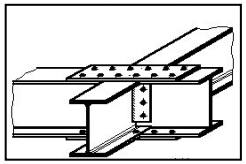
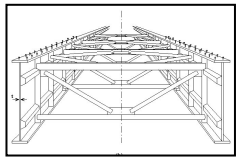
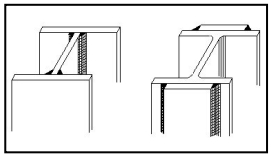
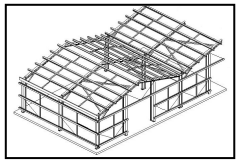
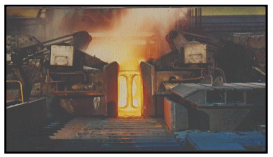
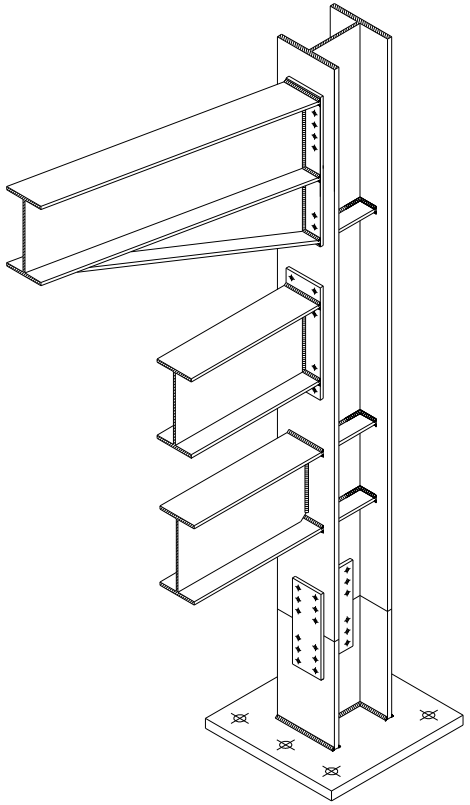
MECÂNICA ESTRUTURAL 1

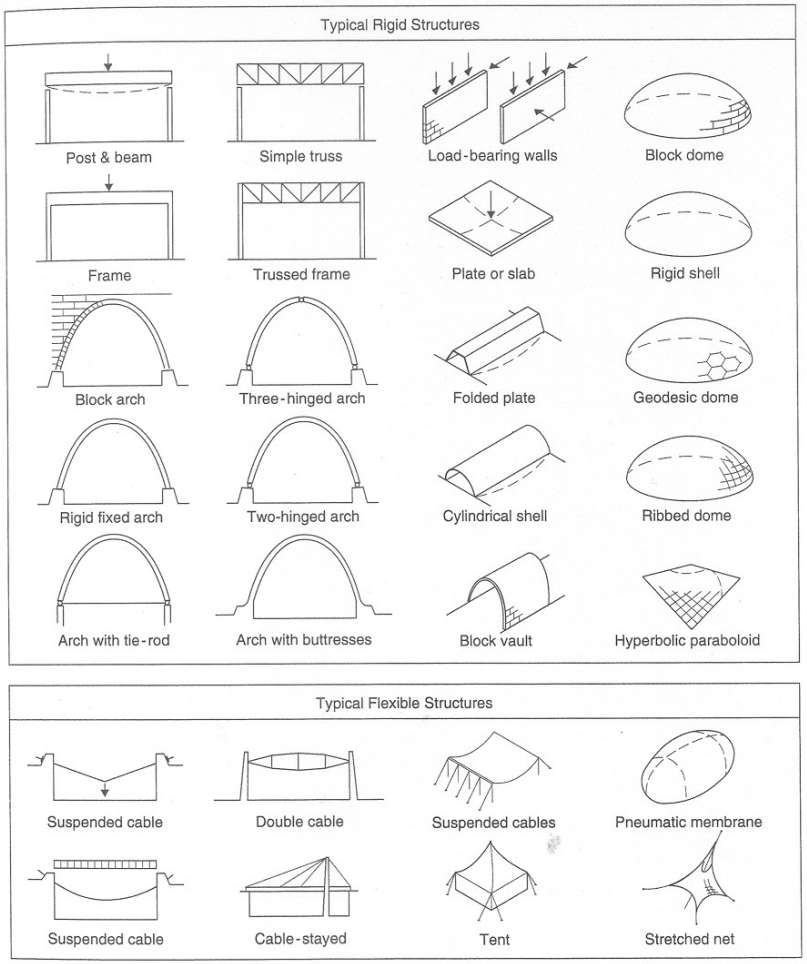


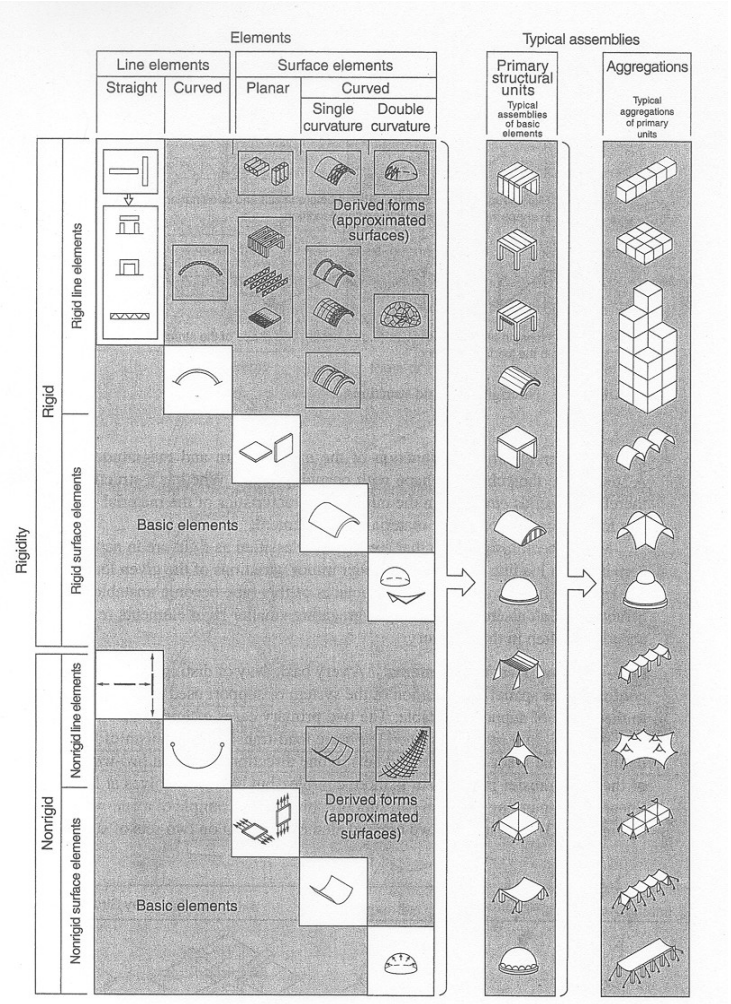


Paulo Piloto
Departamento de Mecânica Aplicada
Escola Superior de Tecnologia e de Gestão
Setembro 2006

ESTRUTURA

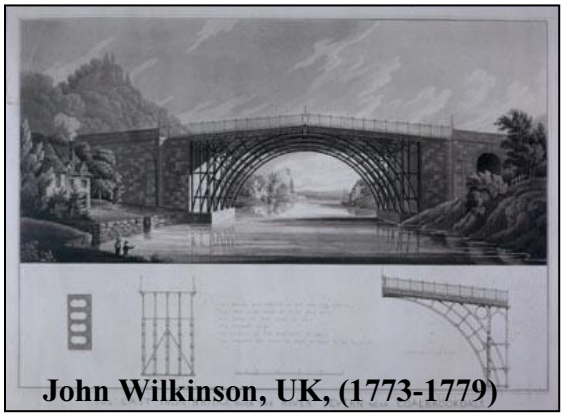
- Definição:
  - Qualquer corpo sólido capaz de oferecer resistência mecânica às acções exteriores, quaisquer que sejam a sua natureza, a sua forma e a maneira como está ligado ao meio envolvente.

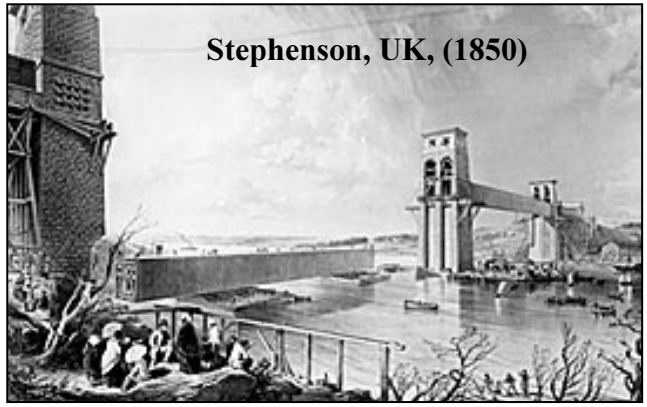




EVOLUÇÃO HISTÓRICA DAS ESTRUTURAS

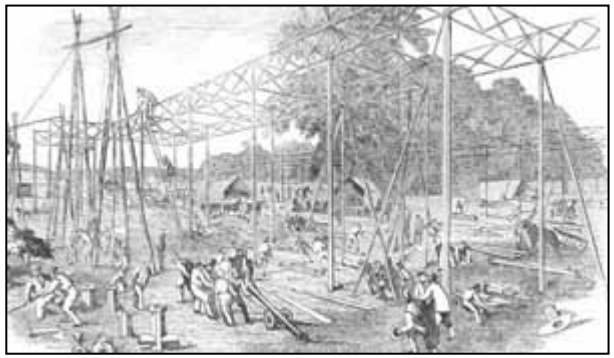
- Primeiras construções na idade da pedra (recintos cobertos com troncos de árvores e muros de pedra.
- A madeira apreceu como um dos primeiros materiais a ser utilizado com elemento resistente estrutural (flexão e tracção).
- O ferro, aço e o betão apareceram mais tarde como materiais alternativos.
- Século XVIII registam-se as primeriras pontes em ferro. 1ª ponte de arco de fundição (1773-1779) no rio Severn (Coalbrookdale). Seguindo-se a construção da ponte Menai Bridge (1819-1824).
- 1850, Stephenson utilizou materiais laminados e perfilados para construir a ponte Britannia, com 4 tramos de 71.90 [m] e 141.73 [m].

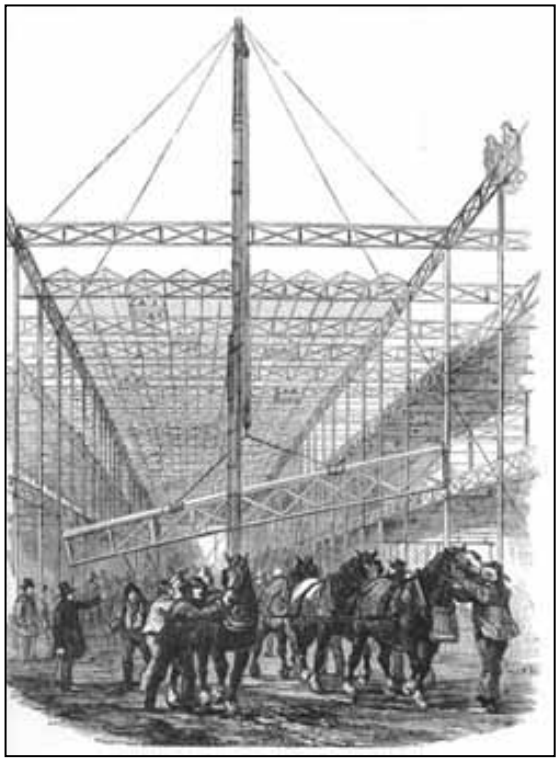

John Wilkinson, UK, (1773-1779)


Stephenson, UK, (1850)

FERRO NAS EDIFICAÇÕES

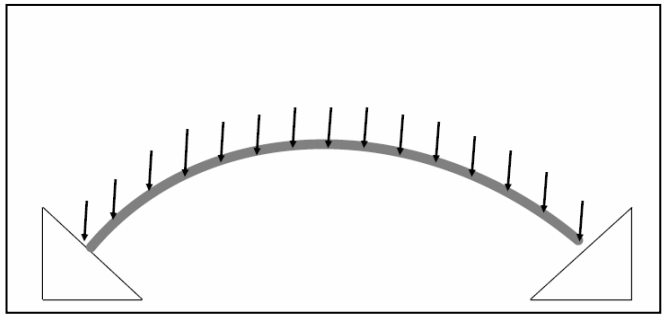
- 1770, Liverpool, elementos de ferro no suporte nas galerias St. Anne.
- 1781, Louvre-Paris, cobertura de ferro.
- 1797, Shrewsbury (fábrica Benyons), pilares, vigas e montantes de fundição de ferro.
- 1851, Palácio de crital, estrutura ligeira e cobertura em vidro.

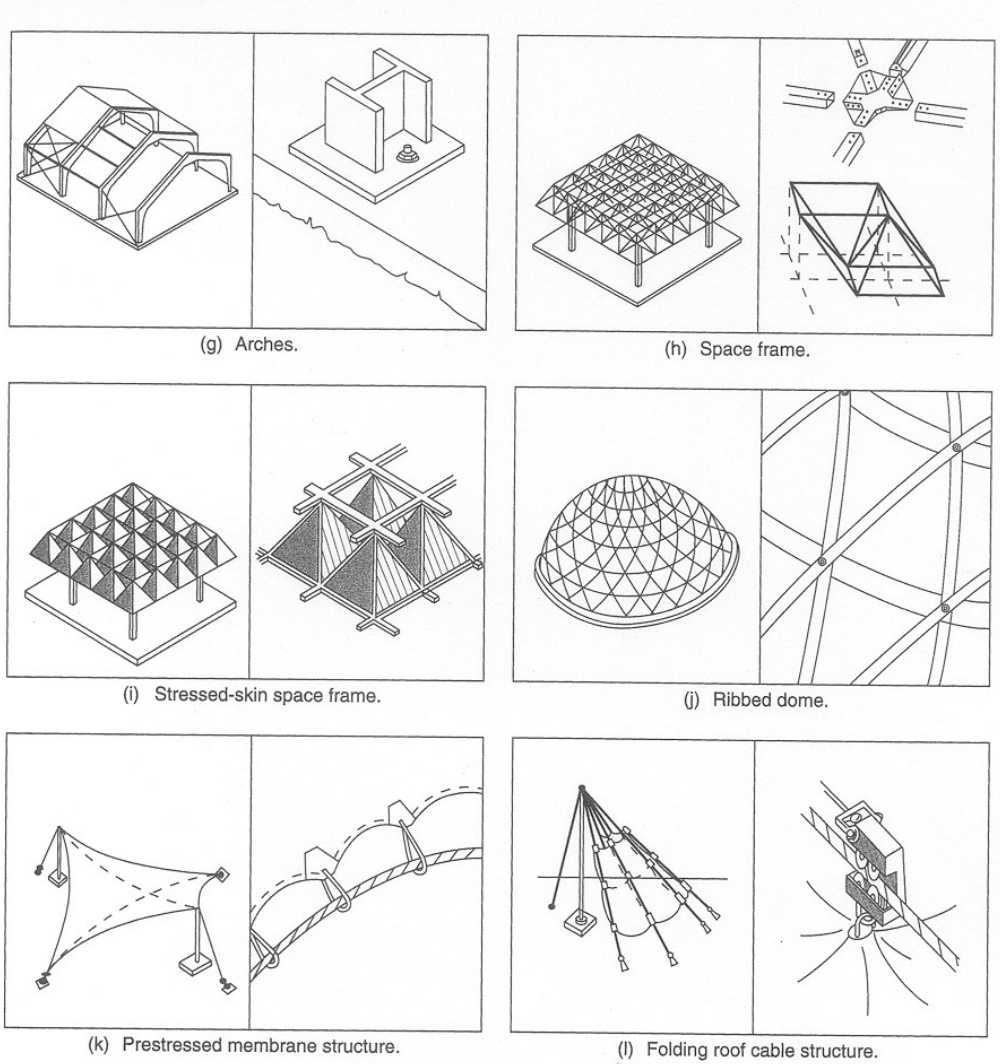




TIPOS DE ESTRUTURAS E PORMENORES CONSTRUTIVOS

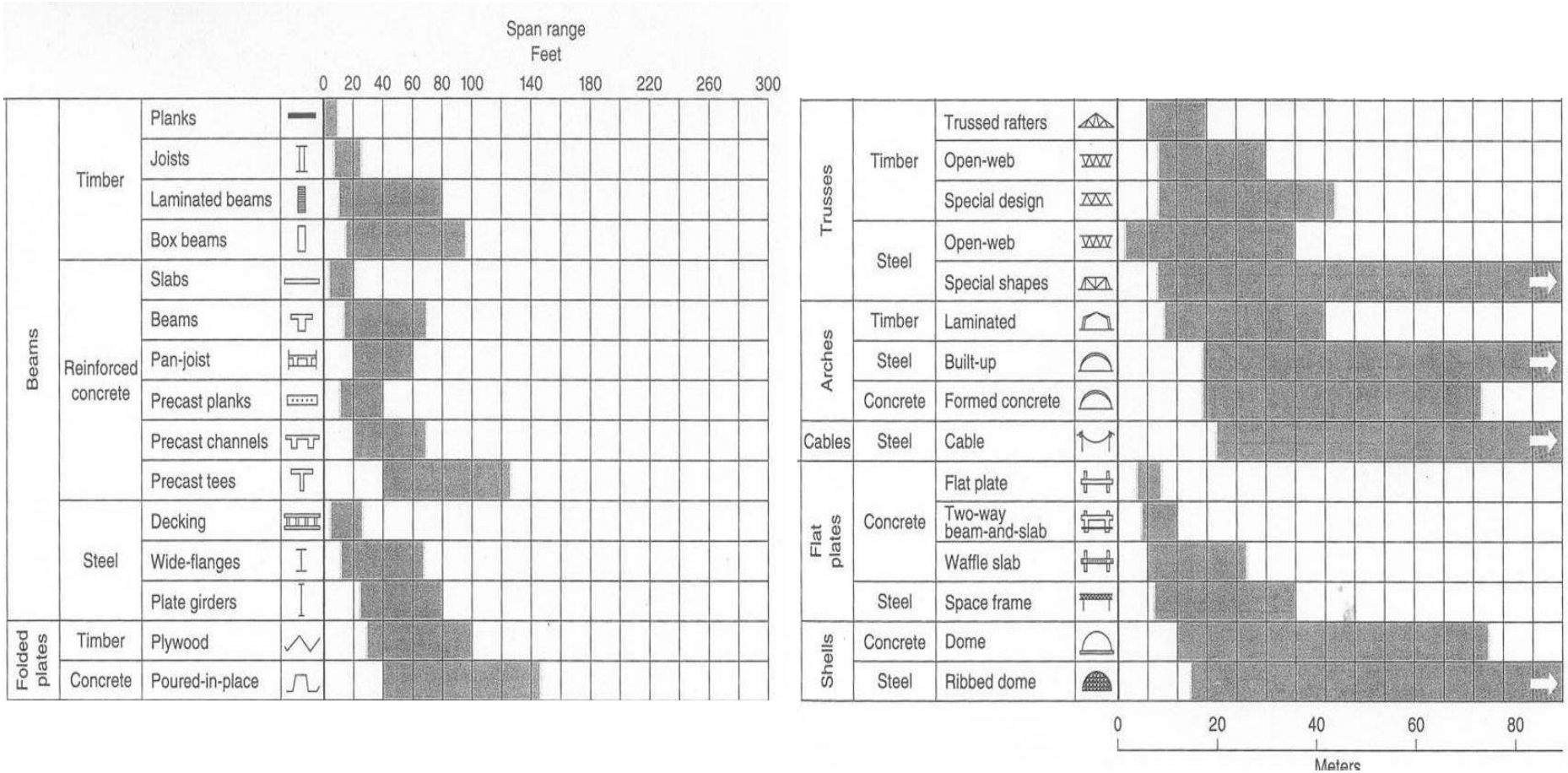
- Estruturas porticadas
- Estruturas treliçadas
- Estruturas em membrana
- etc.





ELEMENTOS ESTRUTURAIS BÁSICOS COM INDICAÇÃO DE COMPRIMENTOS PARA VÃOS

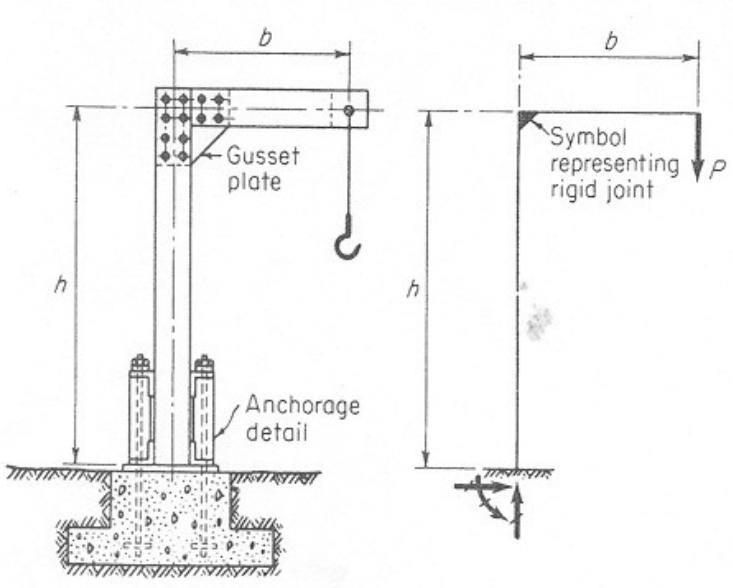
- Relação entre diferentes tipos de elementos / materiais e vãos a vencer.



