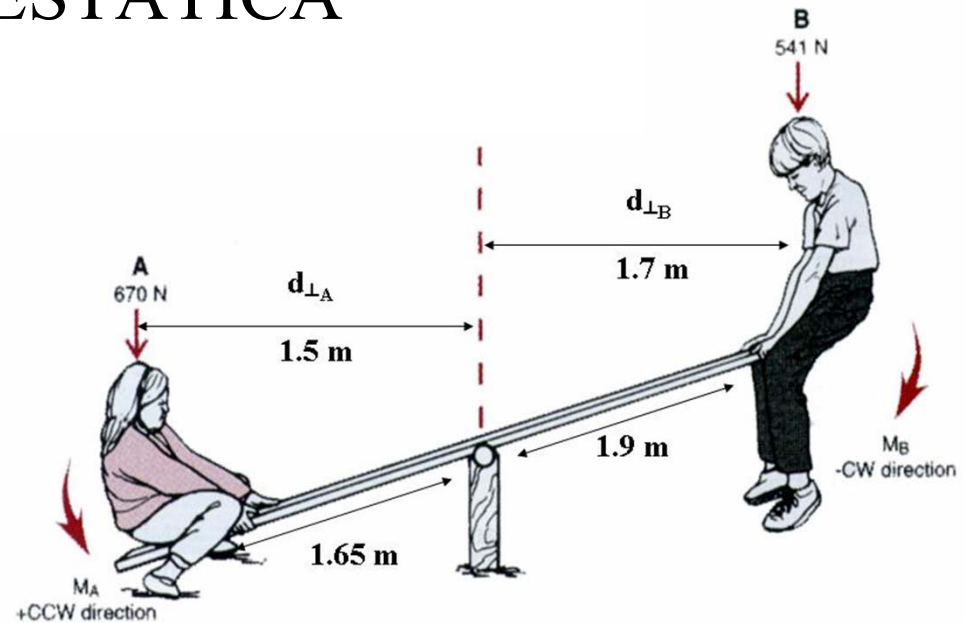
**Solução:  $RA_x=RB_x=0$ ;  $RA_y=-213 [N]$ ,  $RBy=480,6 [N]$ .**

# Cap.5 – ESTÁTICA

- **Exercício 5.2**

Um balancé

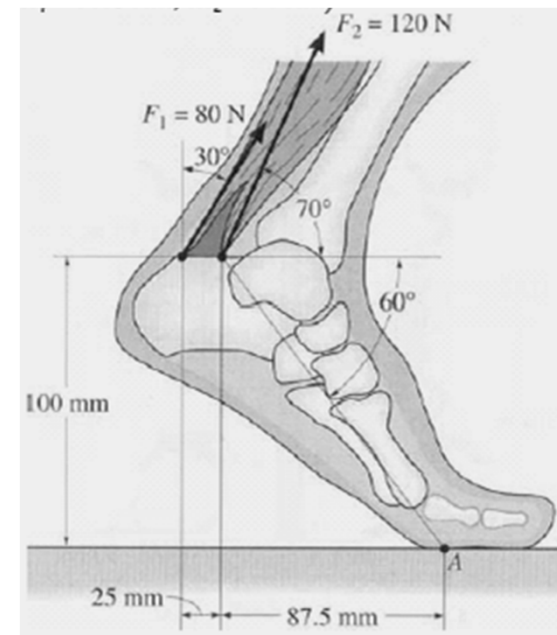
Calcule o momento provocado pela criança A no apoio ou rótula do balancé. Efectue o mesmo cálculo para a criança B. Verifique se há equilíbrio nesse apoio.



- **Exercício 5.3**

Contacto entre o solo e a planta do pé

Conforme a figura, ao caminhar, os músculos que actuam num pé ficam submetidos a um conjunto de forças musculares. Determine o momento de cada uma dessas forças no ponto de contacto A entre a planta do pé e o solo.

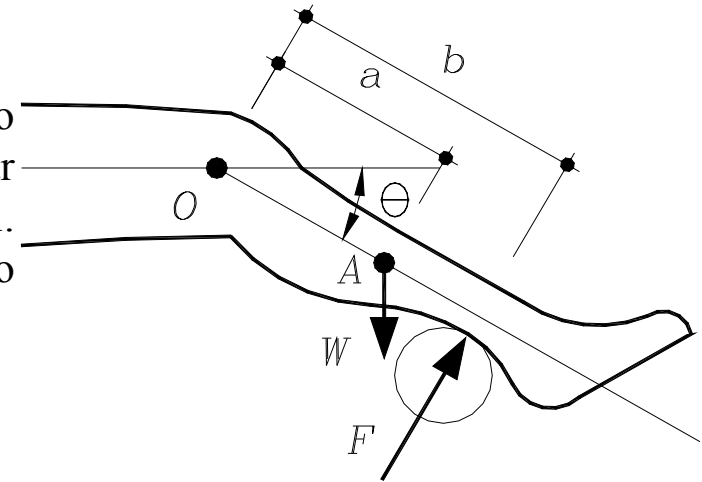


# Cap.5 – ESTÁTICA

- **Exercício 5.4**

## Máquina para exercícios

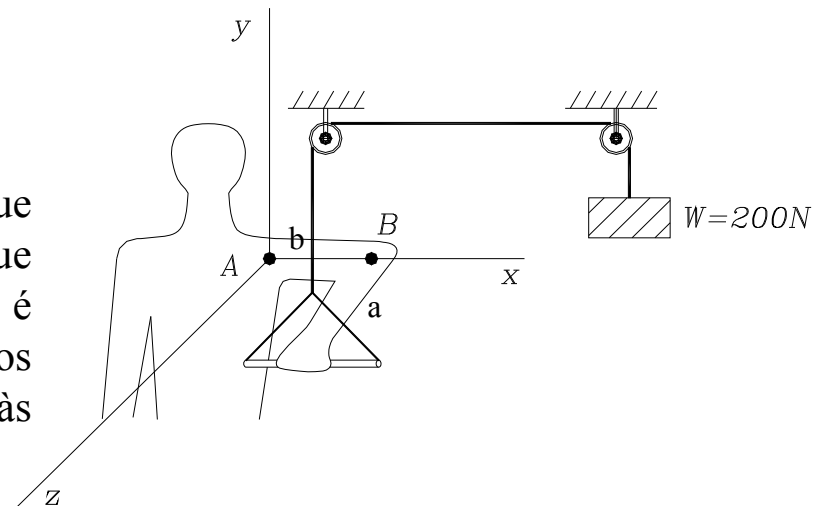
Na máquina de exercícios representada na figura, o cilindro exerce sobre a perna uma força de intensidade  $F$ , perpendicular à perna. O peso vertical da perna é  $W$  e actua no ponto  $A$ . Calcule, em função de  $W$ ,  $F$ ,  $\theta$ ,  $a$  e  $b$ , o momento resultante no ao ponto  $O$  (articulação do joelho).



- **Exercício 5.5**

## Máquina para exercícios

Uma pessoa segura com o braço esquerdo um manípulo que está ligado por um cabo a um peso de  $200N$ . Admitindo que o comprimento do braço é  $a=25cm$  e o do antebraço é  $b=30cm$ , determine o valor de todas as componentes dos momentos que aquela força produz em relação às articulações do cotovelo (B) e do ombro (A).

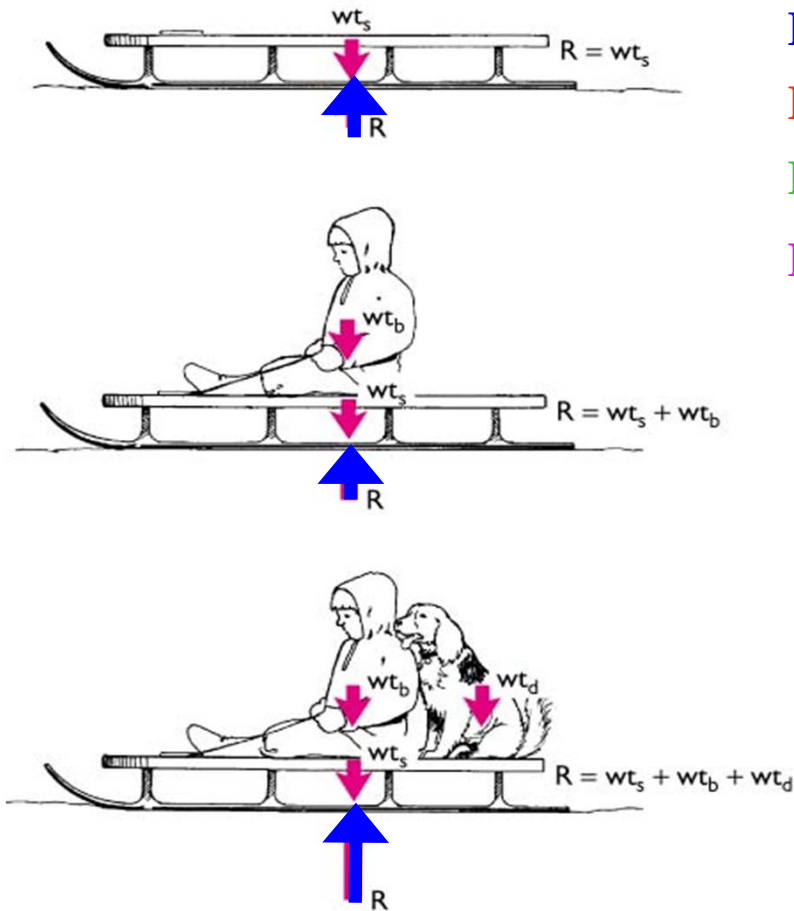


# Cap.5 – ESTÁTICA

- **Equações de equilíbrio estático: forças reactivas ou de contacto**

3ª Lei de Newton ou Lei da reacção:

“Para qualquer acção há uma **força reactiva** igual e de sentido oposto.”

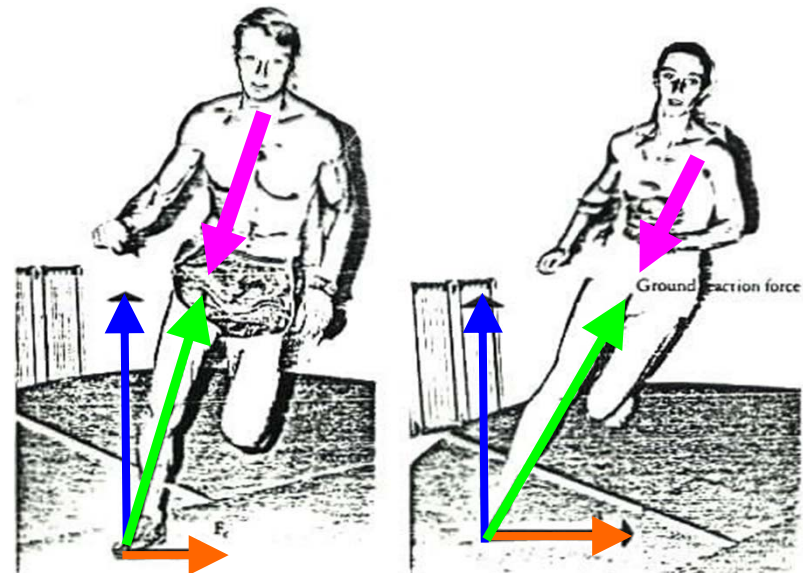


**Força de contacto (solo/corpo), normal ou reactiva**

**Força atrito (contrária movimento)**

**Força de contacto ou reactiva (resultante das anteriores)**

**Força do corpo(s) (exteriores ou interiores)**



# Cap.5 – ESTÁTICA

- **Equações de equilíbrio estático: forças atrito ou de fricção**

**Fricção**, força que actua numa área de contacto entre 2 superfícies na direcção oposta ao movimento ou com tendência de movimento.