ESTRUTURA REAL E MODELO DE CÁLCULO

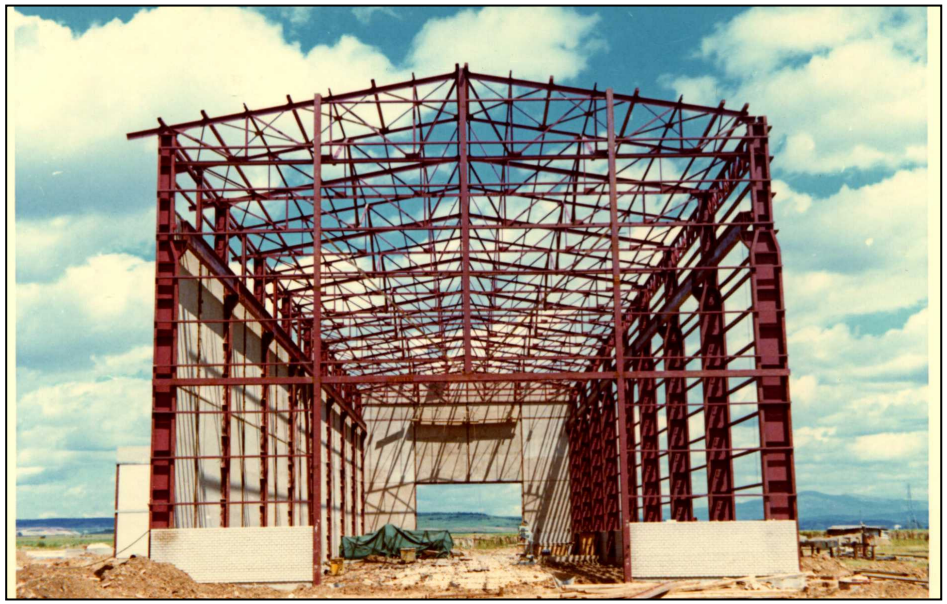
- Raramente uma estrutura real corresponderá à estrutura idealizada que foi considerada na análise:
  - O material de que a estrutura é feito não deverá possuir exactamente as propriedades assumidas;
  - As dimensões não correspondem exactamente aos seus valores teóricos;
  - Os detalhes estruturais como por exemplo, placas de reforço, barras de apoio ou outro elemento não principal, podem tornar a análise mais complicada.

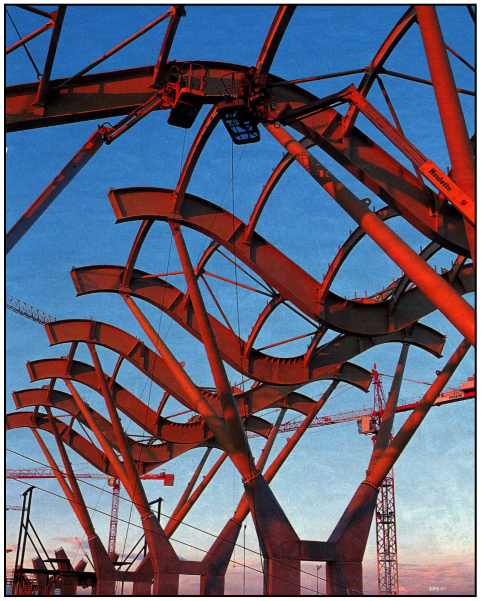
- Neste caso:
  - Foi assumido que a zona de encastramento ao solo poderia ser considerado um encastramento perfeito, no entanto, pode não ser o caso realmente existente.
  - A largura adicional da ligação à base da coluna foi ignorada bem como a placa de reforço na ligação coluna viga.
  - A placa de "gusset" foi assumida como uma ligação perfeitamente rígida, o que na realidade poderá permitir alguma rotação relativa entre os elementos.
  - A dimensão da coluna foi considerada entre a placa de apoio de ligação ao solo e a linha média de altura da viga.
  - O vão do elemento viga foi medido desde a linha média da coluna até ao ponto de aplicação da carga.



VANTAGENS DAS ESTRURAS EM AÇO

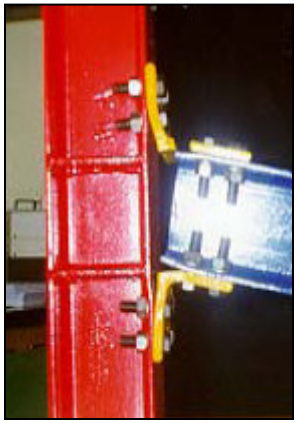
- Pré fabricação, permie diminuir os prazos de execução da obra;
- Grande resistência do material, permite vencer grandes vãos com elementos esbeltos.
- Secções reduzidas, conferem maior aproveitamento do espaço.
- Adaptibilidade de uma estrutura metálica, construída por elementos.
- Assemblagem com outros elementos não estruturais (fachadas e coberturas).
- Redução de custos. Um pavilhão em aço pode representar 10 a 15 % do custo total.
- Facilidade na alteração da forma de uma estrutura.
- Material reciclável, comportando sempre um valor.

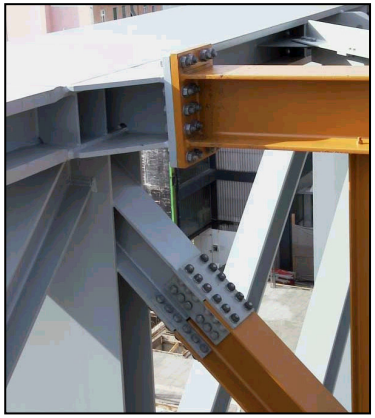


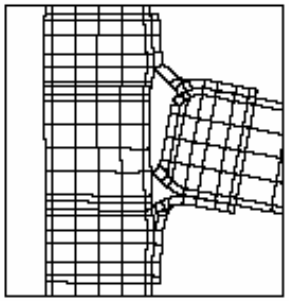


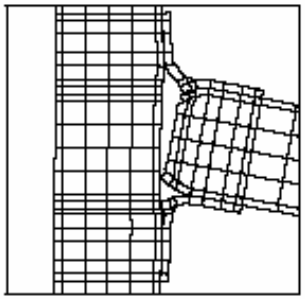
LIGAÇÕES DE ELEMENTOS E APOIOS

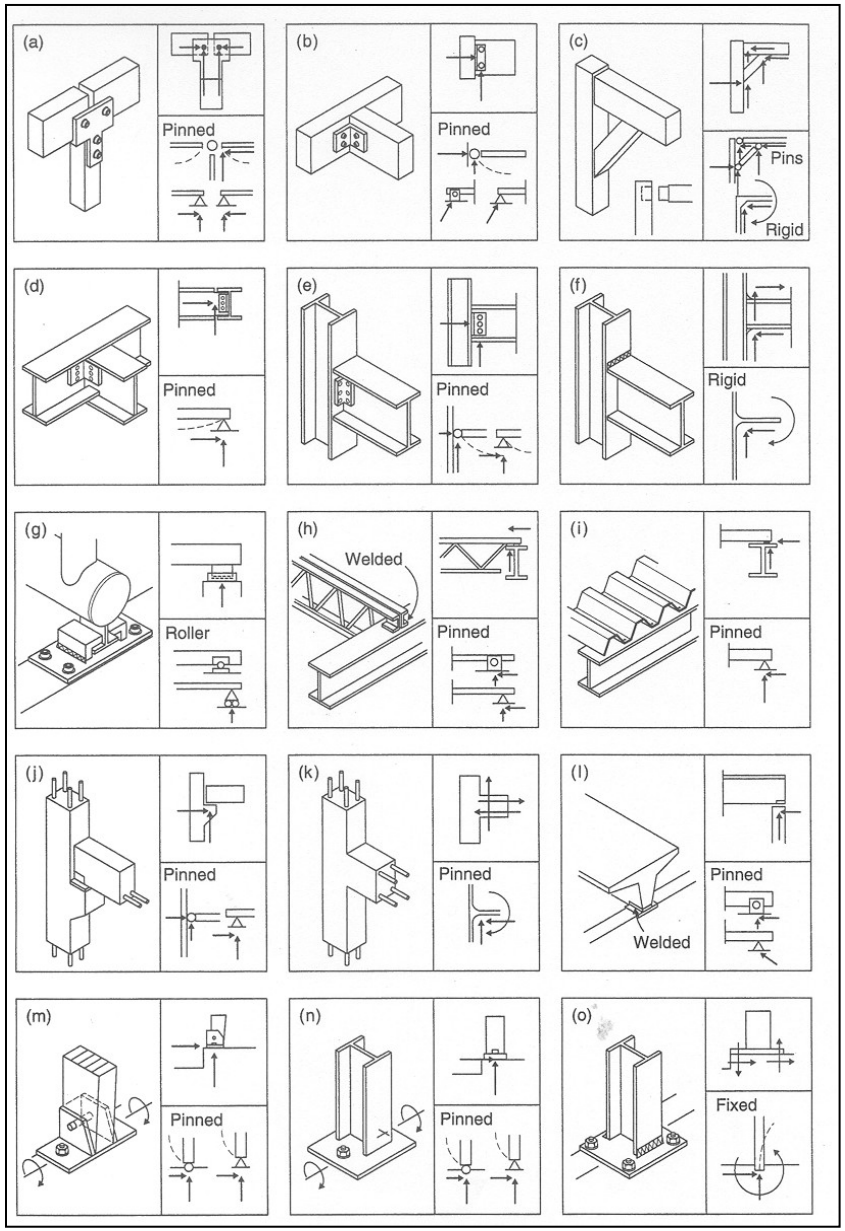
- Uniões rígidas, semi-rigidas e articuladas (função da capacidade de rotação).
- Grau de encastramento K, quociente entre o momento real resistente e o momento correspondente ao encastramento perfeito.





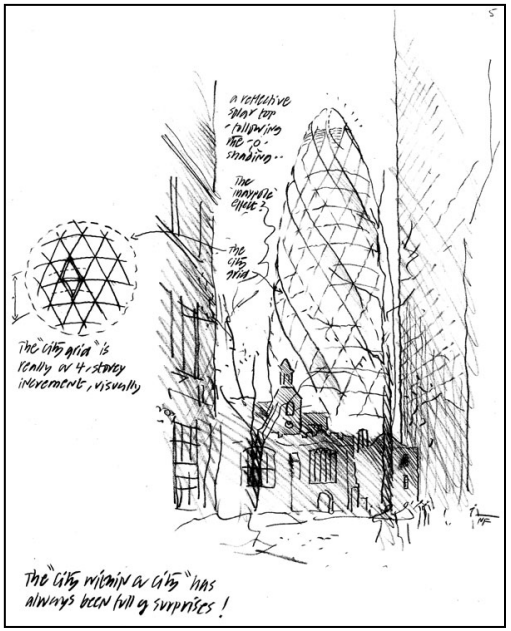


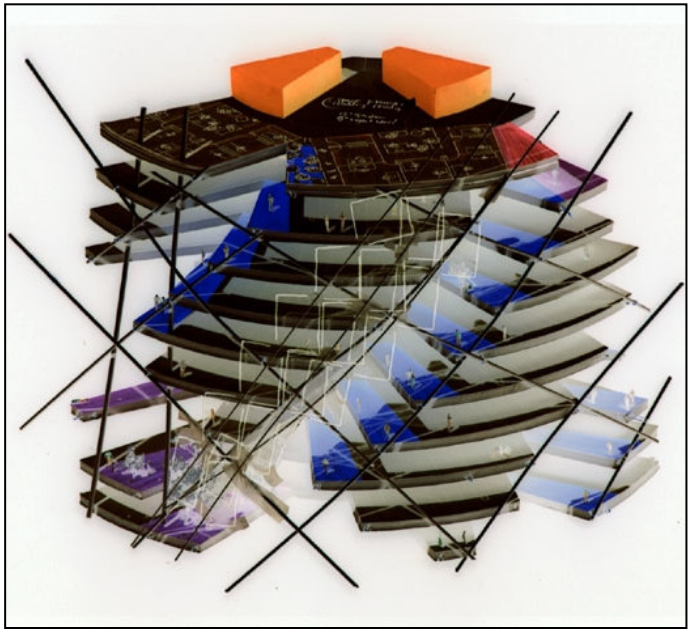




SOLUÇÕES ESTRUTURAIS

- Londres 30 ST MARY AXE – Edifício em construção metálica.

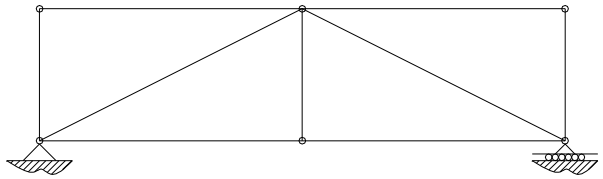


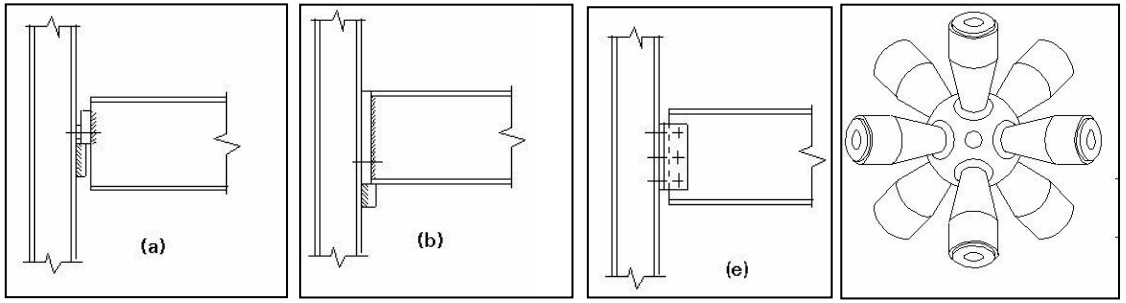


SOLUÇÕES ESTRUTURAIS

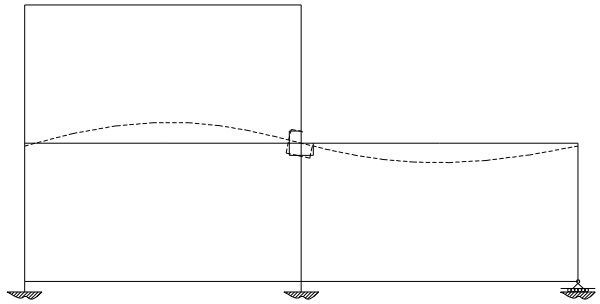
- Definida a configuração geral da edificação, é necessário decidir sobre a tipologia dos nós de ligação (do articulado até ao encastramento).
- Em alguns casos, recorre-se à análise simplificada de uma estrutura em pórticos planos (vigas e pilares).

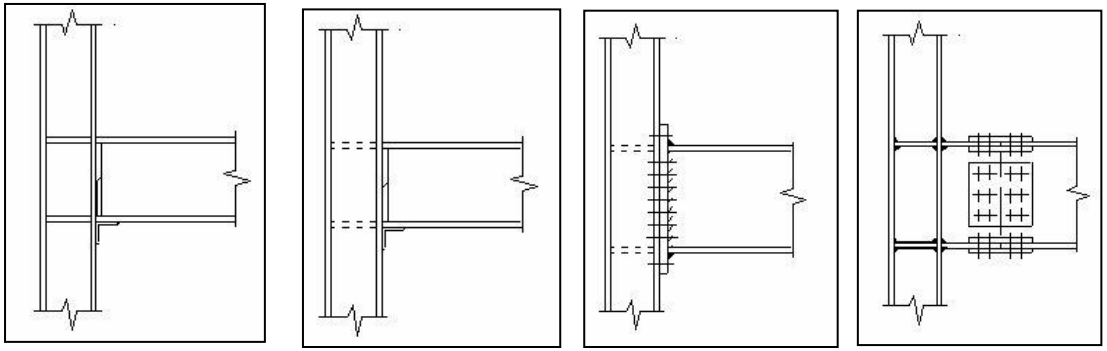
- Estrutura de nós articulados: Não se transmitem momento entre os elementos.
  - Pilares contínuos e vigas apoiadas;
  - Pilares contínuos e vigas contínuas e apoios simples entre ambos;





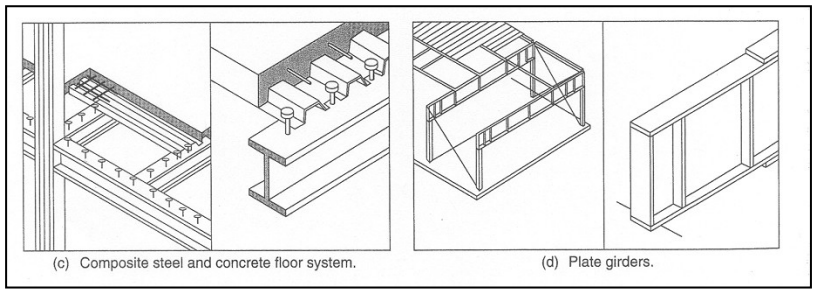
- Estrutura de nós rígidos: Transmitem momento entre os elementos.

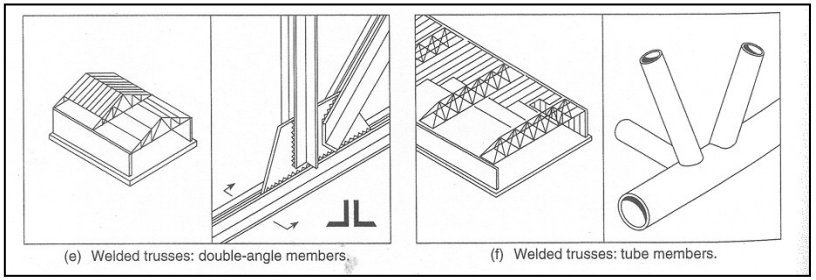


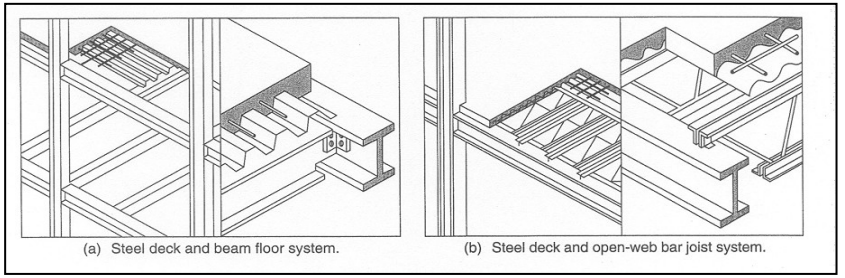


AÇO - PORMENORES DE CONSTRUÇÃO

- Elementos estruturais:
  - Pilares (elementos responsáveis pela transmissão de cargas aos apoios / fundações).
    - Secções laminadas do grupo H (HEA,HEB,HEM). Possuem raios de giração semelhantes em ambas as direcções, abas largas que facilitam as ligações
    - Secções tubulares. Aplicados em situações de compressão centrada. Ligações complexas.
    - Secções compostas: Combinação de perfis laminados soldados. Ligações mais complexas.
  - Vigas (elementos que recebem o carregamento das lajes e trasnmitem aos pilares, funcionando principalmente à flexão).
    - Secções laminadas do grupo IPE. Máximo rendimento para material mais distante do CG.
    - Secções laminadas do grupo H. Aplicados em situações com constrangimento geométrico (menor rendimento)
    - Secções compostas ("plate girders", etc.). Aplicações para grandes vãos.

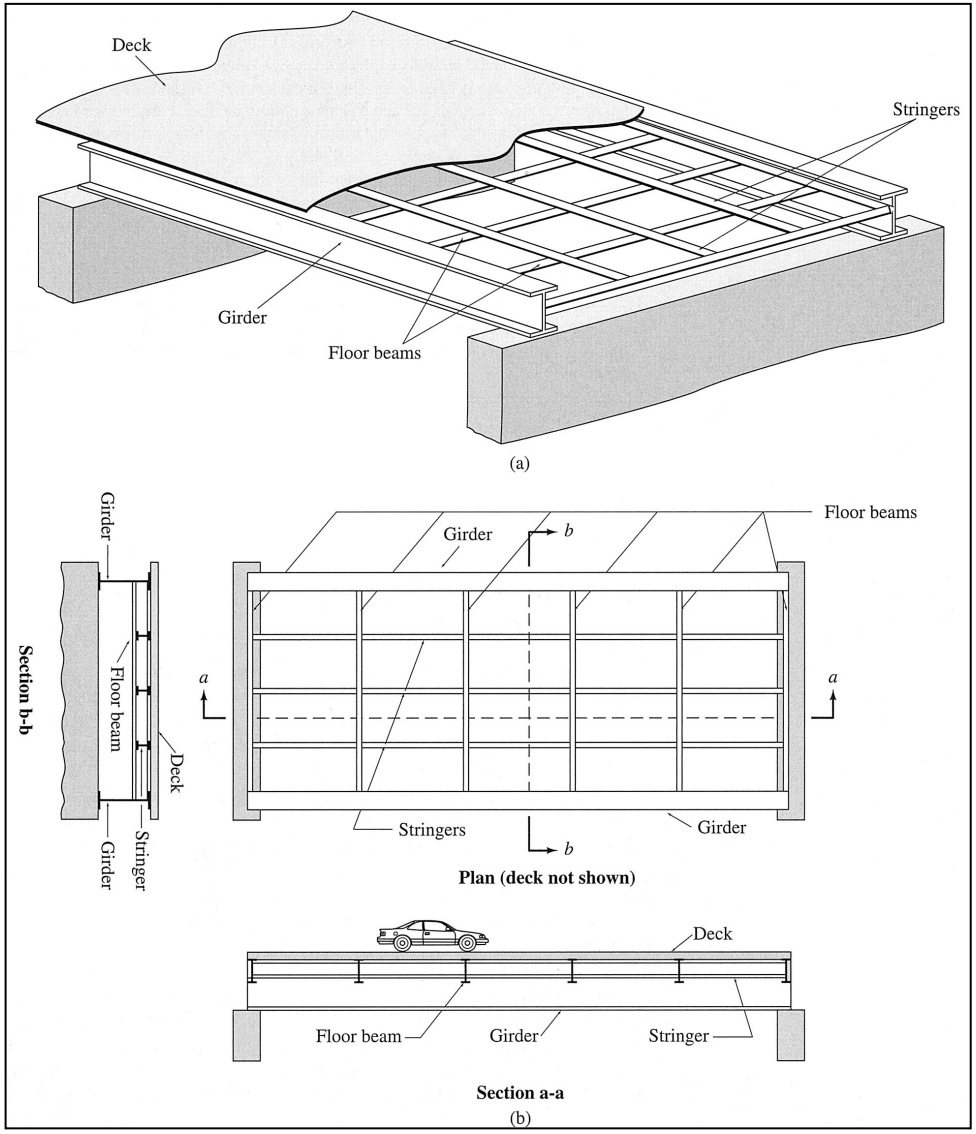






DETALHES CONSTRUTIVOS

- Pormenores para soluções em construção metálica.



CONCEITOS DA MECÂNICA DOS MATERIAIS

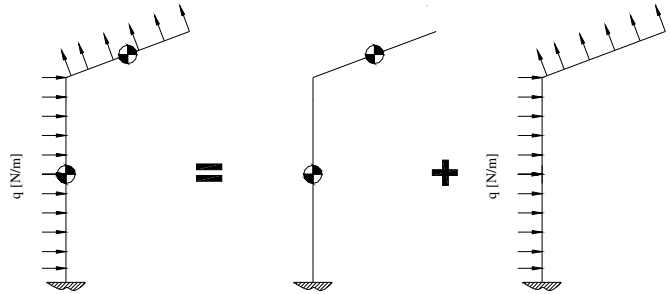
- Lei de hooke generalizada

$$\lambda = \frac{\nu.E}{(1+\nu)(1-2.\nu)}$$

$$\Delta = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$$

$$\sigma_{xx} = 2.G.\varepsilon_{xx} + \lambda.\Delta$$
$$\sigma_{yy} = 2.G.\varepsilon_{yy} + \lambda.\Delta$$
$$\sigma_{zz} = 2.G.\varepsilon_{zz} + \lambda.\Delta$$
$$\tau_{xy} = G.\gamma_{xy}$$
$$\tau_{xz} = G.\gamma_{xz}$$
$$\tau_{yz} = G.\gamma_{yz}$$

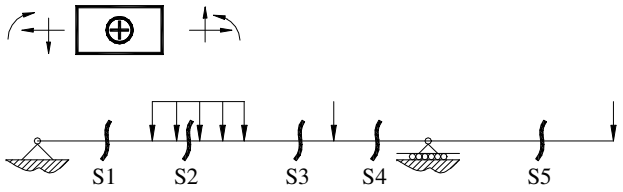
- Princípio da sobreposição de efeitos (domínio linear).



- 1ª Lei de Newton (Equilíbrio de corpos).

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum F_z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \sum M_x = 0 \\ \sum M_y = 0 \\ \sum M_z = 0 \end{cases}$$

- Diagrama de esforços internos e convenção de sinais.



EUROCÓDIGOS – PROGRAMA EUROPEU

- Normas Europeias (EN) com métodos de cálculo uniformizados para avaliar a resistência mecânica de estruturas, usadas:
  - Projectos de mecânica estrutural;
  - Verificação de conformidades em:
    - Resistência mecânica e estabilidade, incluindo segurança na utilização
    - Segurança no caso de fogo, incluindo durabilidade.
  - Determinar o comportamento dos componentes estruturais

- Normas Europeias (EN) estão divididos em 57 partes, que incluem "Steel, concrete, actions, composite steel and concrete, timber, masonry, aluminium. Geotechnical and seismic design".
- Eurocódigos com implementação voluntária até 2010.
- Depois 2010 normas a aplicar na União Europeia..

REGULAMENTO DE ESTRUTURAS DE AÇO PARA EDIFÍCIOS – (REAE)

- Objectivo:
  - objectivo deste regulamento visa estabelecer regras a observar no projecto e na execução de estruturas de aço para edifícios e obras análogas, cujos elementos sejam de aço laminado a quente.

- Quem pode projectar :
  - projectos de estruturas de aço devem ser elaborados por técnicos com formação adequada à natureza e importância das obras e para o efeito habilitados pela legislação em vigor.

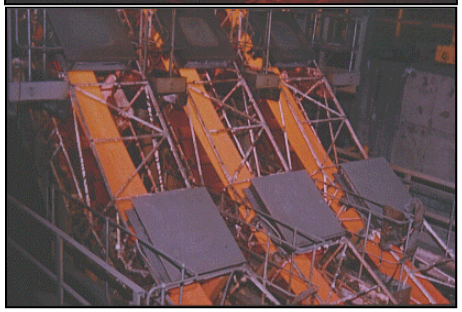
- Os projectos devem conter :
  - As peças escritas e desenhadas, necessárias para a justificação do dimensionamento e respectiva verificação, bem como para a execução da obra.
  - Estes projectos devem ser submetidos à verificação e aprovação das entidades competentes, de acordo com a legislação em vigor.

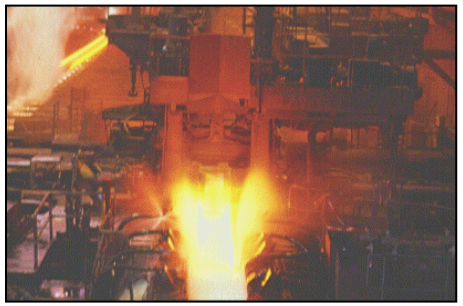
- Estruturas metálicas:
  - Uma estrutura metálica é constituída por diferentes elementos estruturais que se encontram ligados entre si pelas mais variadas formas. As ligações devem pois garantir a transferência de esforços considerados no projecto estrutural como um todo, bem como garantir a devida resistência nas ligações ao exterior .

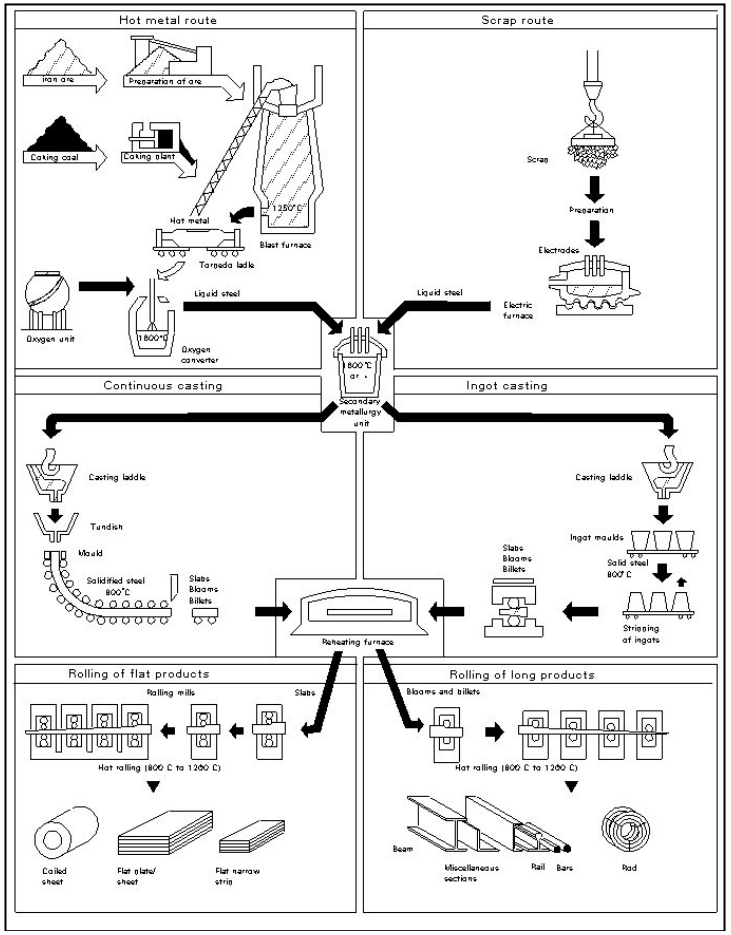
MATERIAL AÇO – PROPRIEDADES MECÂNICAS

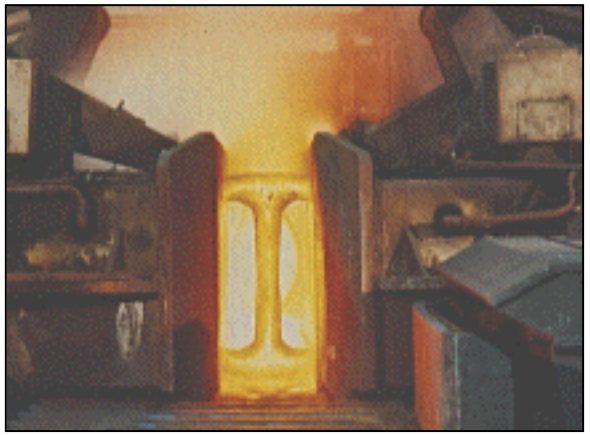
- Norma Portuguesa NP 1729 (1981):

Tensão de cedência (Mpa) = f_{yd}	Designação	Aço
235	S235	Fe360
275	S275	Fe430
355	S355	Fe510





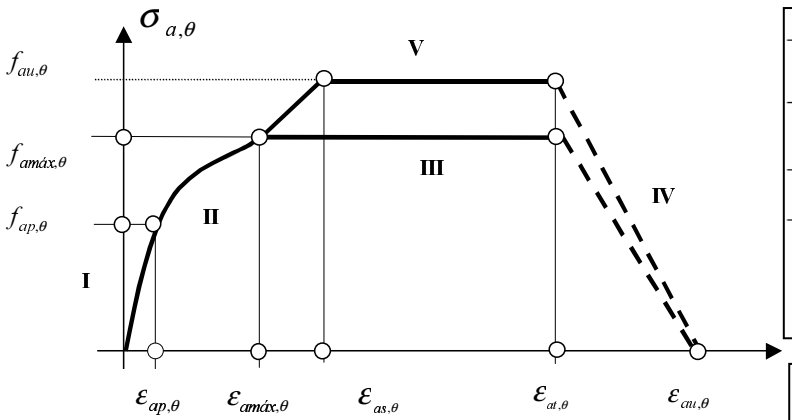




PROPRIEDADES MECÂNICAS À TEMP. AMBIENTE

- As propriedades do aço (REAEP) à temperatura ambiente são:
  - Módulo de elasticidade, E=206 [GPa];
  - Coeficiente de Poisson, $\upsilon = 0.3$;
  - Módulo de rigidez transversal, $G = E/2(1+\upsilon)$.

- As propriedades do aço (Eurocódigo) à temperatura ambiente são:



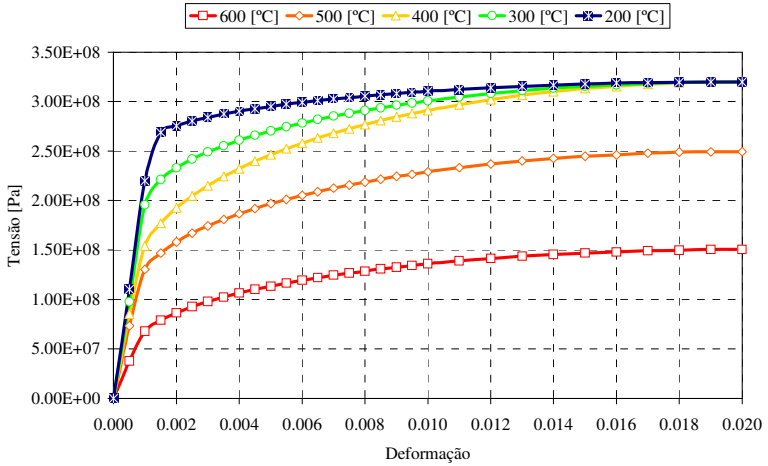
–	modulus of elasticity	$E = 210\,000\,N/mm^2$
–	shear modulus	$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \approx 81\,000\,N/mm^2$
–	Poisson's ratio in elastic stage	$\nu = 0,3$
–	coefficient of linear thermal expansion	$\alpha = 12 \times 10^{-6}\ perK$ (for $T \leq 100\ °C$)

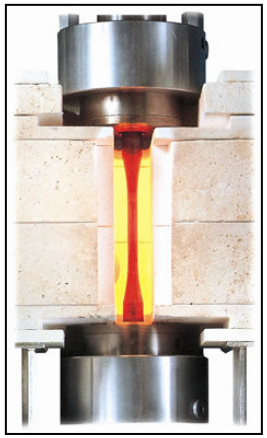
NOTE For calculating the structural effects of unequal temperatures in composite concrete-steel structures to EN 1994 the coefficient of linear thermal expansion is taken as $\alpha = 10 \times 10^{-6}\ per\ K$.

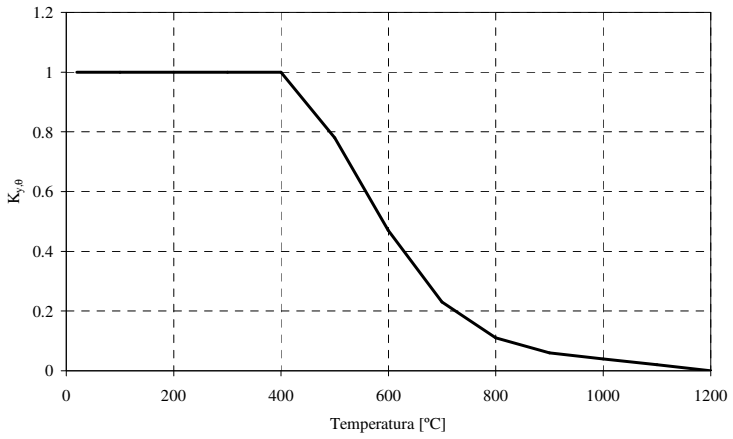
Standard and steel grade	Nominal thickness of the element t [mm]			
	$t \leq 40$ mm		40 mm $< t \leq$ 80 mm	
	f_y [N/mm^2]	f_u [N/mm^2]	f_y [N/mm^2]	f_u [N/mm^2]
EN 10025-2				
S 235	235	360	215	360
S 275	275	430	255	410
S 355	355	510	335	470
S 450	440	550	410	550
EN 10025-3				
S 275 N/NL	275	390	255	370
S 355 N/NL	355	490	335	470
S 420 N/NL	420	520	390	520
S 460 N/NL	460	540	430	540

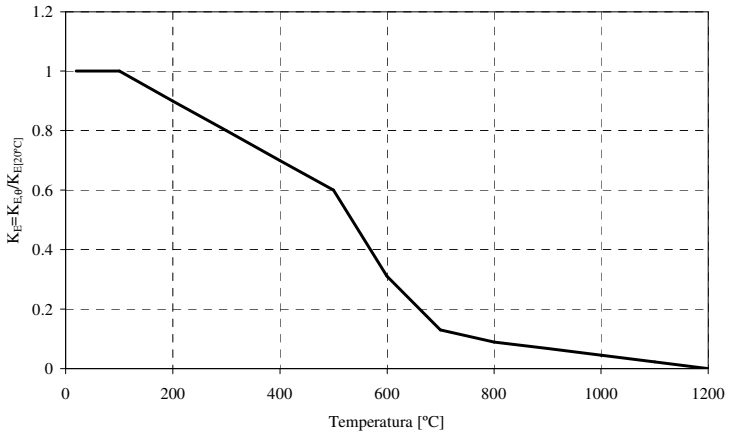
PROPRIEDADES MECÂNICAS A TEMP. ELEVADAS

- As propriedades do aço (Eurocódigo) a temperatura elevada são dependentes do nivel de temperatura e dos efeitos de transformação metalúrgica que ocorrem.



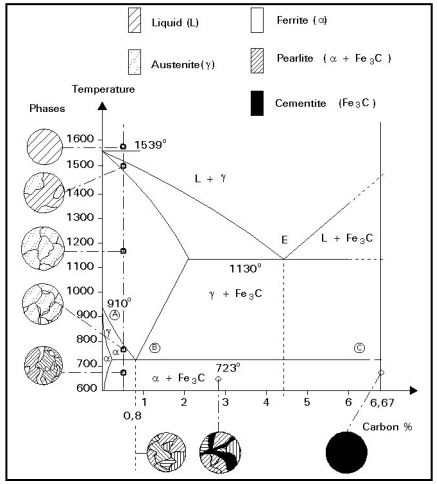


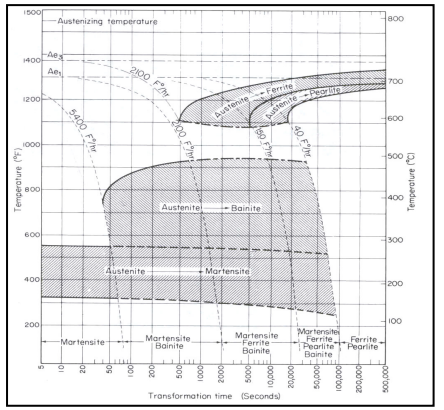


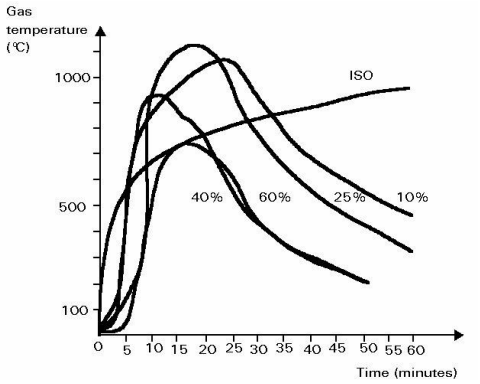


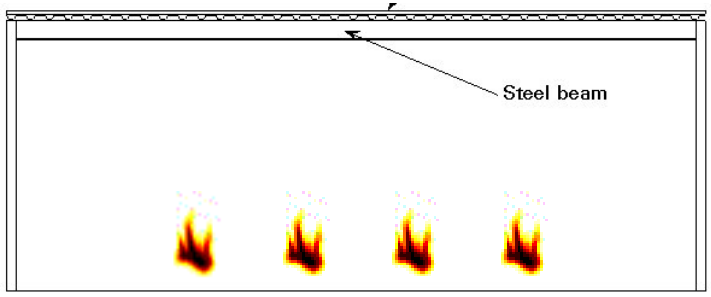
PROPRIEDADES MECÂNICAS A TEMP. ELEVADAS

- Elevados gradientes térmicos e diferentes procedimentos de arrefecimento modificam a estrutura do material e em consequência, as propriedades do aço.
  - Baixa taxas de arrefecimento após o aço ter sido submetido a temperaturas elevadas, implicam seguir o diagrama de equilíbrio.
  - Qualquer taxa de arrefecimento aplicada ao aço, interpretada como não seguindo o diagrama de equilíbrio, deve ser analisada no diagrama TTT.
  - Diferentes taxas de arrefecimento e níveis de temperatura, são responsáveis por produzir diferentes fases de estrutura material (ferrite+perlite, perlite+bainite, martensite, etc.).









PROPRIEDADES TÉRMICAS A TEMP. ELEVADAS

- Calor específico:
  - Variação singular decorrrente da transformação alotrópica de fase austenícica.