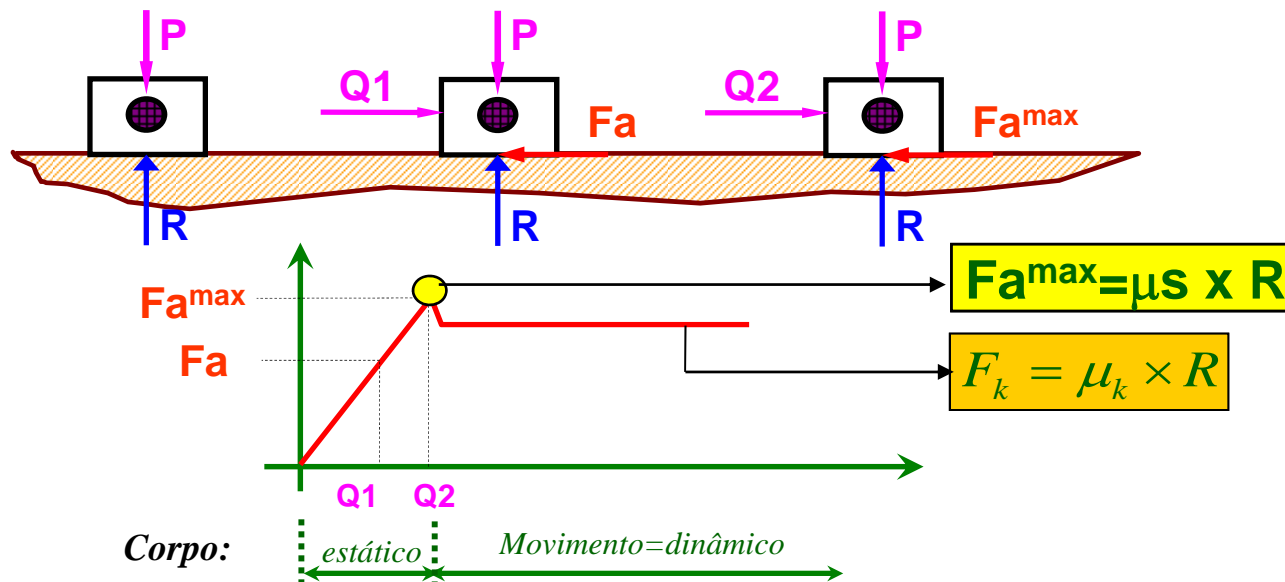
Fricção estática máxima: ( $F_m$ ) gerada entre 2 superfícies  $F_{a\ max} = \mu_s R$  [N]

Fricção cinética ( $F_k$ ) gerada entre 2 superfícies em movimento  $F_k = \mu_k R$  [N]

Coeficiente de fricção, nº relativo à interacção de 2 superfícies:

- Coeficiente de fricção estático ( $\mu_s$ ) corpos em contacto sem movimento.
- Coeficiente de fricção cinético ( $\mu_k$ ) corpos em contacto em movimento.

Força normal reactiva (R) normal ou perpendicular às 2 superfícies em contacto.





# Cap.5 – ESTÁTICA

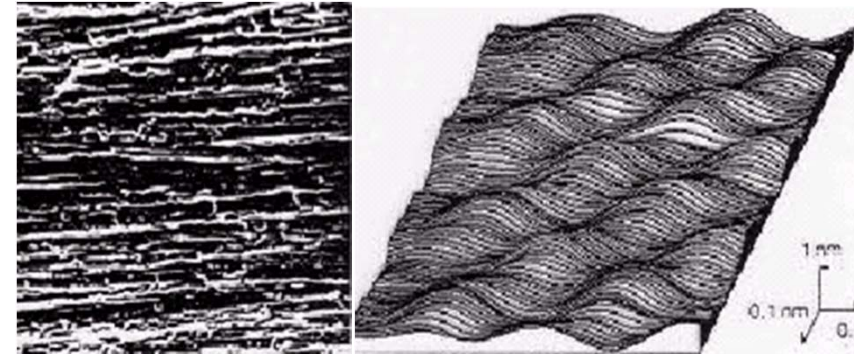
- **Equações de equilíbrio estático: forças atrito ou de fricção**

**Nota 1:** Os coeficientes de atrito dependem da natureza e da condição de contacto entre as superfícies.

**Nota 2:** A *tribologia* estuda a fricção entre corpos.

**Nota 3:** O coeficiente de atrito nas articulações ósseas é geralmente muito menor do que nos materiais utilizados em engenharia estrutural.

**Rugosidade nas superfícies**



**TABELA - Coeficiente de atrito estático**

<b>Material</b>	$\mu_s$
Junta óssea lubrificada	0,003
Junta tendão e bainha do músculo	0,013
Aço sobre o gelo	0,03
Aço sobre aço lubrificado	0,10 - 0,15
Madeira sobre metal seco	0,2 - 0,6
Madeira sobre madeira seca	0,25 - 0,50
Couro sobre madeira	0,3 - 0,4
Couro sobre metal	0,6
Aço sobre aço seco	0,6
Borracha sobre sólidos em geral	1,0 - 4,0

**TABELA - Coeficiente de atrito cinético**

<b>Material</b>	$\mu_k$
Latão sobre gelo	0,02
Gelo sobre gelo	0,02
Aço sobre aço seco	0,23
Borracha sobre concreto	1,02

O atrito limita a eficiência da maioria das “máquinas”. Por outro lado, utiliza-se o atrito quando agarramos uma corda, quando andamos ou corremos...

# Cap.5 – ESTÁTICA

- **Equações de equilíbrio estático: forças atrito ou de fricção**

Andando normalmente:

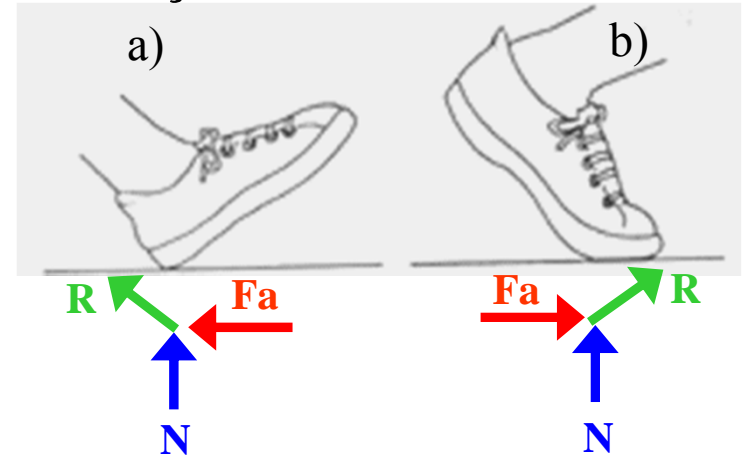
- a) O atrito entre o calcanhar e o solo evita o pé deslizar para frente.
- b) Quando o pé deixa o solo o atrito evita o pé deslizar para trás.

**Nota 1:** Em geral, a força de atrito é grande e suficiente de forma a evitar o deslizamento da pessoa quando o calcanhar toca o solo e quando deixa a superfície.

**Nota 2:** Numa superfície gelada, húmida ou com óleo,  $\mu$  é menor que 0.15, que significa a possibilidade de escorregamento. Logo possibilidade de queda associada a fractura de ossos!

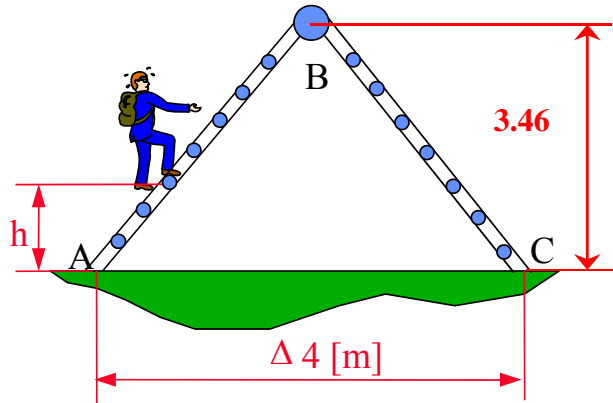
**Nota 3:** O coeficiente de atrito nas articulações ósseas é geralmente muito menor do que nos materiais utilizados em engenharia. Se surge uma doença numa articulação, o atrito pode tornar-se grande!

**Nota 4:** A saliva que adicionamos quando mastigamos os alimentos actua como um lubrificante. Se engolirmos uma torrada seca percebemos a falta dolorosa dessa lubrificação. A maioria dos grandes órgãos do corpo humano estão em movimento mais ou menos constante (coração, pulmões, intestinos), sendo lubrificados por capas mucosas escorregadias para minimizar o atrito.



# Cap.5 – ESTÁTICA

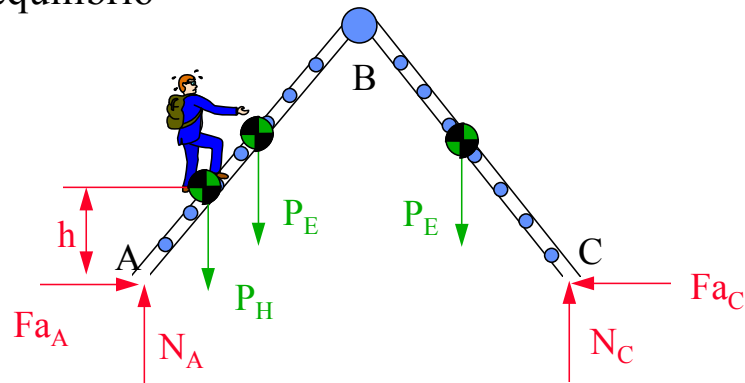
## • Exercício 5.6 Fricção



Calcule a máxima **distância**  $h$  que um homem de 80[kg] pode alcançar em subida, sem que a escada atinja o colapso. O coeficiente de fricção em ambos os pontos de contacto da escada ao solo (A e C) é de 0,5. Cada um dos lados da escada (AB e BC) tem uma massa de 10[kg], pelo que origina um peso da mesma, situado a meio da distância da base de cada lado da escada.