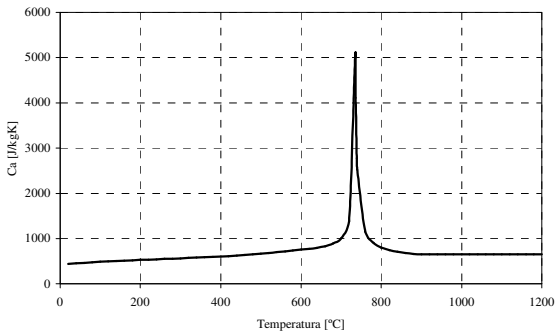
$$C_a = 425 + 7.73\times10^{-1}(\theta_a) - 1.69\times10^{-3}(\theta_a)^2 + 2.22\times10^{-6}(\theta_a)^3;\ \ 20 < \theta_a \le 600[^\circ\mathrm{C}]$$

$$C_a = 666 - \left[\frac{13000}{\theta_a - 738}\right];\ \ 600 < \theta_a \le 735[^\circ\mathrm{C}]$$

$$C_a = 545 + \left[\frac{17820}{\theta_a - 731}\right];\ \ 735 < \theta_a \le 900[^\circ\mathrm{C}]$$

$$C_a = 650;\ \ 900 < \theta_a \le 1200[^\circ\mathrm{C}]$$

$$C_a = 600;\ \ 20^\circ\mathrm{C} < \theta_a \le 1200[^\circ\mathrm{C}]$$ (Simplificação)

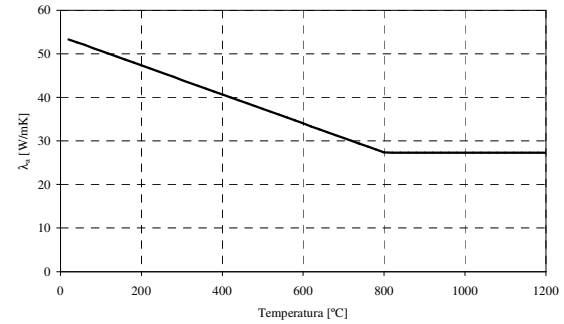


- Conductividade:
  - Variação singular semelhante.

$$\lambda_a = 54 - 3.33\left(\frac{\theta_a}{100}\right);\ \ 20 < \theta_a \le 800\ [^\circ\mathrm{C}]$$

$$\lambda_a = 27.3;\ \ 800 < \theta_a \le 1200\ [^\circ\mathrm{C}]$$

$$\lambda_a = 45;\ \ 20 < \theta_a \le 1200[^\circ\mathrm{C}]$$ (Simplificação)



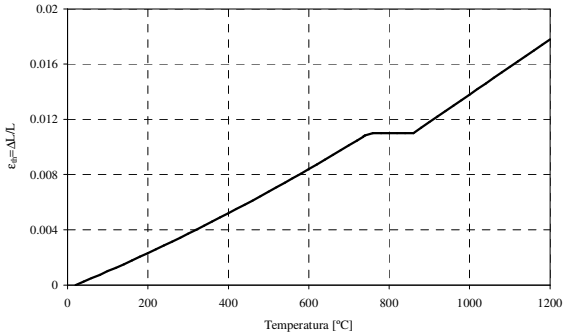
- Coeficiente de expansão térmica, função da variação da deformação térmica :
  - Variação singular semelhante.

$$\varepsilon_{th} = -2.416\times10^{-4} + 1.2\times10^{-5}\times\theta_a + 0.4\times10^{-8}\times\theta_a{}^2;\ \ 20 < \theta_a \le 750[^\circ\mathrm{C}]$$

$$\varepsilon_{th} = 11.0\times10^{-3};\ \ 750 < \theta_a \le 860[^\circ\mathrm{C}]$$

$$\varepsilon_{th} = -6.2\times10^{-3} + 2.0\times10^{-5}\times\theta_a;\ \ 860 < \theta_a \le 1200[^\circ\mathrm{C}]$$

$$\varepsilon_{th} = 14.0\times10^{-6}(\theta_a - 20)$$ (Simplificação)



PROPRIEDADES A TEMPERATURAS ELEVADAS

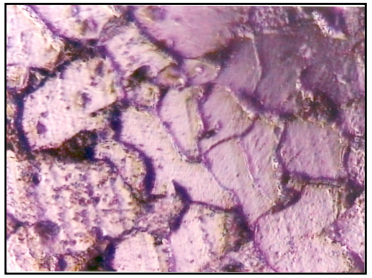
- Propriedades: Valores característicos:

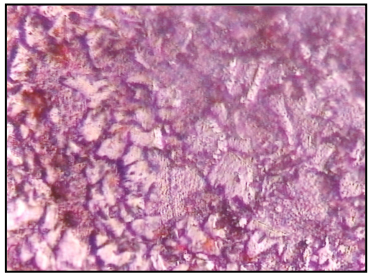
$$\boxed{X_{k,\theta} = k_\theta X_k}$$

X_k Representa o valor característico da propriedade mecânica à temperatura ambiente

k_θ Representa o factor de redução da propriedade em função da temperatura

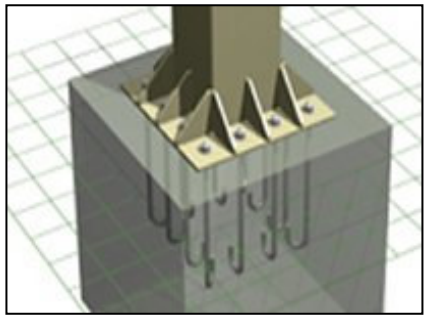
- Efeitos térmicos:
  - Logo que o aço é submetido a um aumento de temperatura, apresenta uma perda progressiva da sua rigidez, devido, em parte, à diminuição do módulo de elasticidade.
  - Por outro lado, numa análise global, o aumento de temperatura introduz dilatações térmicas mais ou menos constrangidas pelos elementos adjacentes. Estes constrangimentos criam tensões adicionais, equivalentes a um aumento das solicitações exteriores.



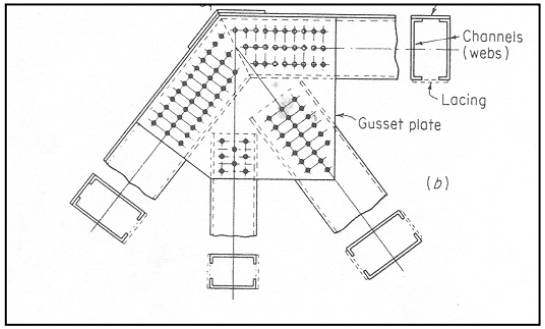


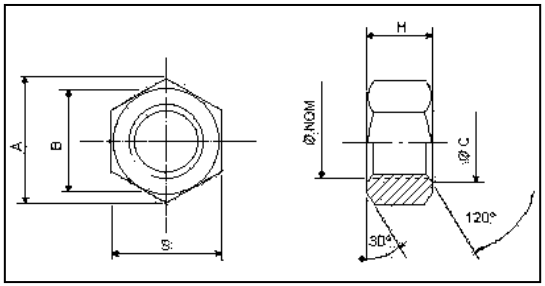
Exemplo de amostras ampliadas 500 x; a) retirada à temperatura ambiente; b) retirada à temperatura ambiente depois de submetida a ensaio de 600 [ºC], com arrefecimento natural.

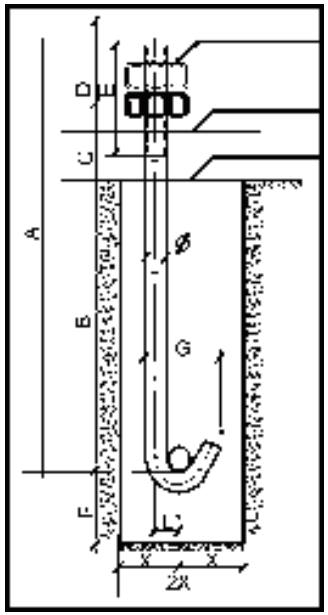
ELEMENTOS DE LIGAÇÃO

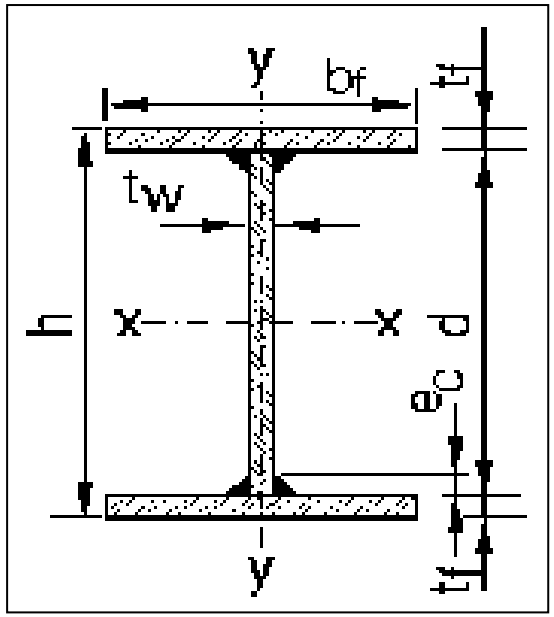


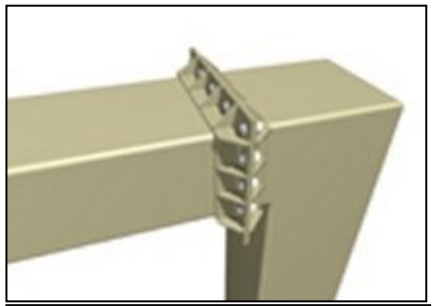
- Rebites;
- Parafusos;
- Porcas;
- Anilhas;
- metal de adição (No caso de adição de metal para o processo de soldadura, as propriedades do aditivo não deverão ser inferiores às dos materiais de base)
- **etc.**





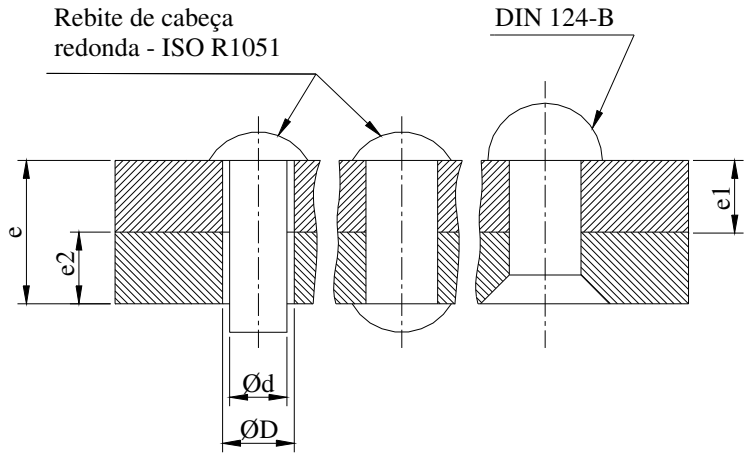






LIGAÇÕES REBITADAS – DISPOSIÇÕES DE PROJECTO

- Rebites de dois tipos (cabeça redonda e cabeça achatada).

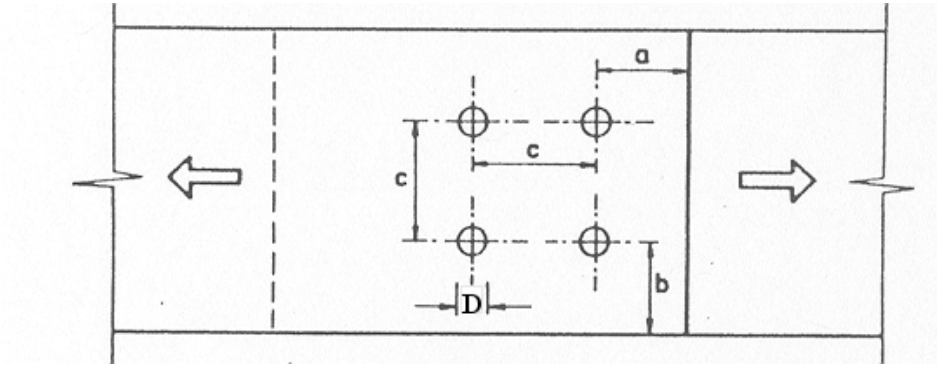


- Diposições de projecto:

$\phi d \leq 1 \text{ a } 2\phi D$

$\phi d \geq \text{maior } e_i$

$e \leq 5\phi D$



$2\phi D \leq a \leq 3\phi D$

$1{,}5\phi D \leq b \leq 2{,}5\phi D$

$3\phi D \leq c \leq 7\phi D$ (*)

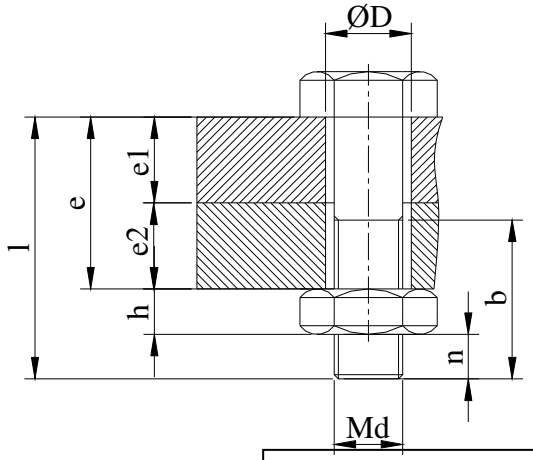
$3\phi D \leq c \leq 10\phi D$ (**)

* ambientes muito agressivos

** ambientes pouco ou moderadamente agressivos

LIGAÇÕES APARAFUSADAS – DISP. DE PROJECTO

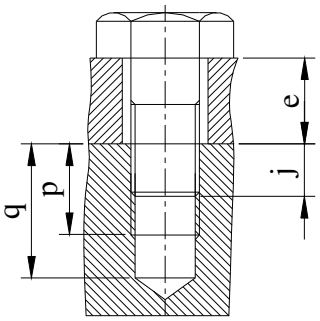
- As ligações por parafusos podem ser:
  - correntes.
  - pré esforçadas (funcionamento por aperto e de atrito). Parafusos de classe de qualidade 8.8, ou superior. A especificação de parafusos pré–esforçados nos projectos deverá incluir a indicação dos correspondentes momentos de aperto.



Parafuso e porca

$l \geq e_1 + e_2 + h + n$

$n \leq 0.3d$



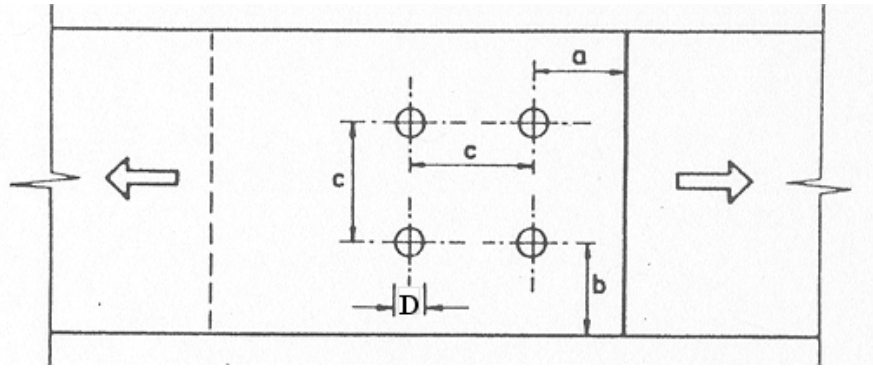
Parafuso e peça roscada

$l \geq e + d$

$l \geq e + 1.5d$

$j = l - e$

- Rigidez corrente: $\phi D \leq \phi d + 2 \quad \phi d < 24$; $\phi D \leq \phi d + 3 \quad \phi d \geq 24$
- Rigidez elevada:
  - Folgas inferiores.
- Diposição:
  - Semelhante aos rebites.

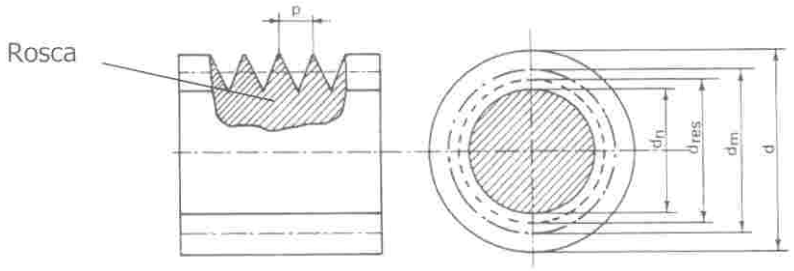


- Classes mais utilizadas em construção metálica:
  - 4.6, 5.6, 6.8, 8.8 e 10.9
  - Solicitações estáticas: todas as classes
  - Solicitações dinâmicas: classes superiores ou iguais a 8.8.

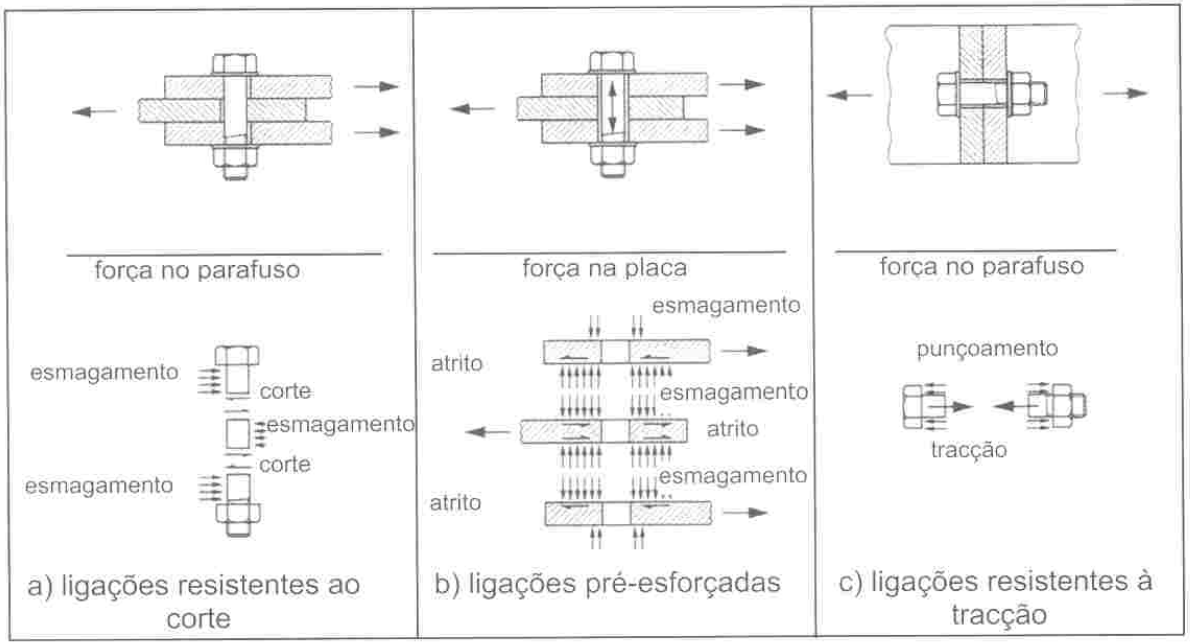
LIGAÇÕES APARAFUSADAS – DISP. DE PROJECTO

- Resistência do parafuso é normalmente avaliada pela secção resistente.
- Diâmetro da secção resistente:

$$d_{res} = \frac{d_n + d_m}{2}$$



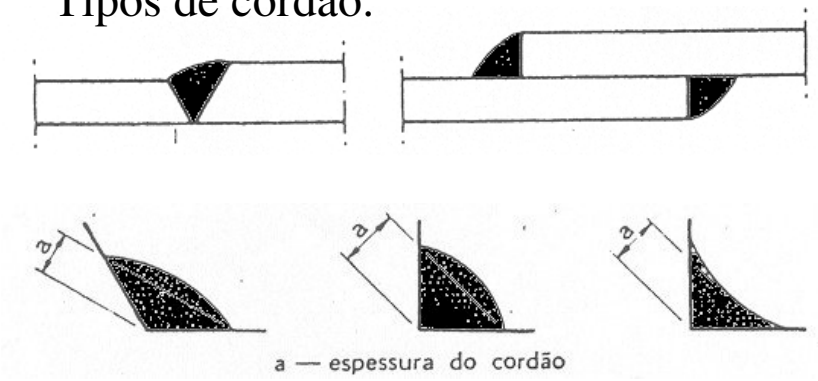
- Comportamento numa ligação:
  - A resistência última deverá ser verificada no corte, esmagamentoe tracção.

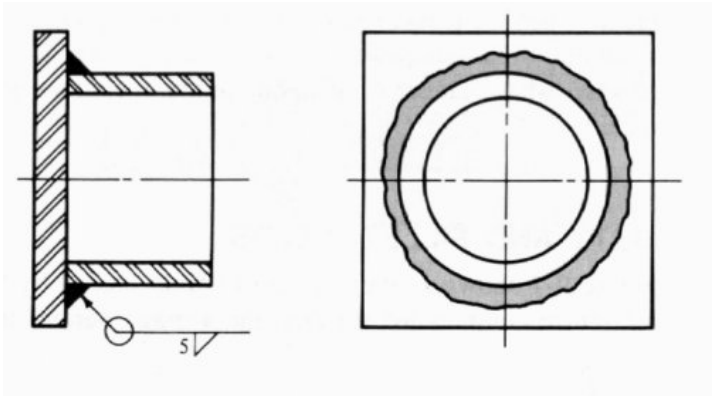


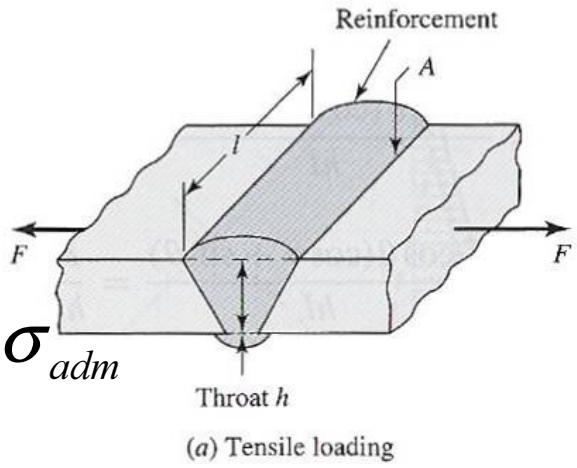
LIGAÇÕES SOLDADAS – DISP. DE PROJECTO 1

- Aspectos a considerar:
  - Estado de tensões criadas;
  - Concentração excessiva da soldadura;
  - Evitar soldar elementos de espessura superior a 30 [mm].

- Tipos de cordão:

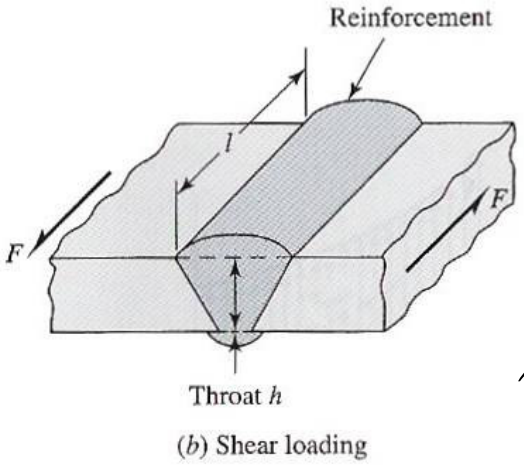






(a) Tensile loading

$$\sigma = \frac{F}{Lh} \leq \sigma_{adm}$$

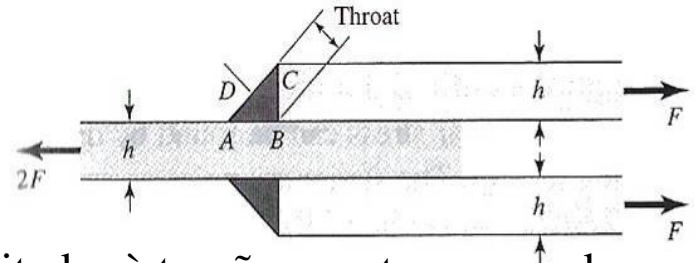


(b) Shear loading

$$\tau = \frac{F}{Lh} \leq \tau_{adm}$$

LIGAÇÕES SOLDADAS – DISP. DE PROJECTO 2

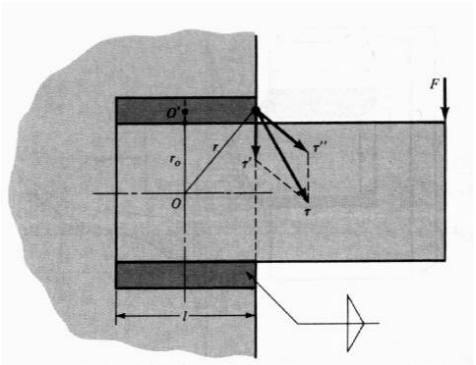
- O dimensionamento de um cordão de ângulo faz-se pelo cálculo da resistência da garganta ("Throat").



- O dimensionamento de juntas soldadas solicitadas à torção e ao tranverso deve incluir as duas componentes.

$$\tau' = \frac{F}{A}$$

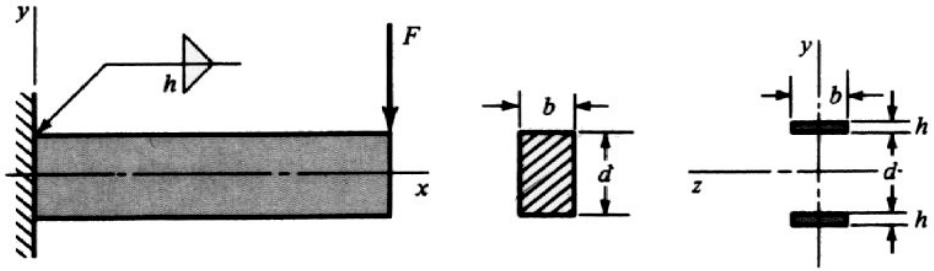
$$\tau'' = \frac{M\,r}{J} = \frac{M\,r}{0{,}707\,h\,J_u}$$



- O dimensionamento de juntas soldadas solicitadas à flexão:

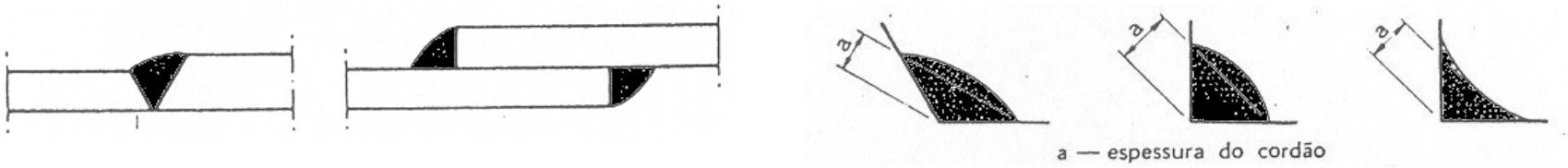
$$\tau = \frac{F}{A}$$

$$\tau = \frac{M\,c}{I} = \frac{M\,c}{0{,}707\,h\,I_u}$$



LIGAÇÕES SOLDADAS – DISP. DE PROJECTO 3

- A espessura dos cordões não deve ser inferior a 3 [mm];
- A espessura dos cordões de ângulo não deverá ser superior a 70% da menor espessura dos elementos a ligar;
- Os cordões de topo contínuos devem ocupar toda a extensão da justaposição;
- Os cordões de ângulo contínuos não deverão apresentar comprimento inferior a 40 [mm] ;
- Nos cordões de topo descontínuos, o comprimento de cada troço não deverá ser inferior a quatro vezes a espessura do elemento mais fino a ligar e o intervalo entre dois troços sucessivos não deve exceder doze vezes aquela espessura;
- No caso dos cordões de ângulos descontínuos, o comprimento de cada troço não deverá ser inferior a quatro vezes a espessura do elemento mais fino a ligar. O intervalo entre dois troços sucessivos não deve exceder dezasseis vezes aquela espessura, no caso de elementos sujeitos a esforços de compressão, e a 24 vezes essa espessura, no caso de elementos sujeitos a esforços de tracção.



VERI. DE SEGURANÇA EM ESTRUTURAS DE AÇO

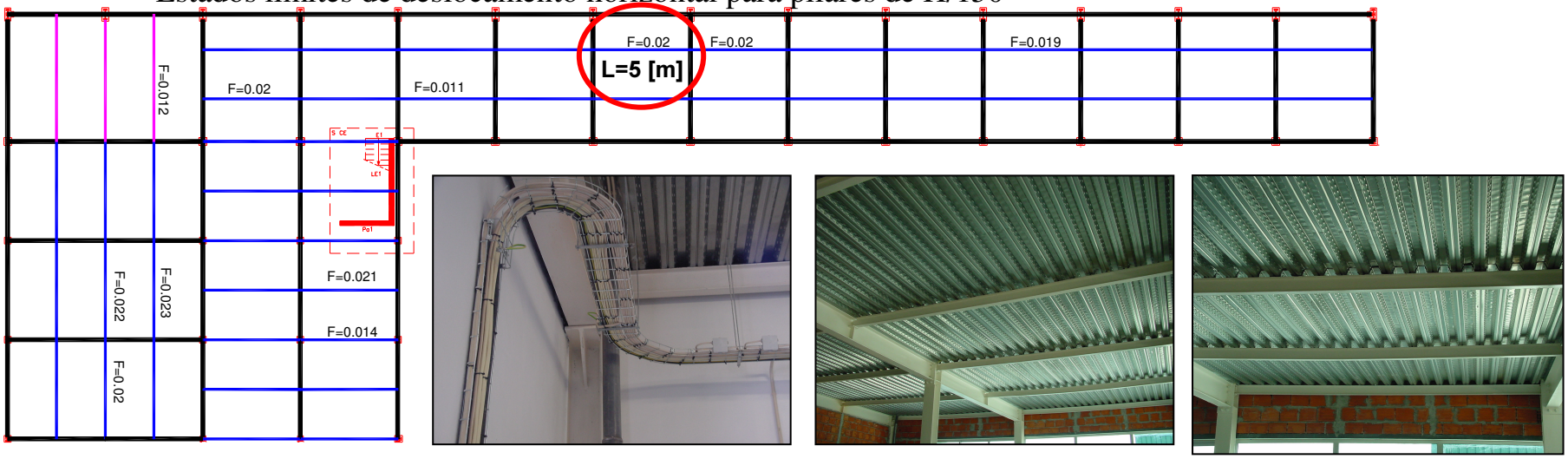
- Verificação de acordo com os critérios estabelecidos no RSA (regulamento de segurança e acções de estruturas de edifício e pontes).
- O REAPE tem em consideração o tipo de material utilizado (aço), objectivando o seu comportamento relativamente a:
  - Estados limites de serviço ou de utilização (ELS) (preocupação pelo serviço);
  - Estados limites últimos (ELU) (preocupação pelo colapso).

- Estados Limites: Qualquer estado a partir do qual se considera que a estrutura fica prejudicada total ou parcialemente na sua capacidade para desempenhar as funções que lhe são atribuídas:
  - ELS – Da ocorrência resultam prejuízos pouco severos. São definidos tendo em conta a duração (ou número de repetição) do estado em relação ao período de vida da estrutura.
    - ELS muito curta duração (poucas horas do período de vida).
    - ELS curta duração (duração intermédia, em geral 5% do período de vida).
    - ELS longa duração (metade do período de vida).
  - ELU – Da ocorrência resultam prejuízos muito severos. Qualquer ocorrência corresponderá a um estado limite, independente da sua duração.

- A especificação dos Estados Limites a considerar dependem do tipo de estrutura e do material.

ESTADOS LIMITES - EXEMPLOS

- ELU (Estado limite útlimo):
  - Estado limite último sem que ocorra plastificação.
  - Estado limite último de encurvadura (instabilidade de elementos).
  - Estado limite de perda de equilíbrio (considerando o derrubamento ou deslocamento da Estrutura considerada como um corpo rígido).
  - Estado limite último de resistência com plastificação, correspondentes à ocorrência de deformações plásticas em certas secções ou mesmo à transformação da estrutura ou de parte dela num mecanismo, por formação de rótulas plásticas.
- ELS (Estado limite de serviço):
  - Estados limites de deslocamento para vigas de pavimentos - uma flecha inferior ou igual L/400
  - Estados limites de deslocamento para vigas de pavimentos com suporte de divisórias correntes - o valor da flecha deverá ser inferior a L/500
  - Estados limites de deslocamento para madres de cobertura com materiais correntes de revestimento, deverá ser adoptado um valor de L/200
  - Estados limites de deslocamento horizontal para pilares de H/150



EST. LIM. ÚLTIMO DE RESIS. SEM PLASTIFICAÇÃO

- Em casos de estados de tensão simples:
  - Tensões normais: $\sigma_{Sd} \leq \sigma_{Rd}$
  - Tensões tangenciais: $\tau_{Sd} \leq \tau_{Rd}$

As tensões solicitantesde cálculo, são determinadas pelas teorias da elasticidade ou da mecânica dos materiais, considerando as combinações de acções e os coeficientes de segurança especificados no RSA. No caso de acções permanentes cujos valores possam ser previstos com muito rigor, o coeficiente de segurança poderá ser reduzido até 1.35.

As tensões resistentes cálculo, são determinadas através de:

$$\sigma_{Rd} = f_{yd} \qquad \tau_{Rd} = \frac{1}{\sqrt{3}} f_{yd}$$

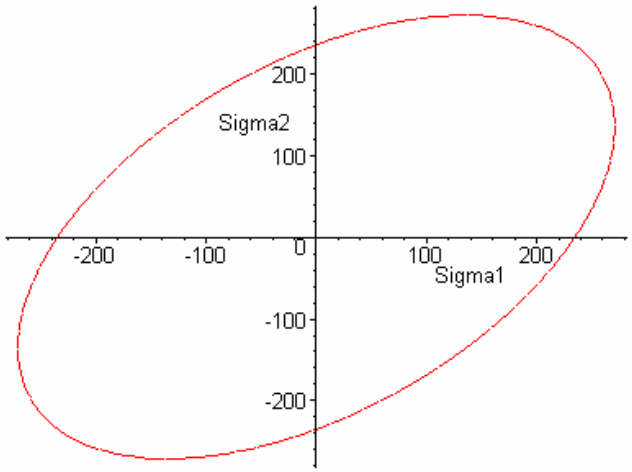
EST. LIM. ÚLTIMO DE RESIS. SEM PLASTIFICAÇÃO

- Em casos de estados de tensão duplo:
  - A tensão solicitante de cálculo deverá ser determinada segundo um critério de resistência específico, EX: von Mises – Hüber.

$$\sigma_{Sd,ref} = \sqrt{\sigma_{Sd,x}^2 + \sigma_{Sd,y}^2 - \sigma_{Sd,x} \times \sigma_{Sd,y} + 3\tau_{Sd,xy}^2}$$

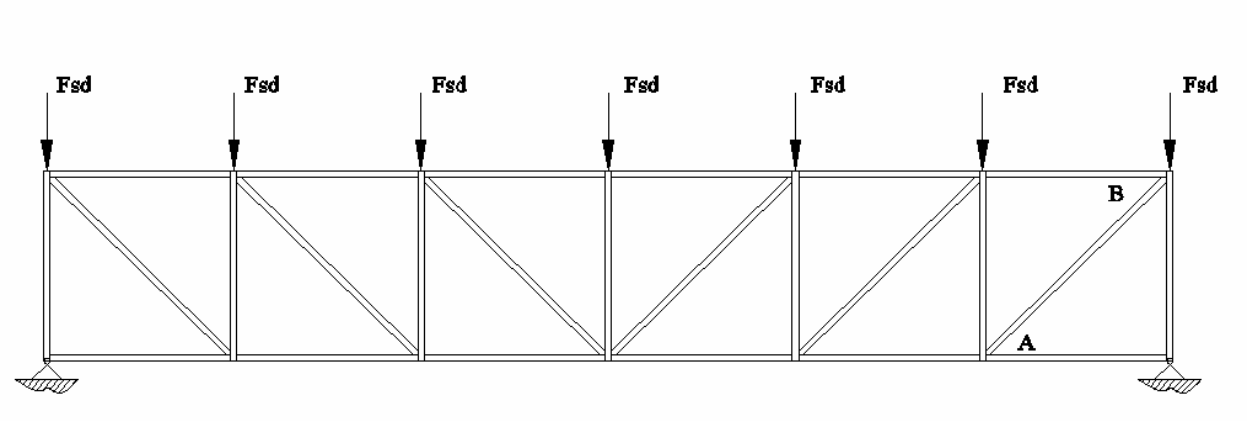
  - O valor da tensão resistente de cálculo possui o mesmo significado anterior.

$$\sigma_{Rd} = f_{yd}$$

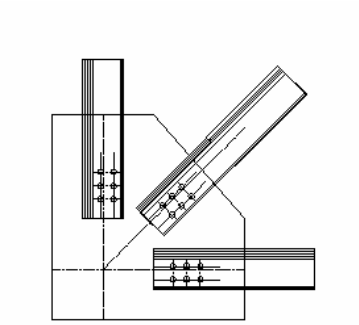


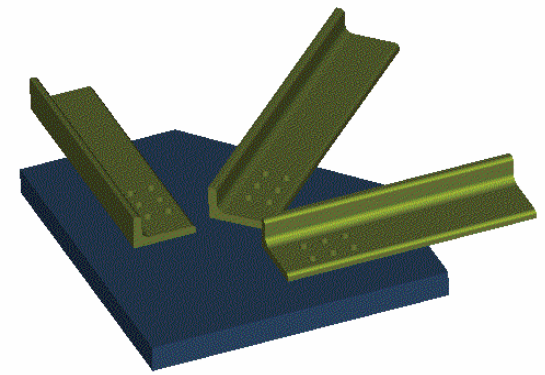
EXEMPLO DE CÁLCULO

- Dimensionamento de elemento ligação de uma estrutura metálica:
  - Dimensione o elemento de ligação AB na estrutura apresentada na figura que se segue, em função do estado limite último de resistência sem plastificação, tendo em consideração processos de ligação aparafusada. É ainda conhecido que o esforço de tracção no elemento AB deverá ser majorado de acordo com uma combinação de acções regulamentar e dos esforços plausíveis (peso próprio (144 [kN]) e esforço aplicado (240 [kN]))



$$N_{Sd} = 1.4 \times 144 + 1.6 \times 240 = 585{,}6 \quad [kN]$$





EXEMPLO DE CÁLCULO (cont.)

- Segundo REAPE, este elemento deverá verificar o estadio limite último de resistência sem plastificação.

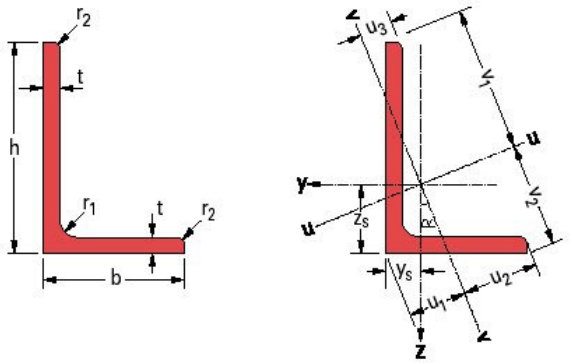
$$\sigma_{Sd} \leq \sigma_{Rd}$$

- A tensão resistente de cálculo para a secção do perfil deverá ser determinada:

$$\sigma_{Sd} = \frac{F_{Sd}}{A} = \frac{585{,}6 \times 10^3}{A} \leq 355 \times 10^6 \quad \Leftrightarrow \quad A \geq 16{,}5 \left[cm^2\right]$$

- Implica a escolha de um perfil com características superiores ou iguais a: L120x80x10

Désignation Designation Bezeichnung		Dimensions Abmessungen						Position des axes Position of axes Lage der Achsen							Surface Oberfläche	
	G kg/m	h mm	b mm	t mm	r_1 mm	r_2 mm	A cm²	z_s cm	y_s cm	v_1 cm	v_2 cm	u_1 cm	u_2 cm	u_3 cm	A_L m²/m	A_G m²/t
L 120 x 80 x 8*	12.2	120	80	8	11	5.5	15.49	3.83	1.87	8.23	5.97	3.25	4.19	2.09	0.391	32.12
L 120 x 80 x 10*	15.0	120	80	10	11	5.5	19.13	3.92	1.95	8.19	6.01	3.35	4.17	2.15	0.391	26.01
L 120 x 80 x 12▲*	17.8	120	80	12	11	5.5	22.69	4.00	2.03	8.14	6.04	3.45	4.16	2.20	0.391	21.93
L 130 x 65 x 8	11.8	130	65	8	11	5.5	15.09	4.56	1.37	8.51	5.71	2.48	3.82	1.39	0.381	32.13
L 130 x 65 x 10	14.6	130	65	10	11	5.5	18.63	4.65	1.45	8.44	5.77	2.57	3.78	1.46	0.381	26.02
L 150 x 90 x 10*	18.2	150	90	10	12	6	23.15	5.00	2.04	10.10	7.07	3.61	4.97	2.20	0.470	25.84
L 150 x 90 x 11	19.9	150	90	11	12	6	25.34	5.04	2.08	10.07	7.09	3.66	4.95	2.23	0.470	23.61
L 150 x 100 x 10*	19.0	150	100	10	12	6	24.15	4.81	2.34	10.27	7.48	4.08	5.25	2.64	0.490	25.83
L 150 x 100 x 12*	22.5	150	100	12	12	6	28.71	4.90	2.42	10.23	7.52	4.18	5.23	2.70	0.490	21.72
L 150 x 100 x 14▲	26.1	150	100	14	12	6	33.19	4.98	2.50	10.19	7.55	4.28	5.22	2.75	0.490	18.79
L 160 x 80 x 10	18.2	160	80	10	13	6.5	23.18	5.63	1.69	10.46	7.04	3.06	4.70	1.73	0.469	25.76
L 160 x 80 x 12	21.6	160	80	12	13	6.5	27.54	5.72	1.77	10.40	7.10	3.15	4.66	1.80	0.469	21.69
L 200 x 100 x 10*	23.0	200	100	10	15	7.5	29.24	6.93	2.01	13.15	8.74	3.72	5.94	2.09	0.587	25.58
L 200 x 100 x 12*	27.3	200	100	12	15	7.5	34.80	7.03	2.10	13.08	8.81	3.82	5.89	2.17	0.587	21.49
L 200 x 100 x 14	31.6	200	100	14	15	7.5	40.28	7.12	2.18	13.01	8.86	3.91	5.85	2.24	0.587	18.57



EXEMPLO DE CÁLCULO (cont.)