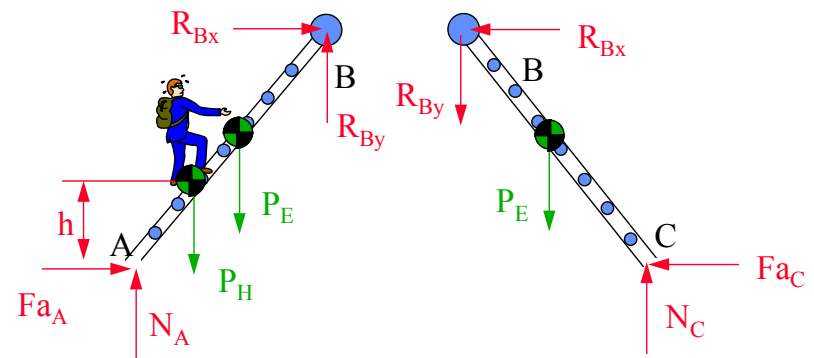
### Diagrama de corpo livre:

5 variáveis desconhecidas para 3 equações de equilíbrio



### Diagrama de corpo livre:

7 variáveis desconhecidas para 6 equações de equilíbrio



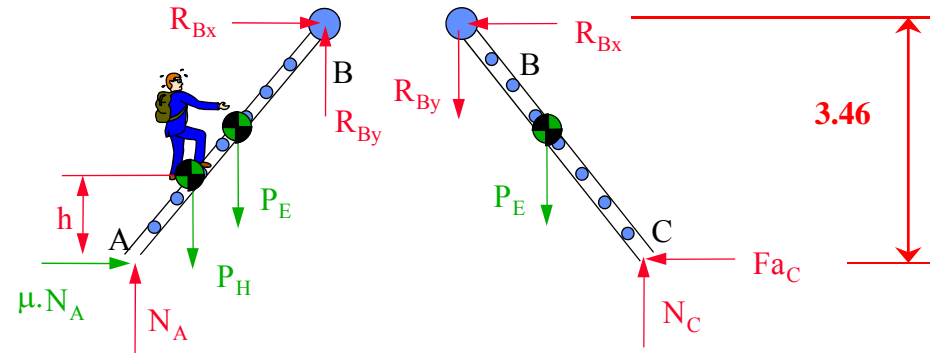
### Problema:

Saber qual dos suportes se movimenta primeiro o A ou o C, originando assim o colapso da estrutura.

# Cap.5 – ESTÁTICA

## • Exercício 5.6 Fricção

**1ª hipótese** – A estrutura tende a movimentar-se em A, pelo que se pode dizer que seria o 1º apoio a atingir o colapso.



$$\begin{cases} 0.5N_A + R_{Bx} = 0 \\ N_A - P_H - P_E + R_{By} = 0 \\ 0.5N_A \times 4\sin(60^\circ) - N_A \times 2 + P_H \times (2 - h/\tan(60^\circ)) + P_E \times 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -Fa_C - R_{Bx} = 0 \\ N_C - P_E - R_{By} = 0 \\ -Fa_C \times 4\sin(60^\circ) + N_C \times 2 - P_E \times 1 = 0 \end{cases}$$

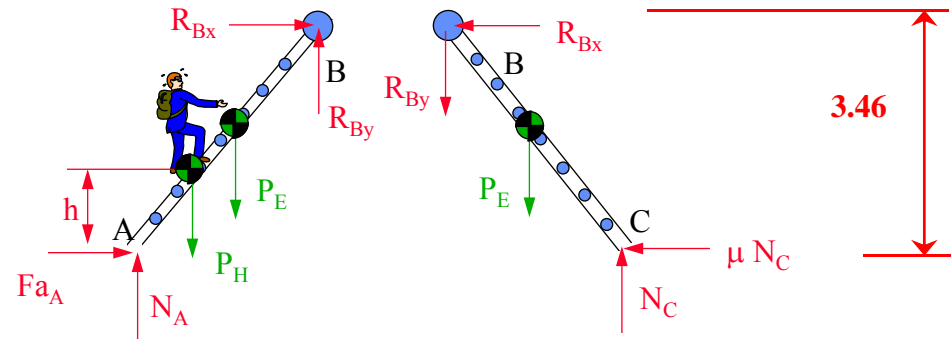
$$\begin{aligned} N_A &= +499,4[N] & h &= +3.385[m] \\ R_{Bx} &= -249,7[N] & F_{aC} &= +249,7[N] \\ R_{By} &= +383,5[N] & N_C &= +481,6[N] \end{aligned}$$

**1ª – conclusão:** A comparação do valor  $F_{aC}$  com o máximo valor  $F_{aCmax} = 240.8[N]$  indica que o 1º é maior que o segundo. Então a 1ª hipótese não é válida!!!!!!

# Cap.5 – ESTÁTICA

## • Exercício 5.6 Fricção

**2ª hipótese** – A estrutura tende a movimentar-se em C, pelo que se pode dizer que seria o 2º apoio a atingir o colapso.



$$\begin{cases} Fa_A + R_{Bx} = 0 \\ N_A - P_H - P_E + R_{By} = 0 \\ Fa_A \times 4 \sin(60^\circ) - N_A \times 2 + P_H \times (2 - h / \tan(60^\circ)) + P_E \times 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -0,5N_C - R_{Bx} = 0 \\ N_C - P_E - R_{By} = 0 \\ -0,5N_C \times 4 \sin(60^\circ) + N_C \times 2 - P_E \times 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} Fa_A &= +183,1[N] & h &= +2,37[m] \\ N_A &= +614,8[N] & R_{By} &= +268,1[N] \\ R_{Bx} &= -183,1[N] & N_C &= +366,2[N] \end{aligned}$$

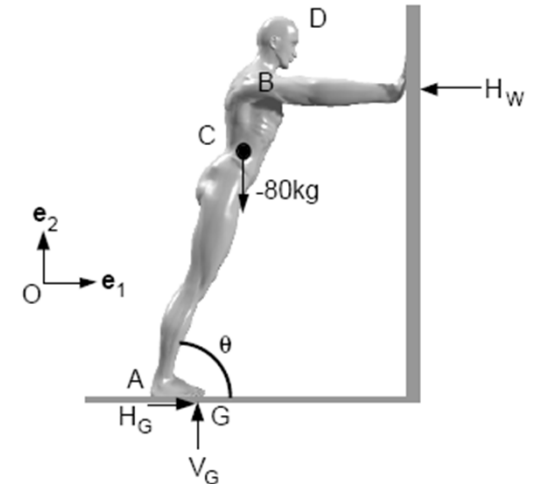
**2ª – conclusão:** A comparação do valor  $F_{aA}$  com o máximo valor  $F_{aAmax} = 307.4[N]$  indica que o 1º é mais pequeno que o 2º. Pelo que a hipótese é verdadeira!!!!!!

# Cap.5 – ESTÁTICA

- **Exercício 5.7**

Um atleta em exercício

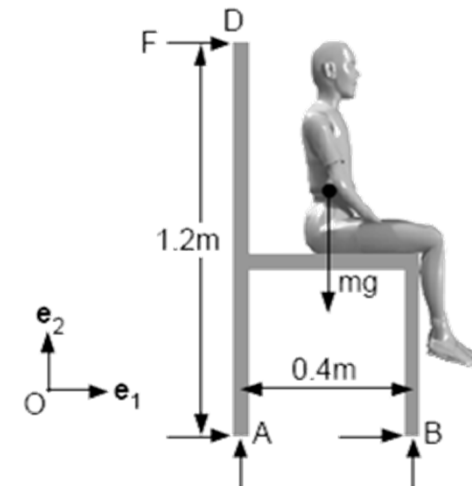
Conforme a figura, um atleta estica os seus músculos inclinando-se numa parede, antes de uma prova. O atleta tem uma massa de 80kg e uma altura de 183cm. A distância entre os pontos DB (da cabeça aos ombros) é de 30cm. A distância AC é de 101cm e a distância AG de 25cm. A fricção entre a parede e as mãos do atleta é desprezável. Determine as forças exercidas no atleta através da parede e do solo em função do ângulo  $\theta$  igual a  $30^\circ$ .



- **Exercício 5.8**

Rotação iminente de uma cadeira

Uma criança com peso de 40kg está sentada numa cadeira. As pernas da cadeira estão afastados de 0,4m e a altura da cadeira é de 1,2m. Assumindo que as forças de fricção são elevadas para impedir o deslizamento, qual é a força horizontal necessária a ser exercida na parte traseira da cadeira, de forma a que, as pernas traseiras da cadeira não levantem?

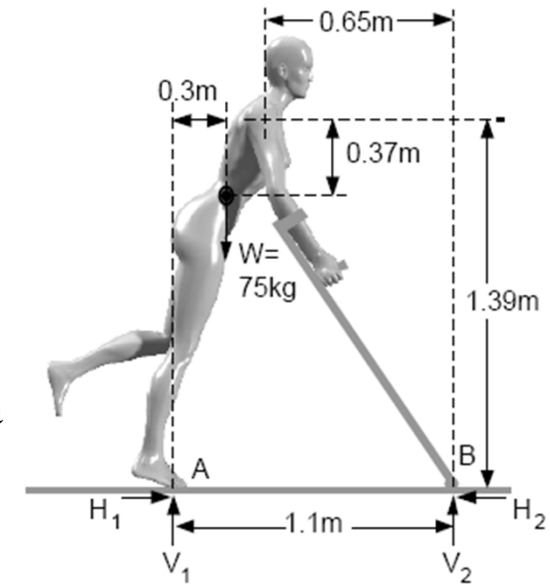


# Cap.5 – ESTÁTICA

- Exercício 5.9**

## Caminhar de muletas

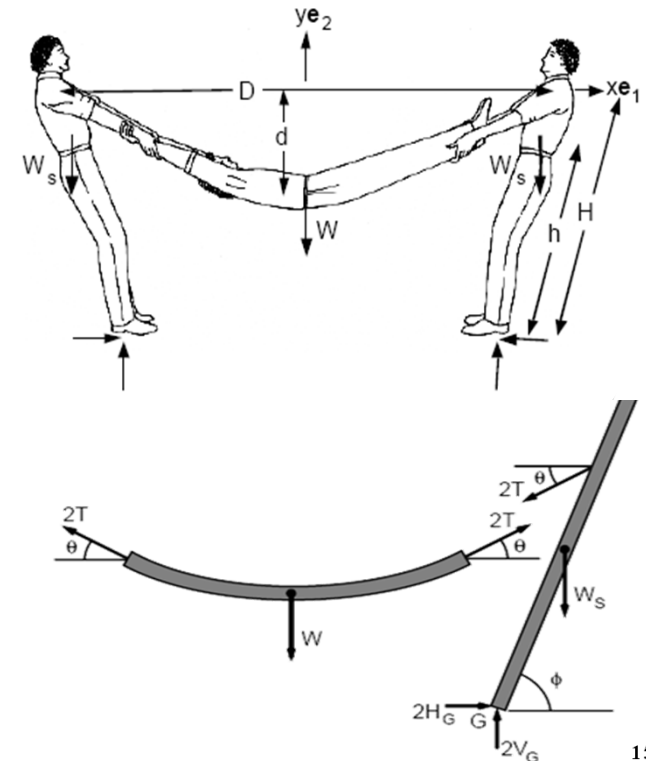
Para a configuração representada na figura, uma mulher, devido a problemas no joelho, utiliza muletas para caminhar e manter-se em pé. Determine as forças de contacto que actuam nas muletas e no pé.