- O elemento de ligação aparafusada deverá ser dimensionado tendo em consideração o número de parafusos e o tamanho de cada um deles. Neste processo deverá ser verificada a segurança do elemento de ligação, em relação ao estado limite último de resistência sem plastificação e ao mesmo tempo verificado o cumprimento do estipulado no REAE relativamente às disposições de projecto (disposição dos elementos de ligação).
  - Dimensionamento ao corte:

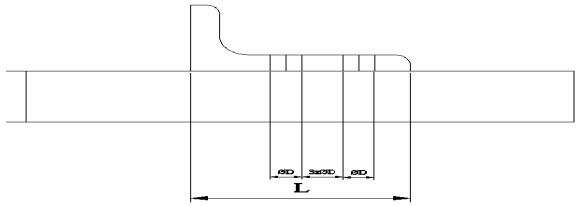
$$\tau_{Rd} \le 0.7 \times f_{yd} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{585{,}6 \times 10^3}{n \times A} \le 0.7 \times f_{yd}$$

Área resistente dos parafusos

Número de parafusos

  - Solução iterativa: A solução deveria considerar por assegurar a rigidez da ligação e o assegurar o menor tamanho dos elementos de ligação possível. Nestas condições, optando pela solução de 6 parafusos, deverá ser verificada a regra de disposição, conforme se representa na figura.

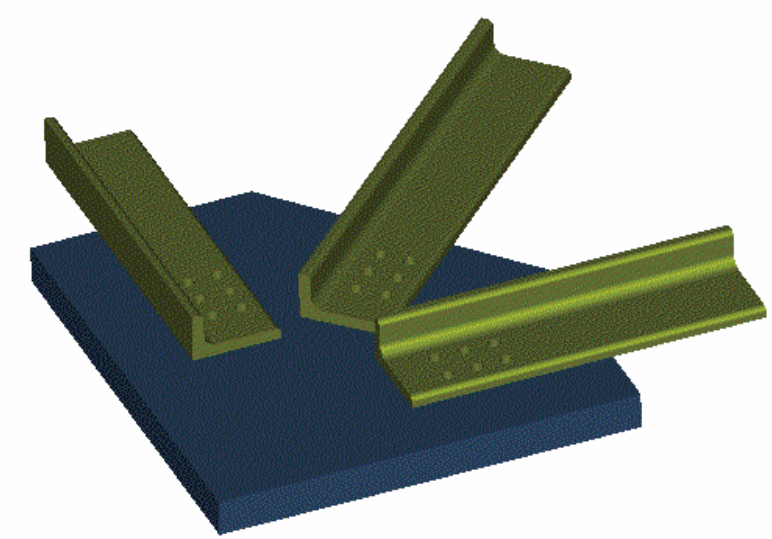
n	PARAFUSO - DESIGNAÇÃO
1	M40
2	M30
4	M24
6	M20



EXEMPLO DE CÁLCULO (cont.)

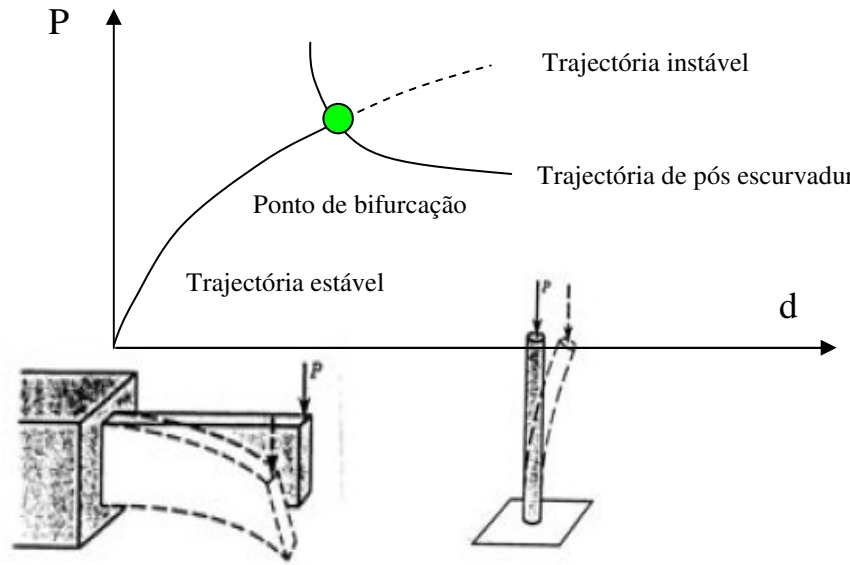
- Esta regra de disposição obriga a escolha de um perfil tipo L150x90x10.
- Com esta nova solução, deverá ser verificada a segurança do elemento estrutural junto do nó fragilizado da estrutura. Deverá ser utilizada a área resistente efectiva, descontando a área correspondente a cada parafuso, tendo em consideração que o elemento está submetido a um estado de tracção.

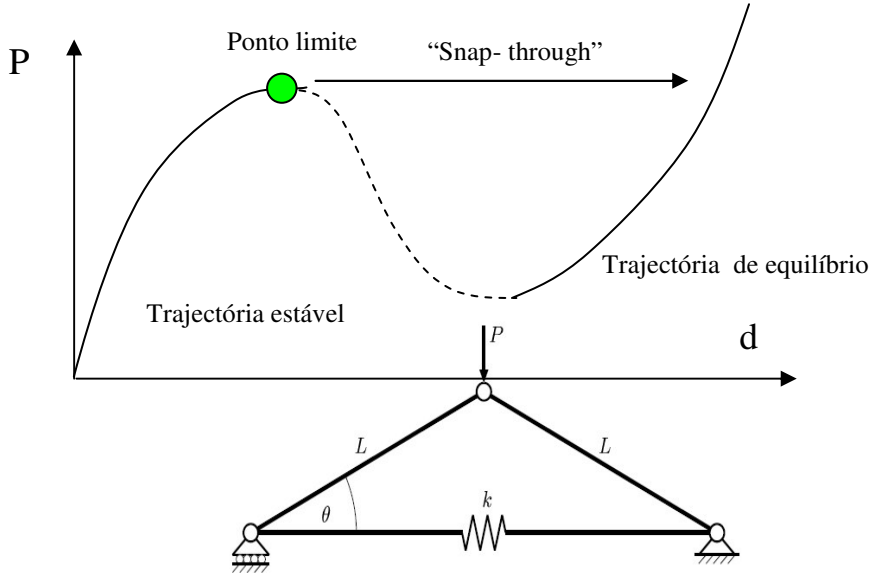
$$\sigma_{Sd} = \frac{F_{Sd}}{A_{ef}} = \frac{585{,}6\times10^{3}}{\left(A - 2\times\left(0{,}022\times0{,}010\right)\right)} \le 355\times10^{6} \quad \Leftrightarrow \quad 312{,}3\,[MPa] \le 355\,[MPa]$$



ELU – INSTABILIDADE ESTRUTURAL

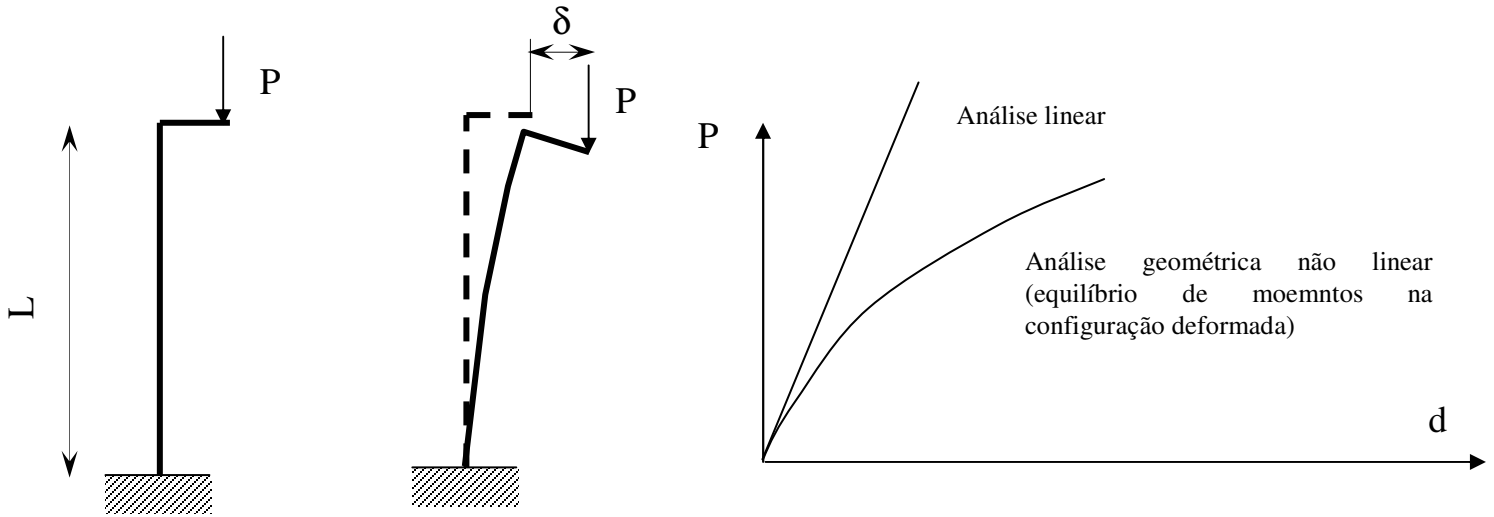
- Instabilidade – Corresponde à transição entre configurações de equilíbrio estáveis e instáveis.
- Modos de instabilidade:
  - Bifurcação de equilíbrio (instabilidade bifurcacional). Análise que envolve a determinação das coordenadas do ponto de bifurcação (carga crítica), a determinação da configuração deformada exibida pela estrutura (modo de instabilidade) e a determinação das propriedades da trajectória pós encurvadura.
  - Ponto limite (trajectória de equilíbrio com derivada nula). Análise que envolve a determinação da trajectória de equilíbrio não linear e a determinação das coordenadas do ponto limite (nomeadamente a ordenada = craga limite ou carga de snap). Para detectar fenómenos com estas características é necessário recorrer a métodos de análise avançados.





ELU – INSTABILIDADE ESTRUTURAL

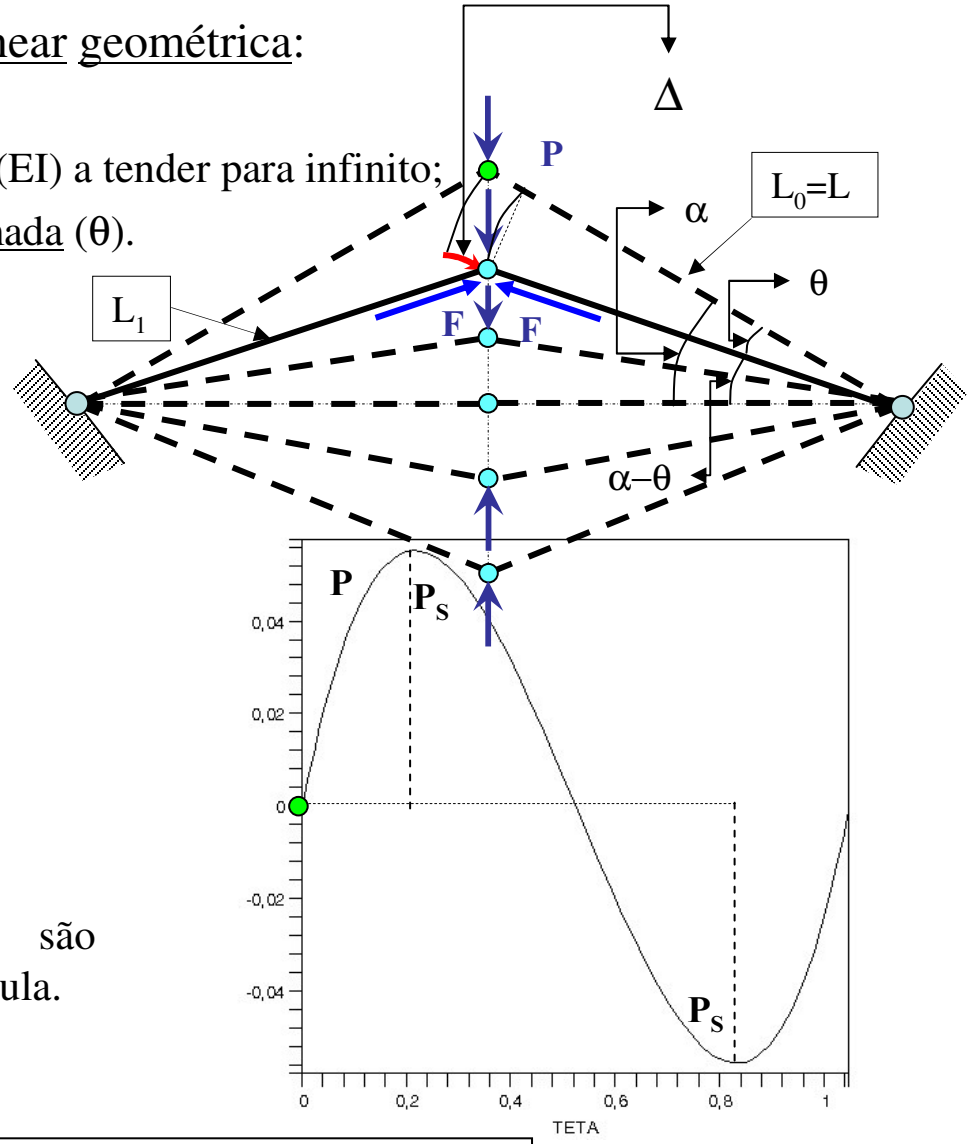
- Modelos de comportamento estrutural:
  - Análise linear de estruturas. Baseia-se na hipótese que todas as equações são lineares, pressupondo uma linearidade física nas relações constitutivas (material) e uma linearidade geométrica, assumindo as equações escritas na configuração indeformada da estrutura e relações cinemáticas lineares (deformação – deslocamento) (hipótese de pequenos deslocamentos.
  - Análise de estabilidade, envolve o estabelecimento das equações de equilíbrio na configuração de deformada e/ou a consideração de de relações cinemáticas não lineares. Pode ainda incluir a não linearidade física (material).



OBS: Os erros associados aos valor de δ, calculados pela análise linear, aumentam com o valor da carga e são sempre contra a segurança.

ELU – INSTABILIDADE ESTRUTURAL

- Exemplo de cálculo de instabilidade não linear geométrica:
  - Elementos de barra, com rigidez EA/L;
  - Elementos estruturais com rigidez à flexão (EI) a tender para infinito;
  - Estabelecer equilíbrio na posição de deformada (θ).



$$L_1 \cos(\alpha-\theta) = L\cos(\alpha)$$

$$\Delta = L_0 - L_1 = L - \frac{L\cos(\alpha)}{\cos(\alpha-\theta)}$$

$$\sum \vec{F}_y = \vec{0} \Leftrightarrow 2F\sin(\alpha-\theta) - P = 0$$
$$P = 2F\sin(\alpha-\theta) = 2KL\left[\sin(\alpha-\theta) - \cos(\alpha)\times tg(\alpha-\theta)\right]$$

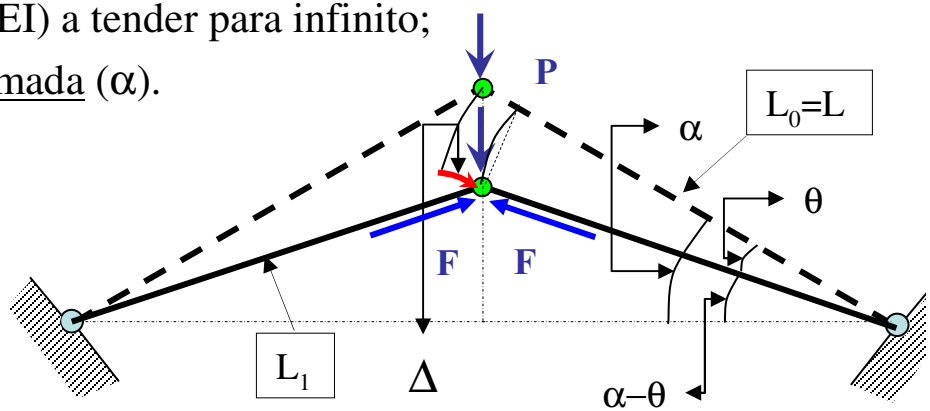
  - As coordenadas dos pontos limites são determinados pela condição de derivada nula.

$$\frac{dP}{d\theta} = 0 \Leftrightarrow \cos(\alpha-\theta) = \sqrt[3]{\cos(\alpha)}$$

$$\theta_S = \alpha \pm \left| arc\cos\sqrt[3]{\cos(\alpha)} \right| \Rightarrow P_S = 2KL\left[\sin(\alpha-\theta_S) - tg(\alpha-\theta_S)\times\cos(\alpha)\right]$$

ELU – INSTABILIDADE ESTRUTURAL

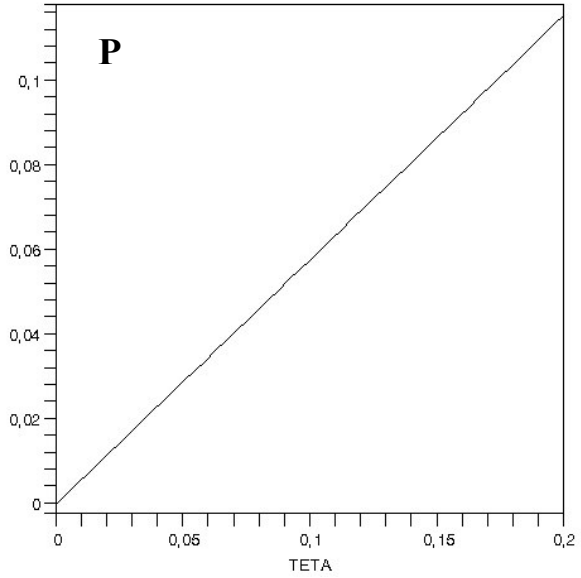
- Exemplo de cálculo de instabilidade linear:
  - Elementos de barra, com rigidez EA/L;
  - Elementos estruturais com rigidez à flexão (EI) a tender para infinito;
  - Estabelecer equilíbrio na posição de indeformada (α).
  - Pequenos θ's: $\sin(\theta) \approx \theta \quad \cos(\theta) \approx 1$
  - Pequenos α's



$$L_1 \cos(\alpha - \theta) = L\cos(\alpha) \Leftrightarrow$$
$$L_1 \cos(\alpha)\cos(\theta) + L_1 \sin(\alpha)\sin(\theta) = L\cos(\alpha) \Leftrightarrow$$
$$L_1 = \frac{L\cos(\alpha)}{\cos(\alpha) + \theta\sin(\alpha)}$$

$$\Delta = L_0 - L_1$$
$$= L - \frac{L\cos(\alpha)}{\cos(\alpha) + \theta\sin(\alpha)}$$
$$= L\left[\frac{\theta\sin(\alpha)}{\cos(\alpha) + \theta\sin(\alpha)}\right]$$

$$\sum \vec{F}_y = \vec{0} \Leftrightarrow 2F\sin(\alpha) - P = 0$$
$$P = 2F\sin(\alpha)$$
$$= 2KL\left[\frac{\theta\sin^2(\alpha)}{\cos(\alpha) + \theta\sin(\alpha)}\right]$$
$$= 2KL\left[\frac{\theta\sin^2(\alpha)}{\cos(\alpha)}\right]$$



ELU – CARGAS CRÍTICAS (BIFURCAÇÃO) E MODOS DE INSTABILIDADE

- Energia Potencial em torno de uma posição de equilíbrio fundamental, desenvolvimento em série de Taylor: Os termos lineares são nulos.

$$V(Q_i) = V(Q_i^0) + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} + \ldots$$

- Condição de equilíbrio:

$$\frac{\partial V}{\partial Q_i} = \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0 = V_{ij} q_j$$

- Condição de equilíbrio do sistema estrutural:
  - Sistema homogéneo com solução trivial nula {qi}={0};

$$\begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} & \ldots & V_{1n} \\ V_{12} & V_{22} & & V_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ V_{n1} & V_{n2} & & V_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ . \\ q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

  - Sistema com solução não nula, não trivial, representa os modos de instabilidade do sistema estrutural, sendo apenas possíveis para parâmetros de carga que anulem o determinante da matriz do sistema.
    - para cada raiz desta nova equação, λ representa uma carga de bifurcação, sendo que a menor denomina-se por carga crítica.
    - A subsituição de cada carga de bifurcação no sistema homogéneo, origina o correspondente modo de instabilidade.

$$\det[V_{ij}(\lambda)] = 0 \longrightarrow [V_{ij}][q_i] = [0] \longrightarrow [q_i] = [?] \longrightarrow \boxed{\text{Normalização}}$$

ELU – CARGAS CRÍTICAS (BIFURCAÇÃO) E MODOS DE INSTABILIDADE

- A matriz Vij, varia linearmente com P, no caso de um estrutura ou elemento, apresentar um estado linear de pré encurvadura.
- A matriz pode decompor-se na forma:

$$[V_{ij}(\lambda)] = [K_{ij}] - \lambda [G_{ij}]$$

$[K]$ matriz rigidez linear (habitual), depende da energia elástica de deformação do elemento ou estrutura.

$[G]$ matriz rigidez geométrica

- Em engenharia de estuturas interessa, especialmente, determinar a carga crítica e o correspondente modo de instabilidade e muito raramente determinar cargas e modos de ordem superior.
- Os métodos numéricos utilizam algoritmos iterativos para resolução do sistema de equações:

$$[V_{ij}][q_i] = [0] \quad \Leftrightarrow \quad [K]\{q_i\}_t = \lambda\ [G]\{q\}_{t0}$$

ESTADO LIMITE ÚLTIMO DE ENCURVADURA POR VAREJAMENTO – REAPE

- Âmbito:
  - Todos os elementos sujeitos a esforços de compressão em que se verifique o risco de um fenómeno instabilidade. Nestes casos, a condição a verificar deverá ser a seguinte:

$$\sigma_{Sd} \leq \sigma_{Rd}$$

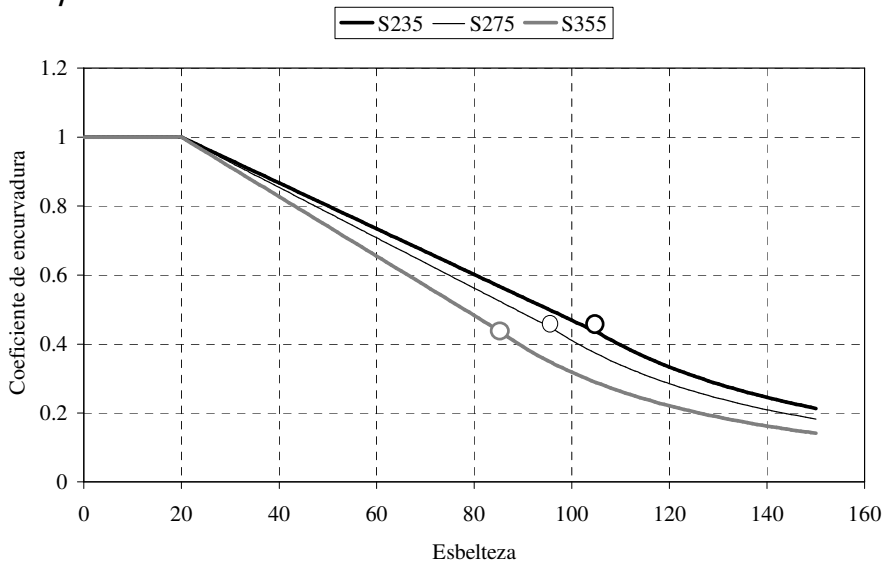
- Disposição de projecto:
  - Valor da tensão solicitante de cálculo deverá ser determinado de acordo com:

$$\sigma_{Sd} = \frac{N_{Sd}}{A\varphi}$$

N_{Sd} - Valor de cálculo do esforço normal actuante

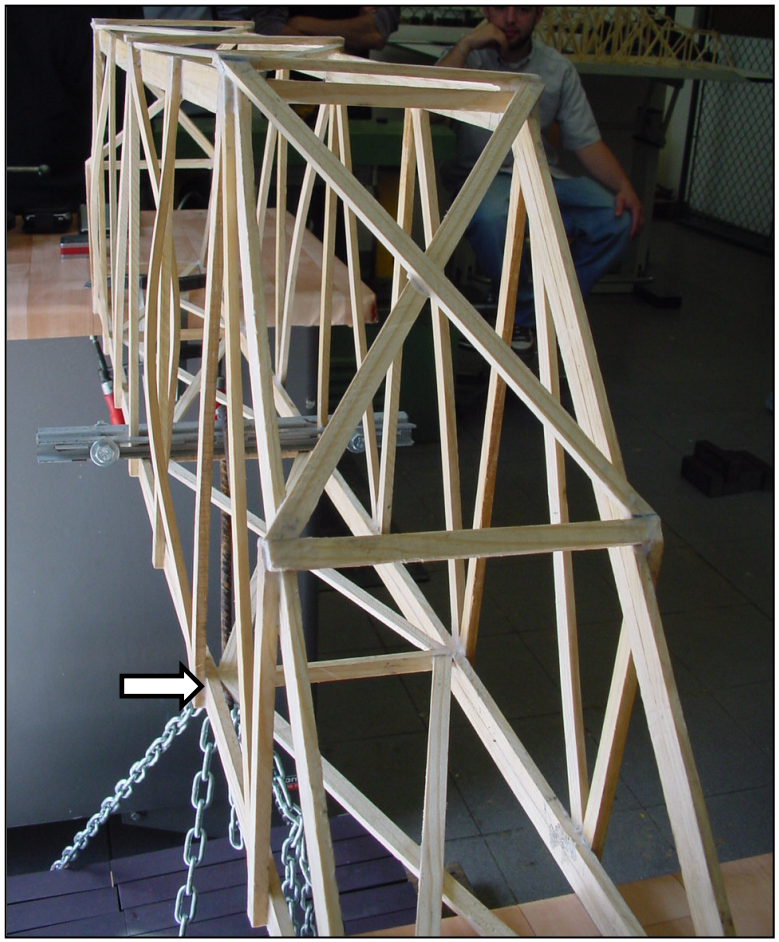
A - Área da secção transversal do elemento em estudo

φ - representa um coeficiente de encurvadura, função da esbelteza do elemento estrutural.

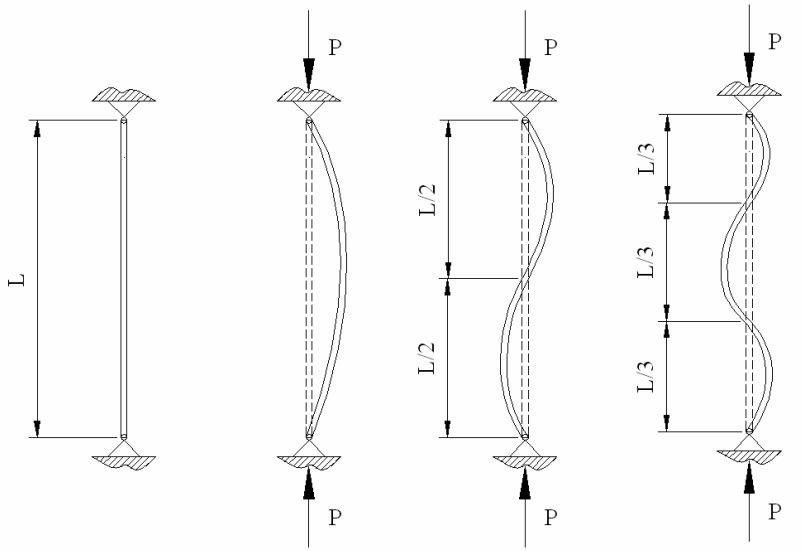


ESTADO LIMITE ÚLTIMO DE ENCURVADURA POR VAREJAMENTO – REAPE

- Determinação do coeficiente de redução:
  - Função da esbelteza e do material.



TIPO DE AÇO	COEFICIENTE DE ESBELTEZA λ	COEFICIENTE DE ENCURVADURA φ
S235	$\lambda \le 20$ $20 < \lambda \le 105$ $\lambda > 105$	$\varphi = 1$ $\varphi = 1.1328 - 0.00664\lambda$ $\varphi = 4802/\lambda^2$
S275	$\lambda \le 20$ $20 < \lambda \le 96$ $\lambda > 105$	$\varphi = 1$ $\varphi = 1.1460 - 0.00730\lambda$ $\varphi = 4103/\lambda^2$
S355	$\lambda \le 20$ $20 < \lambda \le 85$ $\lambda > 85$	$\varphi = 1$ $\varphi = 1.1723 - 0.00862\lambda$ $\varphi = 3179/\lambda^2$



$$\lambda = Le/i$$

ENCURVADURA EM REGIME LINEAR ELÁSTICO

- Carga crítica de Euler:
  - A posição momentânea do elemento difere da posição natural (linha recta entre apoios), por um deslocamento, correspondente à flecha para uma dada secção ao longo do comprimento do elemento. $y(x)$
  - Equilíbrio em cada instante.

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M(x)$$

  - Nesta expressão, M(x):

$$M(x) = -P.y(x)$$

  - Substituindo na equação diferencial:

$$P/EI = k^2$$

  - Obtém-se:

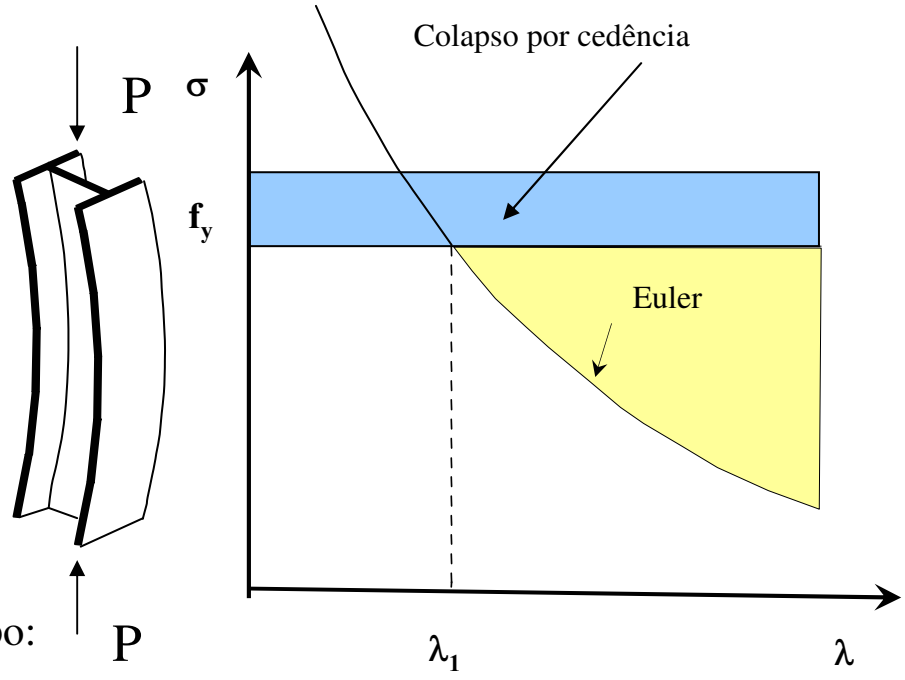
$$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2 y = 0$$

  - "ODE" homogénea que admite solução do tipo:

$$y(x) = C_1 \sin(kx) + C_2 \cos(kx)$$

  - Resulta um valor para carga ou tensão crítica:

$$P_{cr} = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2} \qquad \sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

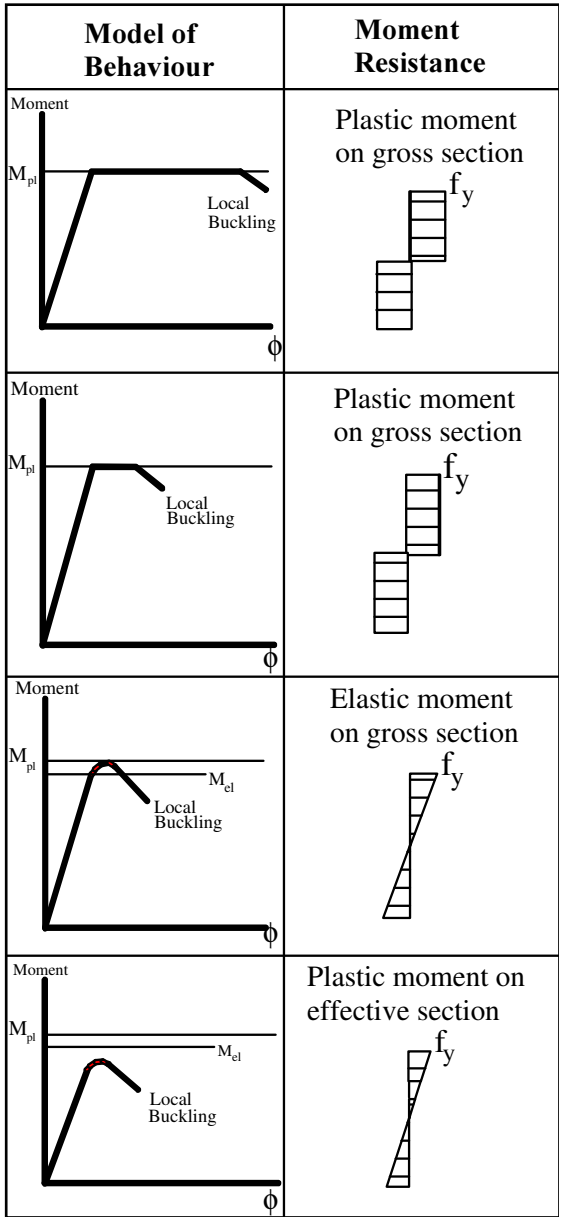


ESTADO LIMITE ÚLTIMO DE ENCURVADURA POR VAREJAMENTO – Eurocódigo 3

- Âmbito:
  - Elementos comprimidos.
- Etapas de dimensionamento:
  - Fase 1: Cálculo do comprimento de encurvadura para ambos as direcções principais do secção do elemento resistente, tendo em consideração o comprimento entre apoios e os detalhes das ligações.
  - Fase 2: Determinação da esbelteza adimensional, função das caracteristicas geométricas e da tensão de cedência do material.
    - O EC3 define 4 classes de secção recta, que dependem da esbelteza do elemento e da distribuição de tensão em compressão. As classes são definidas em termos de eficiencia requerida para resistência à flexão.

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{A f_y}{N_{cr}}}$$ Para secções classe 1-3

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{A_{eff} f_y}{N_{cr}}}$$ Para secções classe 4



ESTADO LIMITE ÚLTIMO DE ENCURVADURA POR VAREJAMENTO – Eurocódigo 3 (cont.)

- Etapas de dimensionamento:
  - Fase 3: Selecção da curva de projecto apropriada, considerando o processo de obtenção do perfil e a espessura da chapa

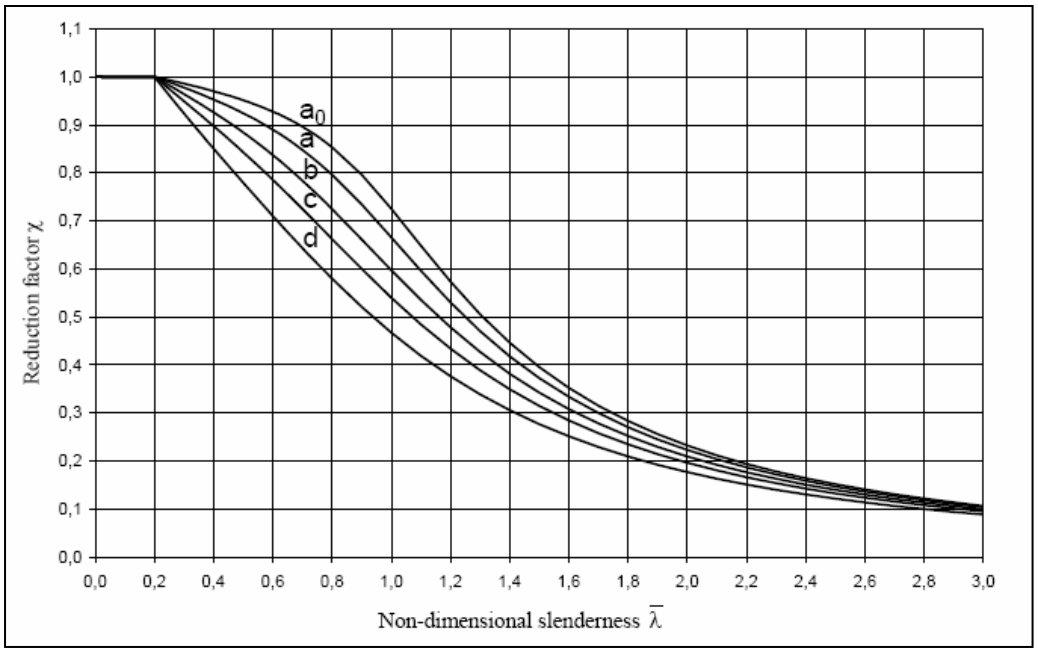
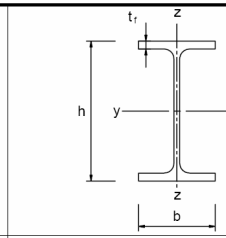
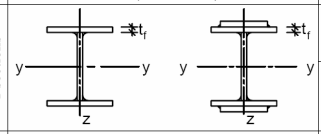
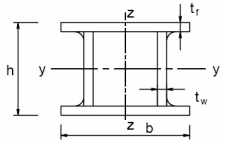
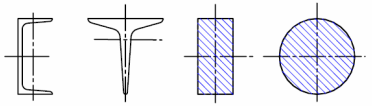
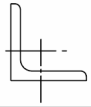


Table 6.2: Selection of buckling curve for a cross-section

Cross section		Limits		Buckling about axis	Buckling curve: S 235, S 275, S 355, S 420	Buckling curve: S 460
Rolled sections		h/b > 1,2	$t_f \le 40$ mm	y – y z – z	a b	a_0 a_0
			40 mm < $t_f \le 100$	y – y z – z	b c	a a
		h/b ≤ 1,2	$t_f \le 100$ mm	y – y z – z	b c	a a
			$t_f > 100$ mm	y – y z – z	d d	c c
Welded I-sections			$t_f \le 40$ mm	y – y z – z	b c	b c
			$t_f > 40$ mm	y – y z – z	c d	c d
Hollow sections			hot finished	any	a	a_0
			cold formed	any	c	c
Welded box sections			generally (except as below)	any	b	b
			thick welds: a > 0,5t_f b/t_f < 30 h/t_w < 30	any	c	c
U-, T- and solid sections				any	c	c
L-sections				any	b	b

ESTADO LIMITE ÚLTIMO DE ENCURVADURA POR VAREJAMENTO – Eurocódigo 3 (cont.)

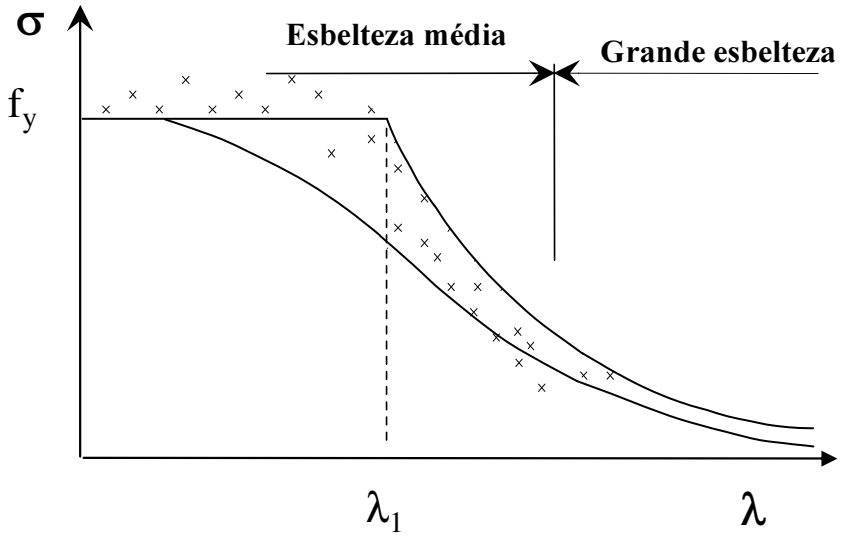
- Etapas de dimensionamento:
  - Fase 4: Determinação do coeficiente de redução

$$\chi = \frac{1}{\phi + [\phi^2 - \overline{\lambda}^2]^{0,5}} \leq 1$$

$$\phi = 0{,}5[1 + \alpha(\overline{\lambda} - 0{,}2) + \overline{\lambda}^2]$$

Table 6.1: Imperfection factors for buckling curves

Buckling curve	a_0	a	b	c	d
Imperfection factor α	0,13	0,21	0,34	0,49	0,76



- Etapas de dimensionamento:
  - Fase 5: Determinação do esforço resistente de cálculo à encurvadura.

$$N_{b,Rd} = \frac{\chi A f_y}{\gamma_{M1}}$$ Para secções classe 1-3

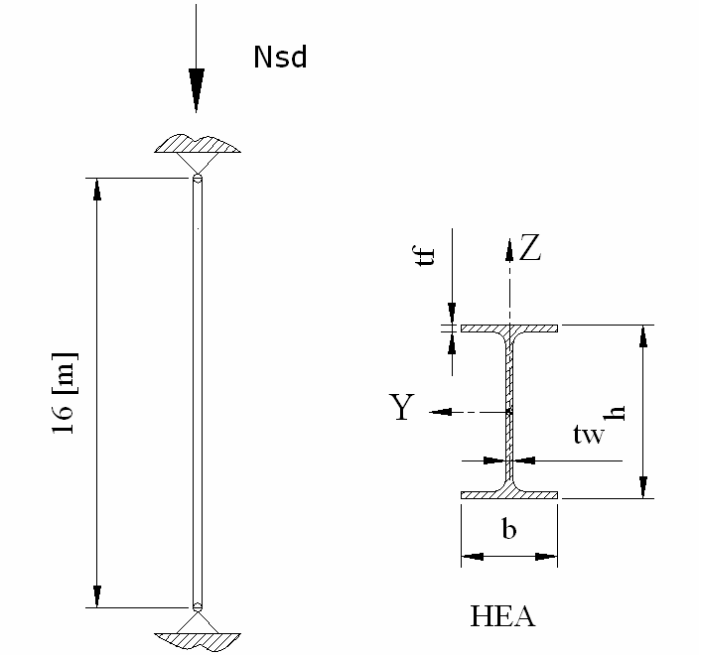
$$N_{b,Rd} = \frac{\chi A_{eff} f_y}{\gamma_{M1}}$$ Para secções classe 4

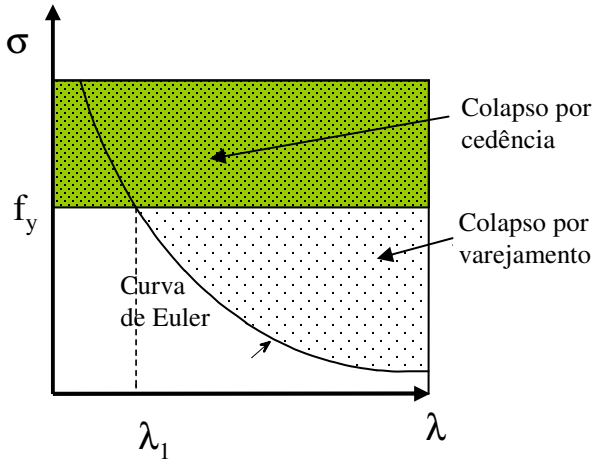
  - Fase 6: Comparação com o valor do efeito actuante.