- Exercício 5.10**

## Cabo humano

Um jovem com peso  $W$ [kg], encontra-se suspenso por 2 estudantes, cada um com peso  $W_s$ [kg], aguentando cada um destes o mesmo esforço. O jovem suspenso descreve uma curva parabólica e está sujeito a um estado de tensão.  $D$  é a distância na horizontal entre os ombros dos 2 estudantes e  $d$  a altura mais baixa a que se encontra o jovem suspenso. Os 2 estudantes inclinam-se de forma a suportar o jovem sem que este chegue ao chão. Para que assim seja, pretende-se que determine o ângulo de inclinação e as forças reactivas ao solo que é feito pelos 2 jovens.



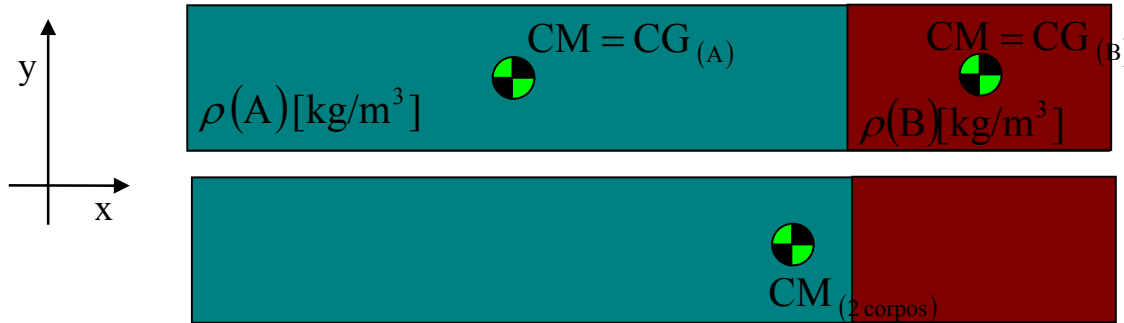
# Cap.5 – ESTÁTICA

- Geometria de massas: Centro de Massa (CM)**

❖ Utilizando o teorema de Varignon o centro de massa fica localizado:

$$XG \times P = \int_{\text{corpo}} x.dP \quad YG \times P = \int_{\text{corpo}} y.dP \quad ZG \times P = \int_{\text{corpo}} z.dP \quad dP = g \times \rho \times dV$$

$$dm = \rho \times dV$$



massa específica =  $\rho$  [kg/m<sup>3</sup>]  
 se  $\rho_A$  [kg/m<sup>3</sup>]  $\neq$   $\rho_B$  [kg/m<sup>3</sup>]

Desenvolvendo para x:

$$\bar{X}_{CM} = \frac{\int_{\text{corpo}} x.dP}{P_{total}} = \frac{\int_{\text{corpo}} x.g.dm}{g.m_{total}} = \frac{\int_{\text{corpo}} x.dm}{m_{total}} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i.m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

O que permite concluir:

Centro Massa =  $(\bar{x}_{CM}, \bar{y}_{CM}, \bar{z}_{CM})$

$$\bar{x}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \times m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}; \bar{y}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \times m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}; \bar{z}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^n z_i \times m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$



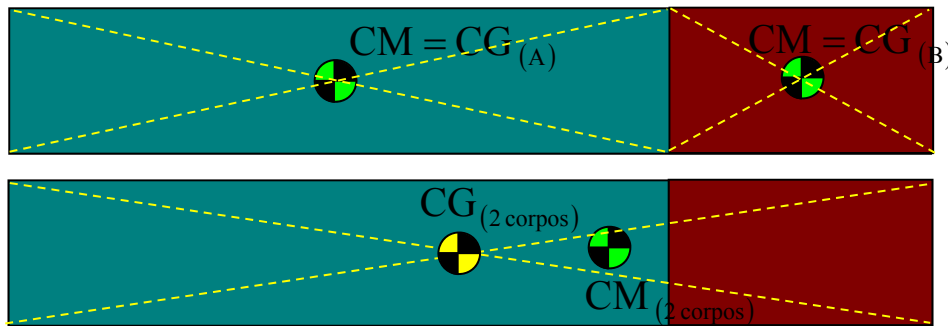
# Cap.5 – ESTÁTICA

- **Geometria de massas: Centro Geométrico ou Centróide (C)**

❖ Centróide é o centro geométrico de cada corpo

**Nota 1:** Para corpos homogêneos com massa específica constante o centróide coincide com o centro de massa.

**Nota 2:** Para corpos heterogêneos, a coincidência da nota 1 depende do valor da massa específica.



O que permite concluir:

*Centróide* =  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$

$$\bar{x}_C = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \times L_i}{\sum_{i=1}^n L_i}; \bar{y}_C = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \times L_i}{\sum_{i=1}^n L_i}; \bar{z}_C = \frac{\sum_{i=1}^n z_i \times L_i}{\sum_{i=1}^n L_i}$$

$$\bar{x}_C = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \times A_i}{\sum_{i=1}^n A_i}; \bar{y}_C = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \times A_i}{\sum_{i=1}^n A_i}; \bar{z}_C = \frac{\sum_{i=1}^n z_i \times A_i}{\sum_{i=1}^n A_i}$$

$$\bar{x}_C = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \times V_i}{\sum_{i=1}^n V_i}; \bar{y}_C = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \times V_i}{\sum_{i=1}^n V_i}; \bar{z}_C = \frac{\sum_{i=1}^n z_i \times V_i}{\sum_{i=1}^n V_i}$$

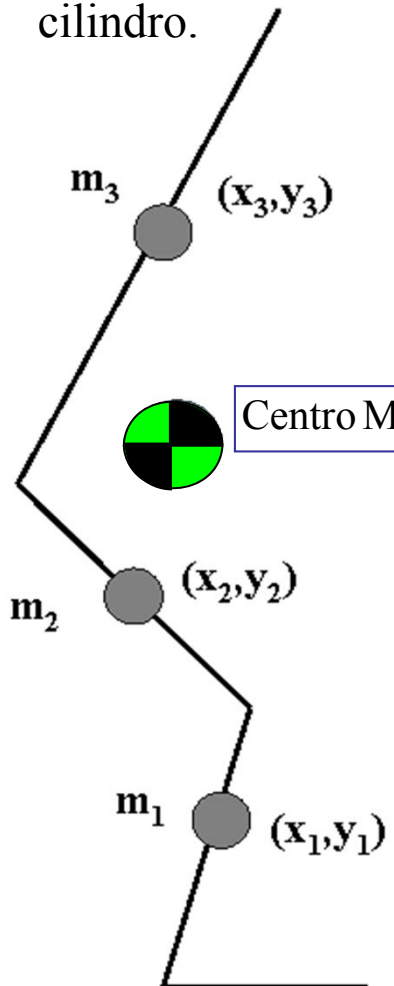
Desenvolvendo para x:

$$\bar{X}_C = \frac{\int_{\text{corpo}} x \cdot dL}{L_{\text{total}}} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i L_i}{\sum_{i=1}^n L_i}$$

# Cap.5 – ESTÁTICA

- **Geometria de massas: Centro de Massa (CM) de segmentos anatómicos (antropometria), em modelos biomecânicos**

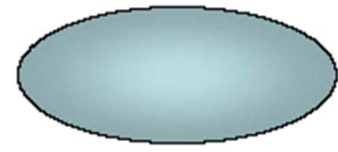
Os sólidos mais utilizados na definição da morfologia humana são o elipsóide, a esfera e o cilindro.



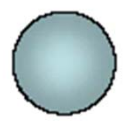
Centro Massa =  $(\bar{x}_{CM}, \bar{y}_{CM})$

$$\bar{x}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \times m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}; \bar{y}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \times m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

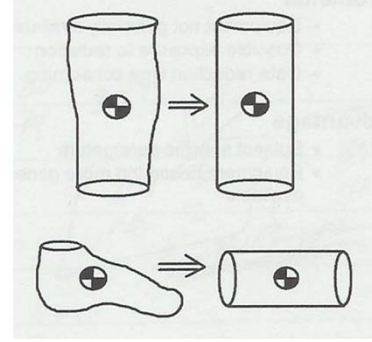
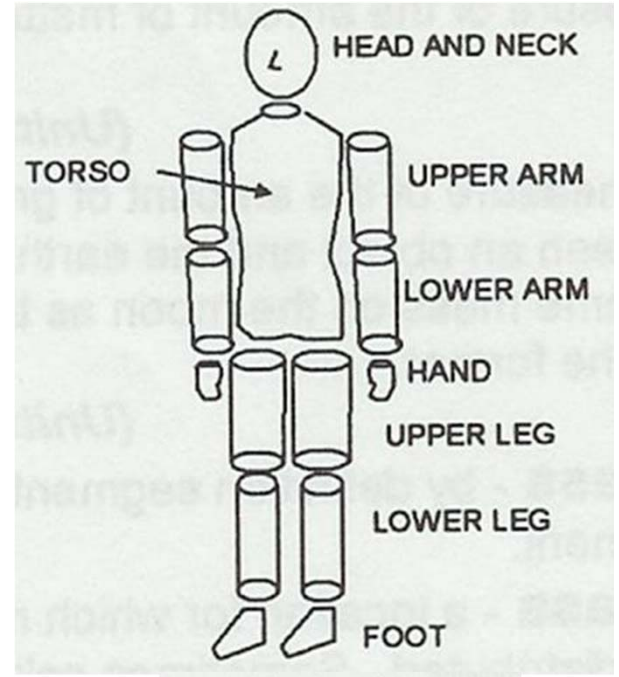
• Elipsóide:



• Esfera.


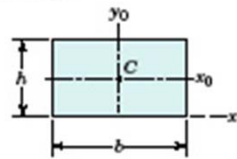
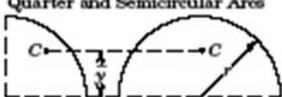
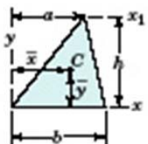
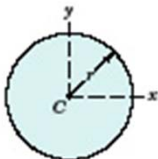
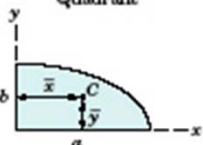
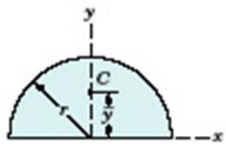
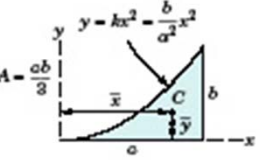
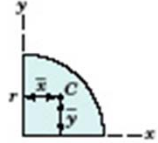
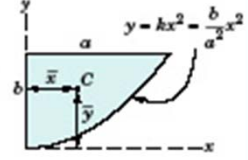
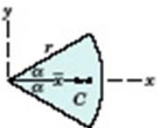


• Cilindro.



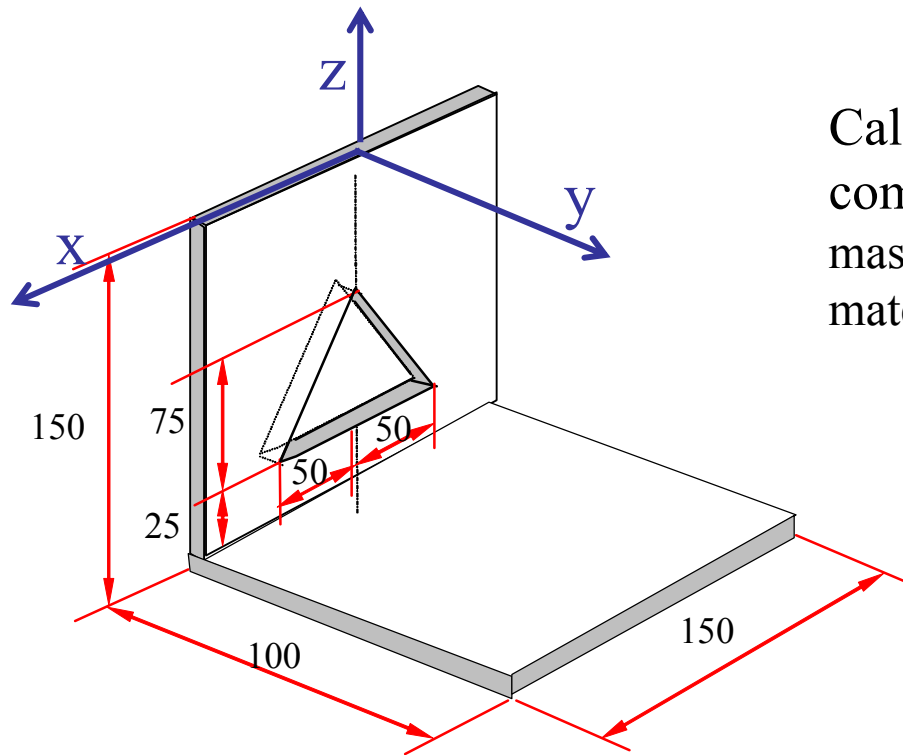
# Cap.5 – ESTÁTICA

## Propriedades de figuras planas: Centróide

FIGURE	CENTROID	FIGURE	CENTROID
<p>Arc Segment</p> 	$\bar{r} = \frac{r \sin \alpha}{\alpha}$	<p>Rectangular Area</p> 	—
<p>Quarter and Semicircular Area</p> 	$\bar{y} = \frac{2r}{\pi}$	<p>Triangular Area</p> 	$\bar{x} = \frac{c+b}{3}$ $\bar{y} = \frac{h}{3}$
<p>Circular Area</p> 	—	<p>Area of Elliptical Quadrant</p> 	$\bar{x} = \frac{4a}{3\pi}$ $\bar{y} = \frac{4b}{3\pi}$
<p>Semicircular Area</p> 	$\bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$	<p>Subparabolic Area</p> 	$\bar{x} = \frac{3a}{4}$ $\bar{y} = \frac{3b}{10}$
<p>Quarter-Circular Area</p> 	$\bar{x} = \bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$	<p>Parabolic Area</p> 	$\bar{x} = \frac{3a}{8}$ $\bar{y} = \frac{3b}{5}$
<p>Area of Circular Sector</p> 	$\bar{x} = \frac{2}{3} \frac{r \sin \alpha}{\alpha}$		

## Cap.5 – ESTÁTICA

### Exercício 5.10: Geometria de massas – centro de massa



Calcular a posição do centro de massa do corpo composto, sabendo que o painel vertical tem uma massa específica de  $25(\text{kg}/\text{m}^2)$  e a base é de um material diferente com  $40(\text{kg}/\text{m}^2)$  de massa específica.

$$\text{Centro Massa} = (\bar{x}_{CM}, \bar{y}_{CM}, \bar{z}_{CM})$$
$$\bar{x}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \times m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}; \bar{y}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \times m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}; \bar{z}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^n z_i \times m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

**Solução:** Considerar 3 partes geométricas simples no corpo.

**Corpos:** 1- placa vertical, 2- placa triangular retirada, 3- placa horizontal

# Cap.5 – ESTÁTICA

## Exercício 5.10: Geometria de massas – centro de massa

Corpo	$\rho$	massa [kg]	$x_i$ (m)	$y_i$ (m)	$z_i$ (m)	$P_i$ (N)
1	25(Kg/m <sup>2</sup> )	0,562	0	0	-0,075	5,518
2	25(Kg/m <sup>2</sup> )	-0,094	0	0	-0,100	-0,920
3	40(Kg/m <sup>2</sup> )	0,6	0	0,05	-0,150	5,886

**m total= 1.068**

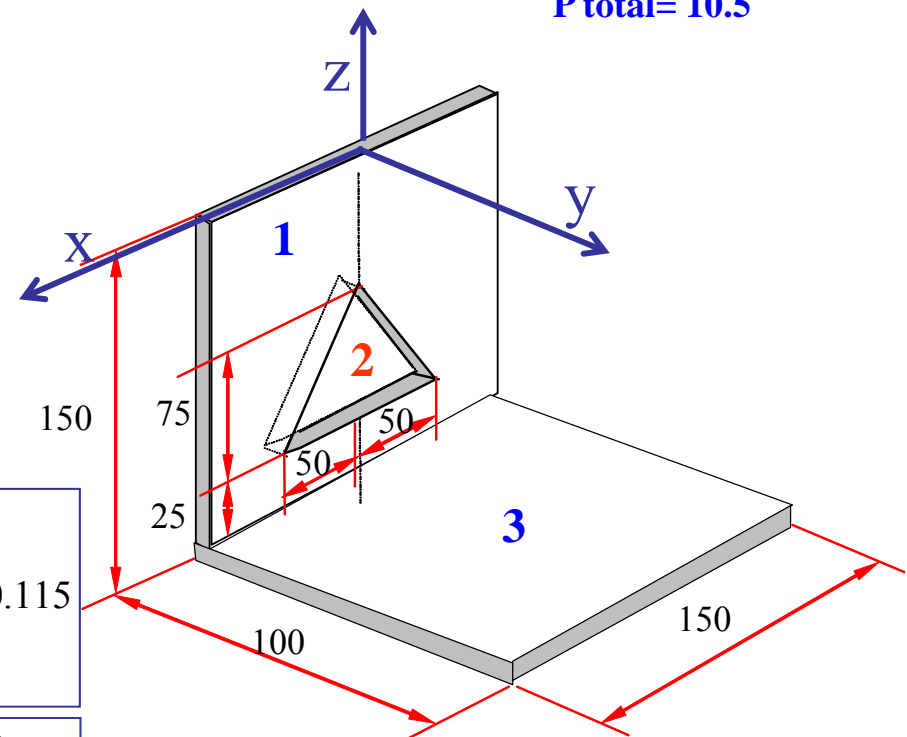
**P total= 10.5**

$$\bar{x}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^3 x_i \times m_i}{\sum_{i=1}^3 m_i} = \frac{(0.562 \times 0 - 0.094 \times 0 + 0.6 \times 0)}{1.068} = 0$$

$$\bar{y}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \times m_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{(0.562 \times 0 - 0.094 \times 0 + 0.6 \times 0.05)}{1.068} = 0.028$$

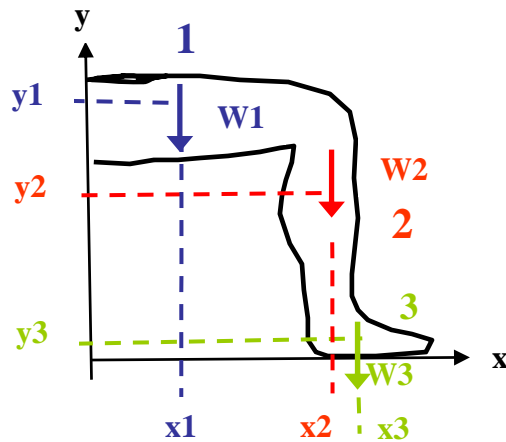
$$\bar{z}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^n z_i \times m_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{(-0.562 \times 0.075 + 0.094 \times 0.1 - 0.6 \times 0.15)}{1.068} = -0.115$$

$$CM = (\bar{x}_{CM}, \bar{y}_{CM}, \bar{z}_{CM}) = (0,28,-115)mm$$



# Cap.5 – ESTÁTICA

## Exercício 5.11: Geometria de massas – centro de massa



Considere a perna de um indivíduo representada na figura, flectida segundo um ângulo recto. As coordenadas dos centros de gravidade: entre a anca e a articulação do joelho, do joelho à articulação do pé, e do pé, foram medidos através de segmentos lineares cujos resultados estão tabelados. O peso desses segmentos anatómicos são expressos de forma percentual em relação ao peso do indivíduo. Determine a localização do centro de gravidade considerando a perna flectida.

Parte	x[cm]	y[cm]	%W
<b>1</b>	<b>17.3</b>	<b>51.3</b>	10.6
<b>2</b>	<b>42.5</b>	<b>32.8</b>	4.6
<b>3</b>	<b>45.0</b>	<b>3.3</b>	1.7

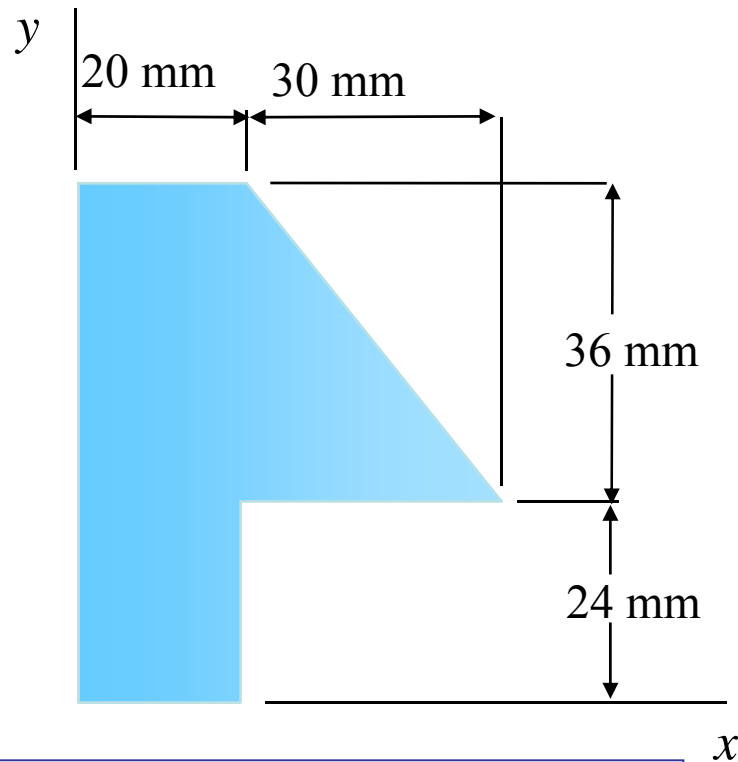
$$\text{Centro Massa} = (\bar{x}_{CM}, \bar{y}_{CM})$$

$$\bar{x}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \times m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}; \bar{y}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \times m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

# Cap.5 – ESTÁTICA

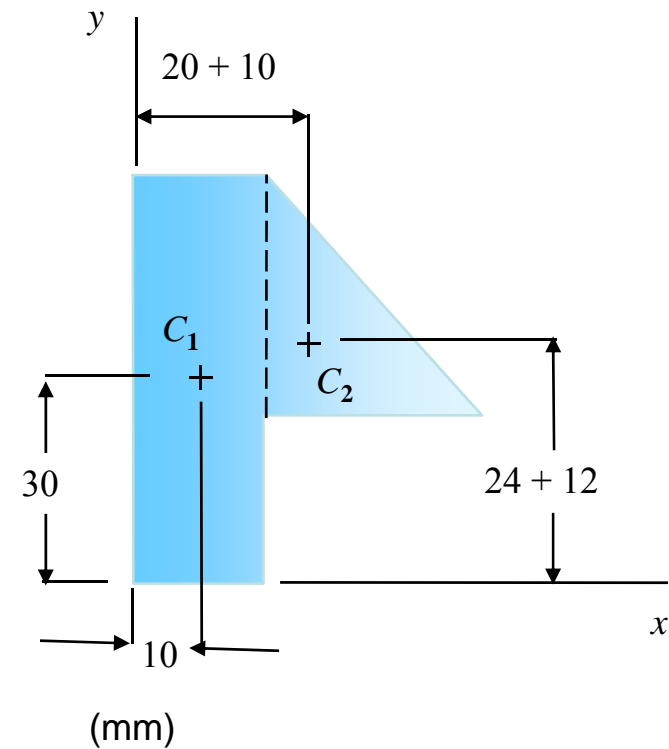
## Exercício 5.12: Geometria de massas - centróide

Localize o centróide da figura plana combinada.



Solução:

1º identificar as figuras e os respectivos centróides.



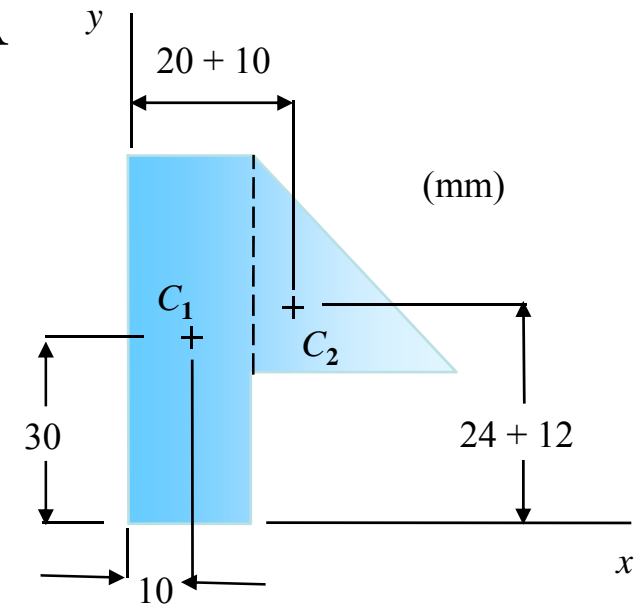
$$\text{Centróide} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$$

$$\bar{x}_C = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \times A_i}{\sum_{i=1}^n A_i}; \bar{y}_C = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \times A_i}{\sum_{i=1}^n A_i}; \bar{z}_C = \frac{\sum_{i=1}^n z_i \times A_i}{\sum_{i=1}^n A_i}$$

# Cap.5 – ESTÁTICA

## Exercício 5.12: Geometria de massas - centróide

$$\bar{x}_C = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \times A_i}{\sum_{i=1}^n A_i}; \bar{y}_C = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \times A_i}{\sum_{i=1}^n A_i}$$



2º Construir uma tabela

	$A, \text{ mm}^2$	$\bar{x}, \text{ mm}$	$\bar{y}, \text{ mm}$	$\bar{x}A, \text{ mm}^3$	$\bar{y}A, \text{ mm}^3$
1	$20 \times 60 = 1200$	10	30	12,000	36,000
2	$(1/2) \times 30 \times 36 = 540$	30	36	16,200	19,440
$\Sigma$	1740			28,200	55,440

$$\bar{X} \Sigma A = \Sigma \bar{x}A$$

$$\bar{X} (1740) = 28,200$$

ou  $\bar{X} = 16.21 \text{ mm}$

$$\bar{Y} \Sigma A = \Sigma \bar{y}A$$

$$\bar{Y} (1740) = 55,440$$

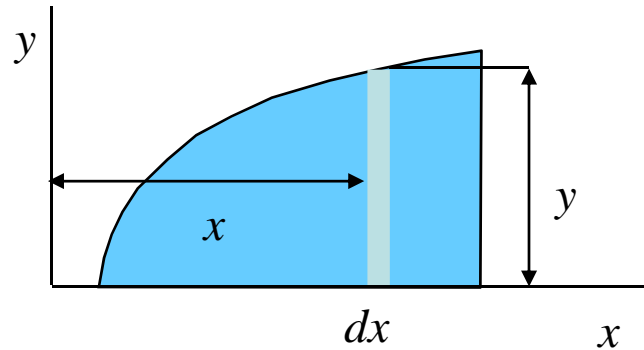
ou  $\bar{Y} = 31.9 \text{ mm}$

$$\text{Centróide} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (16.21, 31.9, 0)$$



# Cap.5 – ESTÁTICA

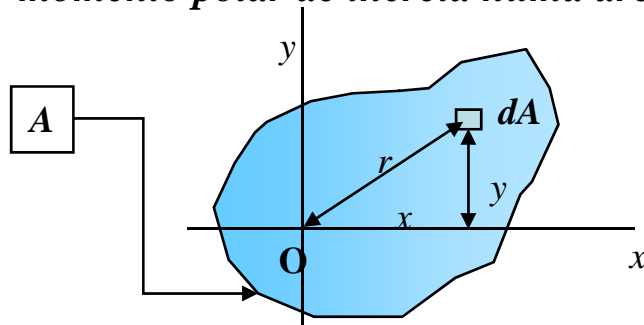
- Momentos de inércia ou momentos de área de 2ª ordem**



Os momentos de inércia rectangulares  $I_x$  e  $I_y$  de uma área são definidos como:

$$I_x = \int y^2 dA \quad I_y = \int x^2 dA$$

O momento polar de inércia numa área  $A$  em relação a  $O$  é definido como:  $J_O = \int r^2 dA$

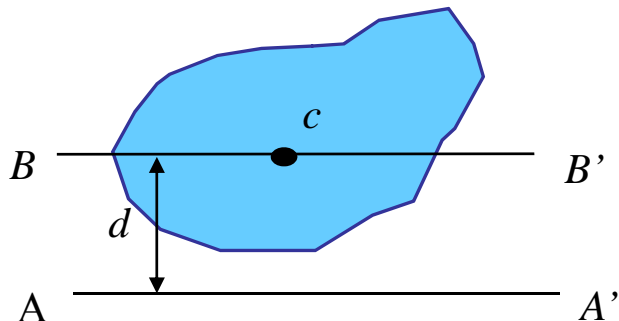


A distância de  $O$  ao elemento de área  $dA$  é  $r$ .

Observando que  $r^2 = x^2 + y^2$ , estabelece-se a relação:

$$J_O = I_x + I_y$$

- Teorema de Steiner**


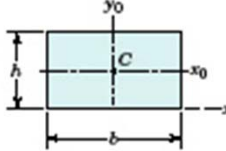
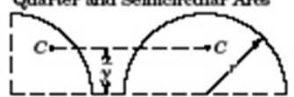
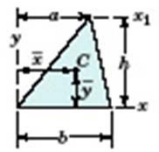
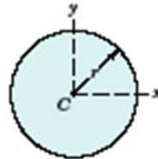
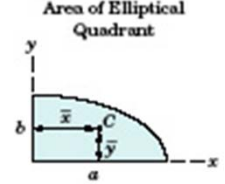
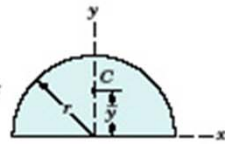
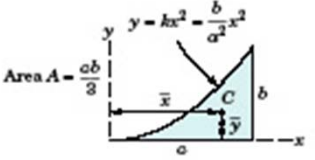
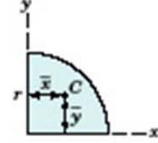
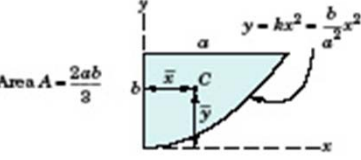
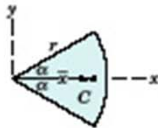


O *teorema de eixos paralelos* enuncia que o momento de inércia  $I$  de uma superfície em relação a um eixo  $AA'$  é igual ao momento de inércia  $I$  da superfície em relação ao *eixo baricêntrico*  $BB'$  paralelo a  $AA'$  mais o produto da área  $A$  pelo quadrado da distância  $d$  entre os dois eixos.

$$I = \bar{I} + Ad^2$$

# Cap.5 – ESTÁTICA

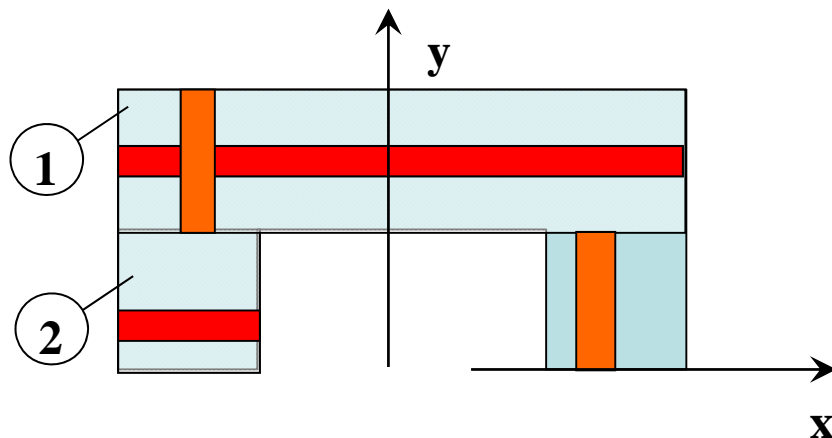
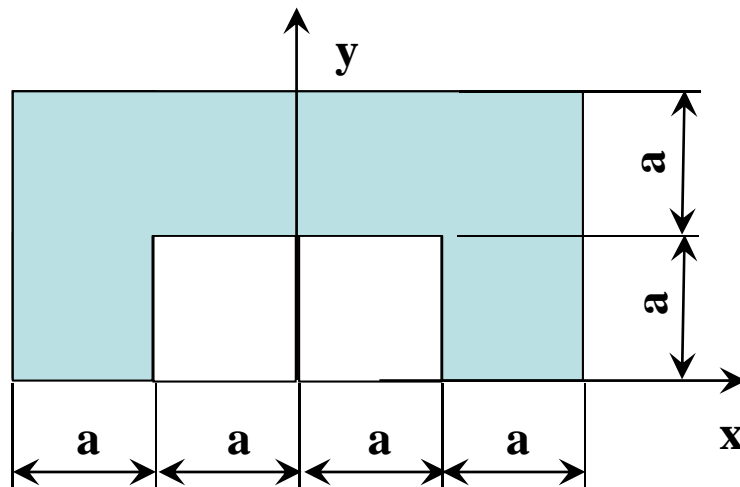
## Propriedades:

FIGURE	AREA MOMENTS OF INERTIA	FIGURE	AREA MOMENTS OF INERTIA
<p>Arc Segment</p> 	—	<p>Rectangular Area</p> 	$I_x = \frac{bh^3}{3}$ $\bar{I}_x = \frac{bh^3}{12}$ $\bar{I}_y = \frac{bh}{12}(b^2 + h^2)$
<p>Quarter and Semicircular Areas</p> 	—	<p>Triangular Area</p> 	$I_x = \frac{bh^3}{12}$ $\bar{I}_x = \frac{bh^3}{36}$ $I_{x_1} = \frac{bh^3}{4}$
<p>Circular Area</p> 	$I_x = I_y = \frac{\pi r^4}{4}$ $I_z = \frac{\pi r^4}{2}$	<p>Area of Elliptical Quadrant</p> 	$I_x = \frac{\pi ab^3}{16}, \bar{I}_x = \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}\right)ab^3$ $I_y = \frac{\pi a^3b}{16}, \bar{I}_y = \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}\right)a^3b$ $I_z = \frac{\pi ab}{16}(a^2 + b^2)$
<p>Semicircular Area</p> 	$I_x = I_y = \frac{\pi r^4}{8}$ $\bar{I}_x = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right)r^4$ $I_z = \frac{\pi r^4}{4}$	<p>Subparabolic Area</p> 	$I_x = \frac{ab^3}{21}$ $I_y = \frac{a^3b}{5}$ $I_z = cb\left(\frac{a^3}{5} + \frac{b^2}{21}\right)$
<p>Quarter-Circular Area</p> 	$I_x = I_y = \frac{\pi r^4}{16}$ $\bar{I}_x = \bar{I}_y = \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}\right)r^4$ $I_z = \frac{\pi r^4}{8}$	<p>Parabolic Area</p> 	$I_x = \frac{2ab^3}{7}$ $I_y = \frac{2a^3b}{15}$ $I_z = 2ab\left(\frac{a^2}{15} + \frac{b^2}{7}\right)$
<p>Area of Circular Sector</p> 	$I_x = \frac{r^4}{4}\left(\alpha - \frac{1}{2}\sin 2\alpha\right)$ $I_y = \frac{r^4}{4}\left(\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha\right)$ $I_z = \frac{1}{2}r^4\alpha$		

# Cap.5 – ESTÁTICA

- **Momentos de inércia ou momentos 2ª ordem obtidos por integração directa**

Calcule os *momentos de inércia rectangulares*  $I_x$  e  $I_y$  para a secção de área seguinte, bem como o *momento polar*.



$$I_{xx} = \int_A y^2 dA = I_{xx}^1 + 2I_{xx}^2 = 10a^4 [L^4]$$

$$I_{xx}^1 = \int_A y^2 dA = \int_a^{2a} y^2 (4a) dy = \frac{28}{3} a^4 [L^4]$$

$$I_{xx}^2 = \int_A y^2 dA = \int_0^a y^2 (a) dy = \frac{a^4}{3} [L^4]$$


---

$$I_{yy} = \int_A x^2 dA = I_{yy}^1 + 2I_{yy}^2 = 10a^4 [L^4]$$

$$I_{yy}^1 = \int_A x^2 dA = \int_{-2a}^{2a} x^2 (a) dx = \frac{16}{3} a^4 [L^4]$$

$$I_{yy}^2 = \int_A x^2 dA = \int_a^{2a} x^2 (a) dx = \frac{7a^4}{3} [L^4]$$


---

$$I_P = \int_A (x^2 + y^2) dA = I_{xx} + I_{yy} = 20a^4 [L^4]$$

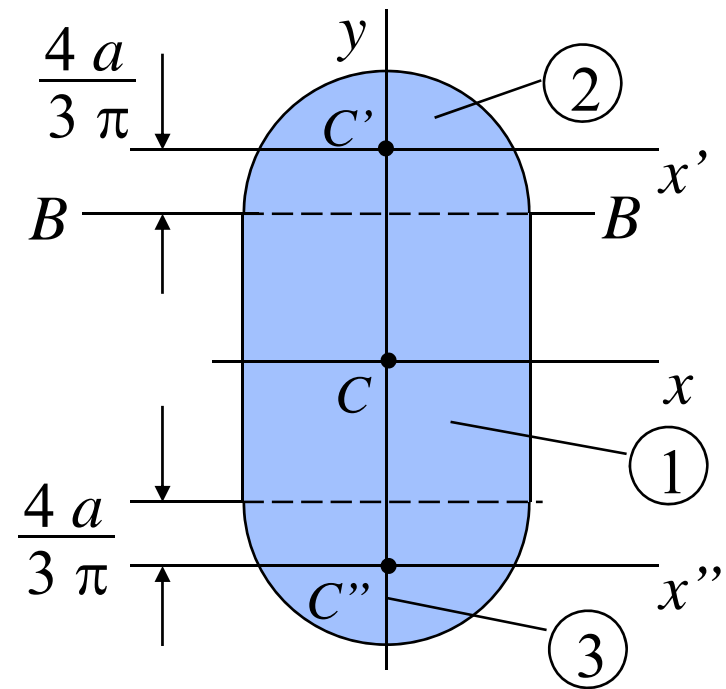
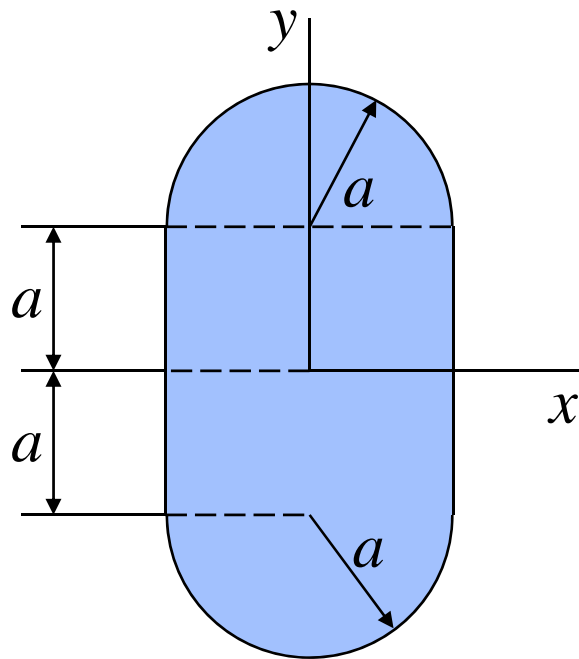
# Cap.5 – ESTÁTICA

## Exercício 5.11: Geometria de massas – momentos de inércia

Determine o momento de inércia da área combinada seguinte, em relação a  $x$ , quando  $a = 20$  mm.

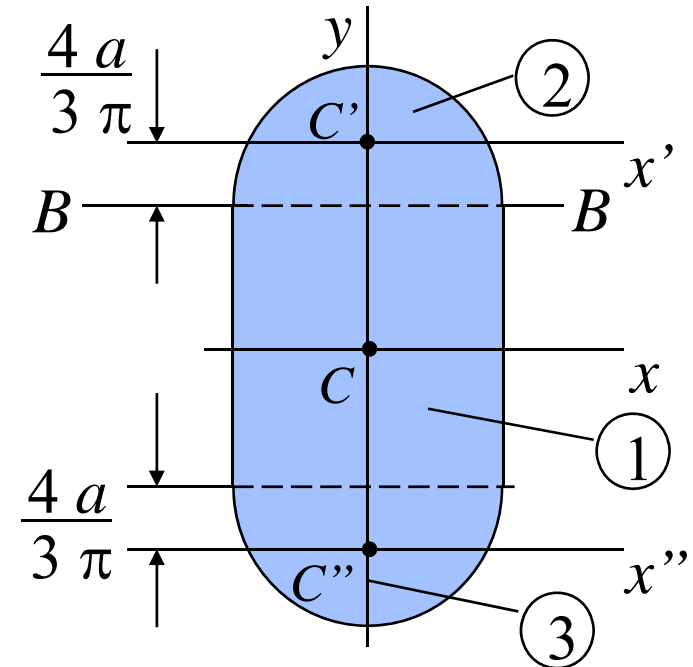
Solução:

1º identificar as áreas diferentes e centróides.



## Cap.5 – ESTÁTICA

### Exercício 5.11: Geometria de massas – momentos de inércia



Momento de inércia em relação a  $x$ :

Para a secção 2:  $(I_{BB})_2 = \frac{1}{8} \pi a^4$

$$(I_{BB})_2 = (\bar{I}_{x'})_2 + A d^2$$

$$(\bar{I}_{x'})_2 = (I_{BB})_2 - A d^2 = \frac{1}{8} \pi a^4 - \frac{1}{2} \pi a^2 \left( \frac{4a}{3\pi} \right)^2 = \frac{1}{8} \pi a^4 - \frac{8}{9\pi} a^4$$

$$(I_x)_2 = (\bar{I}_{x'})_2 + A d^2 = \frac{1}{8} \pi a^4 - \frac{8}{9\pi} a^4 + \frac{1}{2} \pi a^2 \left( a + \frac{4a}{3\pi} \right)^2$$

$$(I_x)_2 = \frac{5}{8} \pi a^4 + \frac{4}{3} a^4$$

## Cap.5 – ESTÁTICA

### Exercício 5.11: Geometria de massas – momentos de inércia

Secção 1:  $(I_x)_1 = \frac{1}{12} (2a) (2a)^3 = \frac{4}{3} a^4$

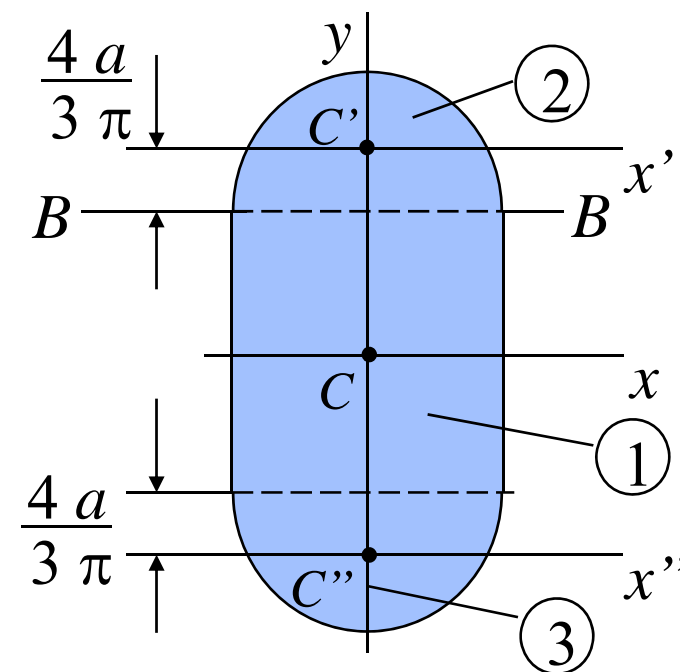
Secção 3:  $(I_x)_3 = (I_x)_2 = \frac{5}{8} \pi a^4 + \frac{4}{3} a^4$

Momento de inércia da área combinada em  $x$ :

$$I_x = (I_x)_1 + (I_x)_2 + (I_x)_3 = \frac{4}{3} a^4 + \frac{5}{8} \pi a^4 + \frac{4}{3} a^4 + \frac{5}{8} \pi a^4 + \frac{4}{3} a^4$$

(Para  $a = 20$  mm)

$$I_x = 4 a^4 + \frac{5}{4} \pi a^4 = 1.268 \times 10^6 \text{ mm}^4 \quad \boxed{I_x = 1.268 \times 10^6 \text{ mm}^4}$$



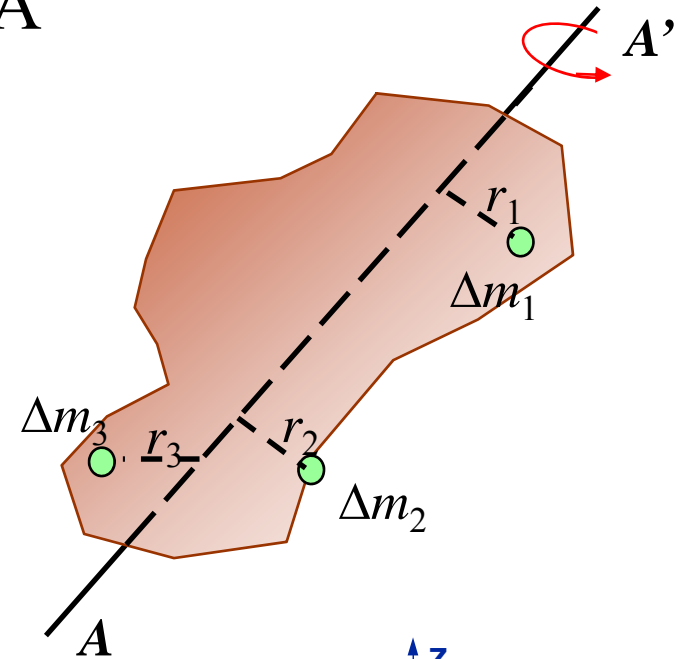
# Cap.5 – ESTÁTICA

- Momentos de inércia de massa**

*Momentos de inércia de massa* utilizados na dinâmica. Envolvem a rotação do corpo rígido em relação a um eixo. É definido em relação a um eixo AA' com:

$$I = \int r^2 dm$$

onde  $r$  é a distancia de AA' a um elemento de massa infinitesimal.

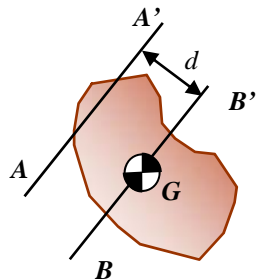
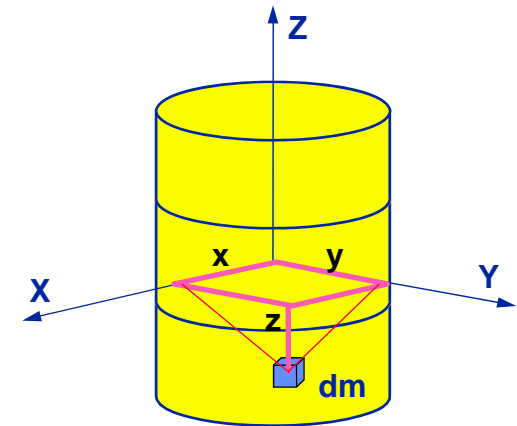


Os *momentos de inércia de massa* em relação aos eixos coordenados:

$$I_x = \int (y^2 + z^2) dm$$

$$I_y = \int (z^2 + x^2) dm$$

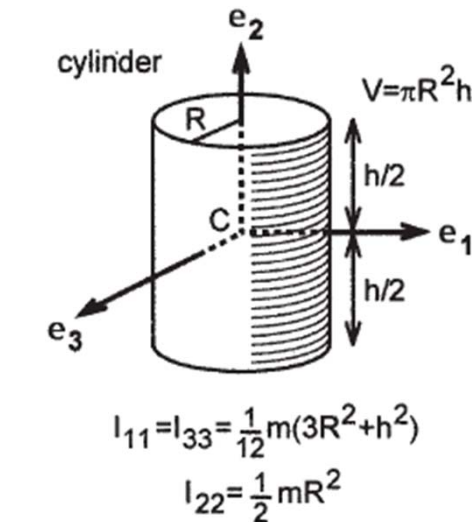
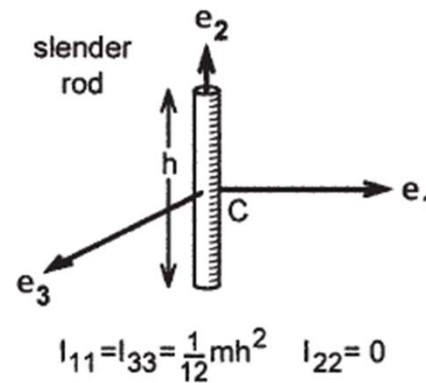
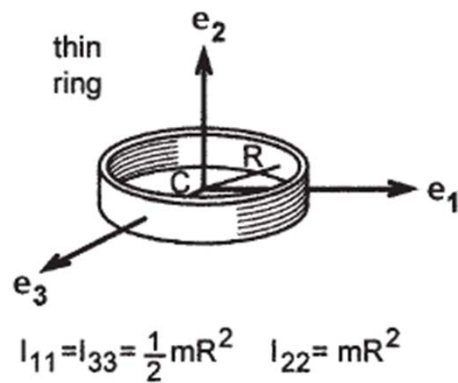
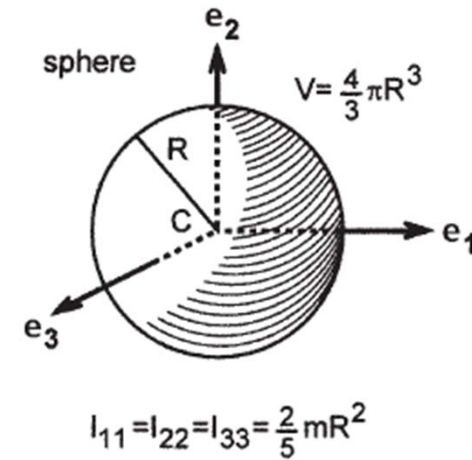
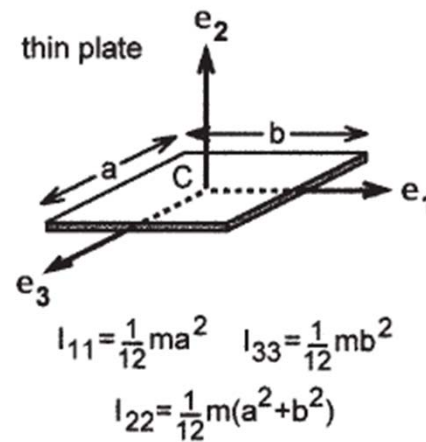
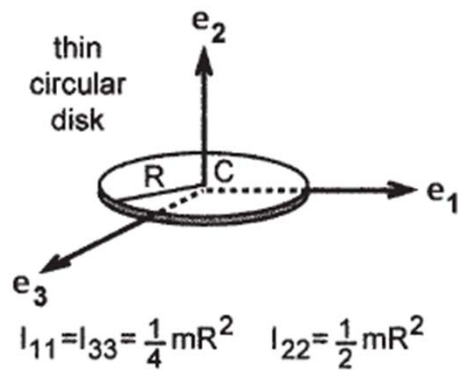
$$I_z = \int (x^2 + y^2) dm$$



O teorema de eixos *paralelos teorema* também é aplicável:  $I = \bar{I} + d^2 m$

# Cap.5 – ESTÁTICA

- Centros de Massa e Momentos de inércia de massa em geometria simples homogêneas





# Cap.5 – ESTÁTICA

- **Geometria de massas: Centro e Momentos de Inércia de Massa em modelos biomecânicos**

TABLE A.2.1. Mass moments of inertia and centers of gravity of young male adults: samples from data presented by Santschi et al. (1963)

Position	$L_1$	$L_2$	$L_3$	$I_1$	$I_2$	$I_3$
Subject 1: Age, 29; height, 72.2 in.; weight 173.5 lb						
1	3.62	5.31	32.2	132	119	13.1
2	3.52	5.31	29.9	174	159	12.5
3	3.34	5.31	29.5	172	135	41.9
4	7.70	5.31	23.9	41.4	37.3	29.9
Subject 2: Age, 23; height, 67.4 in.; weight, 147.3 lb						
1	3.50	4.25	29.8	95.6	81.9	10.3
2	3.49	4.25	27.5	126	110	10.2
3	3.18	4.25	27.2	125	90.3	30.0
4	7.03	4.25	21.7	32.9	30.4	21.5
Subject 3: Age, 33; height, 73.3 in.; weight, 203 lb						
1	3.81	5.61	31.8	144	129	14.2
2	3.67	5.61	29.4	188	172	13.8
3	3.56	5.61	29.5	187	142	51.2
4	7.75	5.61	23.4	48.9	41.9	36.7

Note: All lengths ( $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$ ) are inches (in.; multiply by 2.54 to convert to centimeters, cm) and moment of inertia ( $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$ ) in lb-in.-s<sup>2</sup> (multiply by 0.11298 to convert to kg-m<sup>2</sup>).