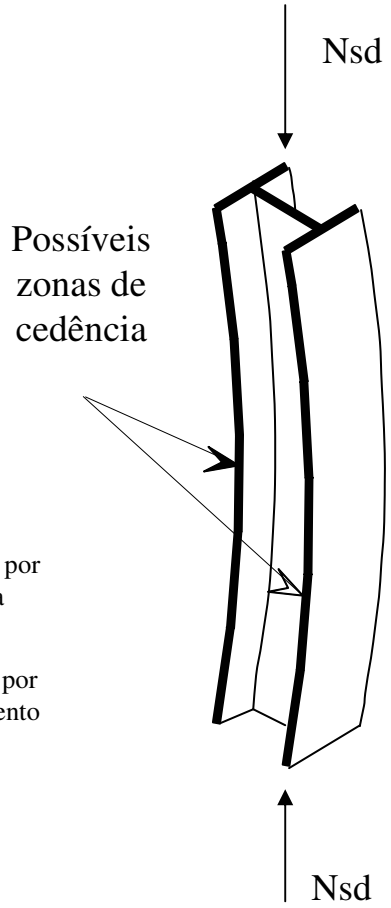
$$\frac{N_{Ed}}{N_{b,Rd}} \leq 1{,}0$$

EXEMPLO DE CÁLCULO

- Instabilidade de um pilar:
  - Escolha o perfil da gama HEA a utilizar para verificar a segurança do elemento representado na figura seguinte, submetido a um esforço de 2200000 [N]. Admita que o material é um aço S235. Utilize o regulamento Português.







EXEMPLO DE CÁLCULO (cont.)

- Artigo 42 do regulamento REAE:

$$\sigma_{Sd} \leq \sigma_{Rd}$$

- Tensão solicitante de cálculo:

$$\sigma_{Sd} = \frac{N_{Sd}}{A\varphi}$$

- O coeficiente de encurvadura será função da esbelteza do pilar e portanto do perfil seleccionado. Como primeira aproximação de um processo iterativo, poderemos determinar a área da secção necessária para atingir um estado plástico da secção:

$$A_0 = \frac{2200000}{235\times10^6} = 9.36\times10^{-3}\ \left[m^2\right]$$

- A esta secção corresponde, no mínimo, um perfil HEA 280.
- Determinação da esbelteza:

$$\lambda = \frac{Le}{i_z} = \frac{L}{0{,}070} = 228 \quad \Rightarrow \quad \varphi = 4802/\lambda^2 = 0.09$$

- Tensão solicitante de cálculo:

$$\sigma_{Sd} = \frac{N_{Sd}}{A\varphi} = \frac{2200000}{9730\times10^{-6}\times0.09} = 2512 \quad [MPa]$$

- O valor da tensão resistente de cálculo vale 235 [MPa]

EXEMPLO DE CÁLCULO (cont.)

- Considere-se o perfil HEA 400 :

$$A = 15900\,[mm^2] \quad ; \quad i_z = 73{,}4\,[mm] \quad ; \quad \lambda = \frac{Le}{i_z} = 217 \quad ; \quad \varphi = 4802 / \lambda^2 = 0.102$$

- Tensão solicitante de cálculo:

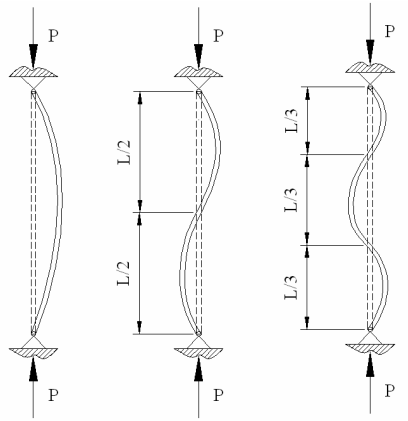
$$\sigma_{Sd} = \frac{N_{Sd}}{A\varphi} = \frac{2200000}{15900 \times 10^{-6} \times 0.102} = 1356 \quad [MPa]$$

- Não verifica inequação. Considere-se perfil HEA 450:

$$A = 17800\,[mm^2] \quad ; \quad i_z = 72{,}9\,[mm] \quad ; \quad \lambda = \frac{Le}{i_z} = 219 \quad ; \quad \varphi = 4802 / \lambda^2 = 0.1$$

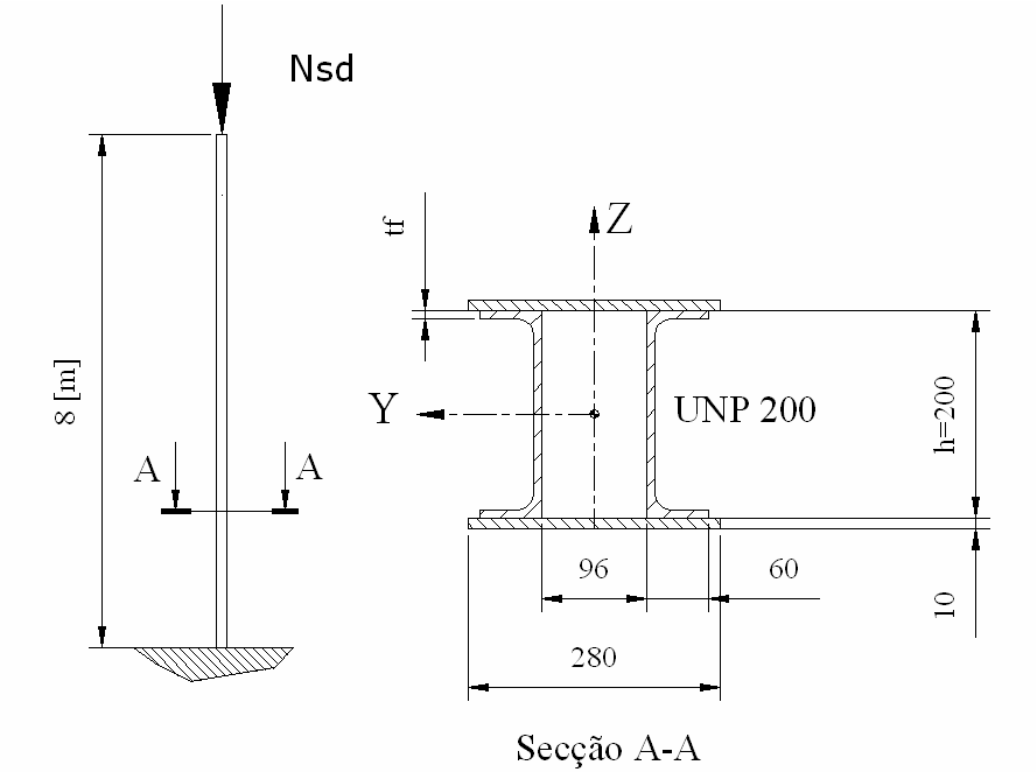
$$\sigma_{Sd} = \frac{N_{Sd}}{A\varphi} = \frac{2200000}{178 \times 10^{-4} \times 0.1} = 1235 \quad [MPa]$$

- Este perfil também não verifica claramente a condição de segurança relativamente ao estado de instabilidade por varejamento. Outra solução deveria ser adoptada para que não se verificasse instabilidade no plano xz, nomeadamente a colocação de um constrangimento ao deslocamento neste plano.



EXERCÍCIO DE CÁLCULO

- Instabilidade de um pilar encastrado de secção composta:
  - Determine o valor da carga máxima admissível a aplicar numa coluna em material S235 de 8 [m] de altura, encastrada na base, sendo a sua secção composta e representada na figura.



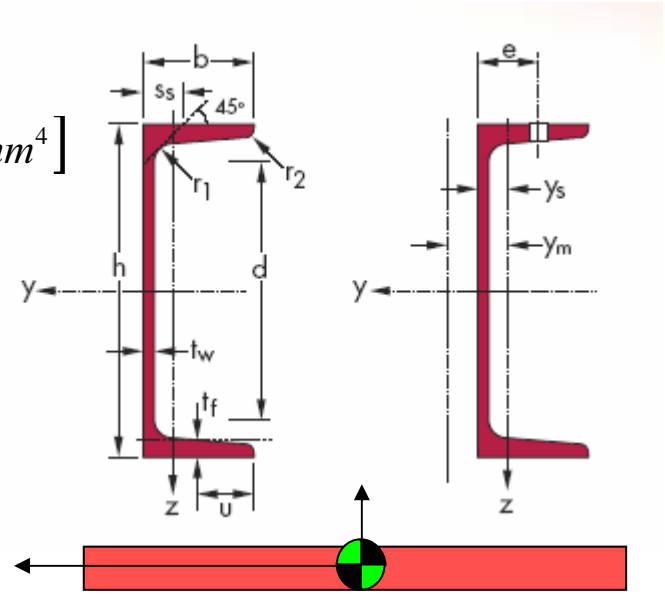
EXERCÍCIO DE CÁLCULO - RESOLUÇÃO

- Determinação das características geométricas da secção recta.
  - Perfil UNP 200:

$$A = 3220\,[mm^2] \quad I_y = 19.1\times10^6\,[mm^4] \quad I_z = 1.48\times10^6\,[mm^4] \quad i_y = 77\,[mm] \quad i_z = 21.4\,[mm]$$

  - Chapa de aço:

$$A = 2800\,[mm^2] \quad I_{yG} = 23333.3\,[mm^4] \quad I_{zG} = 18.3\times10^6\,[mm^4]$$



  - Secção composta:

$$A = 12040\,[mm^2] \quad I_y = 99.98\times10^6\,[mm^4] \quad I_z = 80.88\times10^6\,[mm^4] \quad i_y = 91.12\,[mm] \quad i_z = 81.82\,[mm]$$

EXERCÍCIO DE CÁLCULO - RESOLUÇÃO

- Plano preferencial de instabilidade:
  - A determinação do plano em que existe maior risco de instabilidade deve ser determinada através do ario de giração da secção composta ou da esbelteza calculada em relação aos dois eixos centrais de inércia.

    $i_z < i_y \Rightarrow \lambda_z > \lambda_y$

  - Instabilidade por encurvadura pode ocorrer preferencialmente segundo o plano zz, mobilizando a flexão segundo yy.

    $$\lambda_z = \frac{le}{i_z} = \frac{2 \times 8000}{81.92} = 195 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{4802}{\lambda^2} = 0.126$$

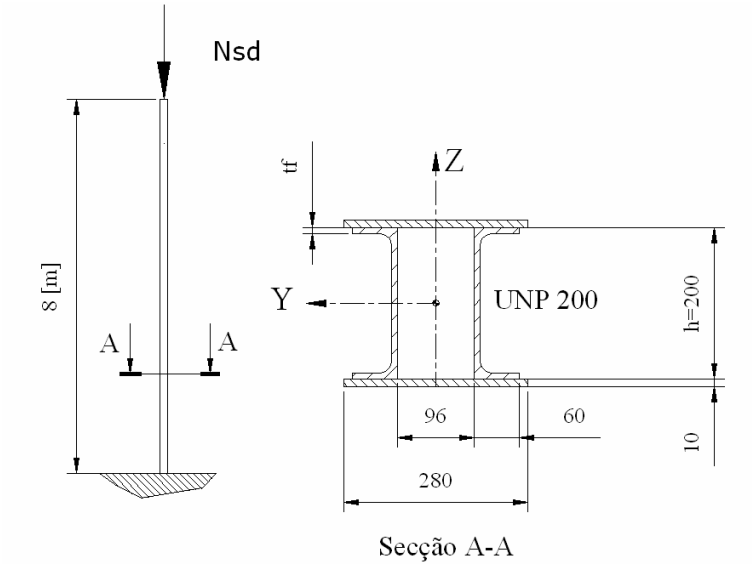
- Observação REAE:
  - Em geral não são admissíveis valores de esbelteza superiores a 180, salvo em elementos estruturais cuja função se destine a contraventamentos. Em caso algum se poderá exceder um valor de 250.

EXERCÍCIO DE CÁLCULO - RESOLUÇÃO

- Para este tipo de secção e para o comprimento do elemento, será de prever um fenómeno dentro do domínio elástico $\lambda \geq 105$

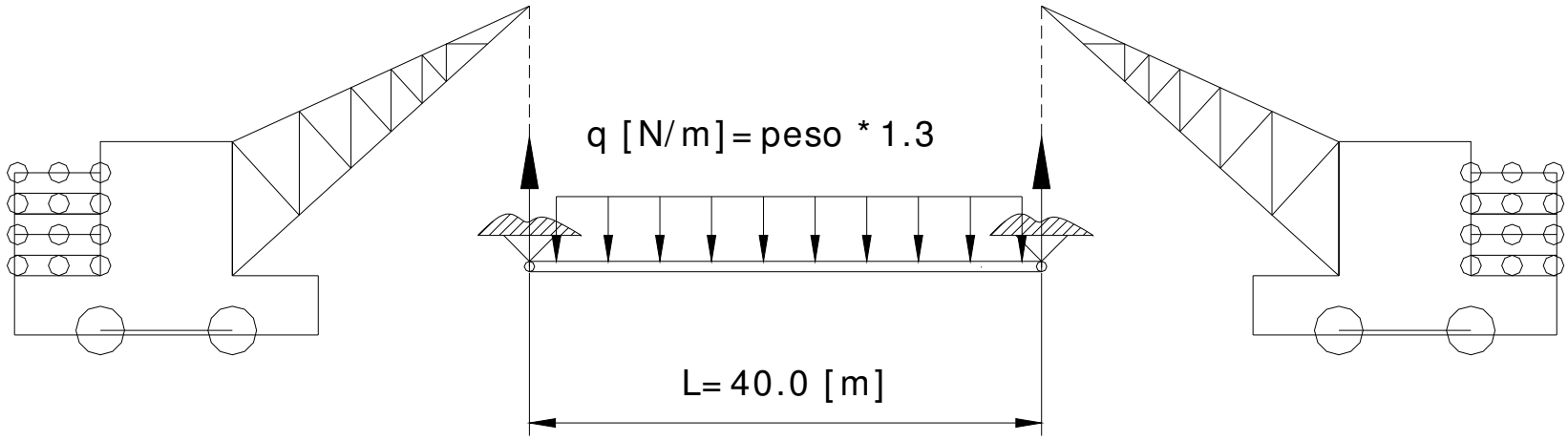
- Para verificação da segurança, deve ser verificado o estado limite último de instabilidade por varejamento

$$\sigma_{Sd} \leq \sigma_{Rd} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{N_{Sd}}{A \times \varphi} \leq 235 \times 10^6 \quad \Leftrightarrow \quad N_{Sd} \leq 356.5 \, [kN]$$



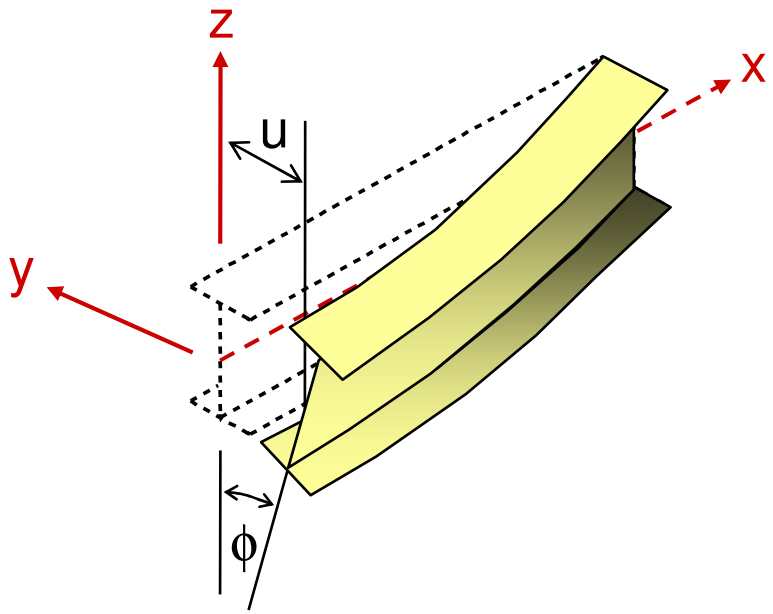
VERIFICAÇÃO DE SEGURANÇA NA MOVIMENTAÇÃO DE UMA VIGA - REAE

- Manutenção de uma viga de 40 [m] de um perfil HP400 x 231, em aço S235, é efectuada com o auxílio de duas gruas, dispostas nas extremidades da viga em questão. Um coeficiente de majoração dinâmica (segurança) igual a 1.3 deverá ser adoptado para tomar em consideração as forças de impacto, as oscilações provocadas pelo vento e ainda pelas dificuldades do processo de manutenção executado pelas duas gruas. Esta majoração deverá ser efectuada à solicitação provocada pelo peso próprio (carga distribuída).Será que a viga corre o risco de encurvar por bambeamento? Em caso afirmativo, quais as medidas a adoptar para evitar este fenómeno de instabilidade.



VERIFICAÇÃO DE SEGURANÇA NA MOVIMENTAÇÃO DE UMA VIGA - SOLUÇÃO

- Em função do processo de movimentação desta viga, pode ocorrer um fenómeno de instabilidade (encurvadura por bambeamento). Este fenómeno é caracterizado por um deslocamento lateral acompanhado por uma rotação da secção. Assim dever-se-á verificar o artigo 43 do REAE.



- Para o pefil em causa, HP400 x 231, o peso próprio é determinado através do valor da massa específica [kg/m]. Assim, a carga distribuída vale 231x9.81=2266 [N/m]. Carga majorada vale 2945 [N/m].

- Artigo 43 REAE:

$$\sigma_{Sd} \leq \sigma_{Rd}$$

- Tensão solicitante de cálculo.

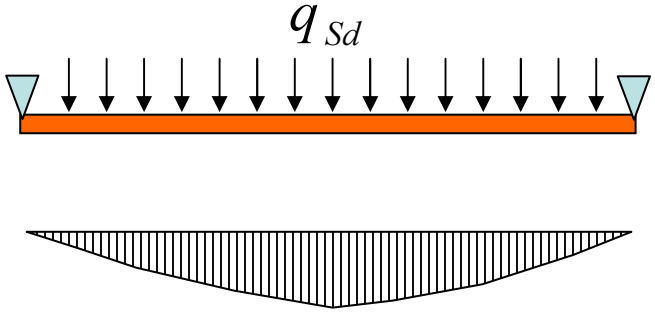
$$\sigma_{Sd} = \frac{M^{máx}{}_{Sd}}{k\frac{I}{v}} \leq \sigma_{Rd}$$

- Factor de bambeamento. $\frac{lh}{be} = \frac{40 \times 0.372}{0.402 \times 0.026} = 1423$

VERIFICAÇÃO DE SEGURANÇA NA MOVIMENTAÇÃO DE UMA VIGA - SOLUÇÃO

- Momento solicitante de cálculo máximo

$$M^{máx}{}_{Sd} = \frac{q \times L^2}{8} = 589188[N.m]$$



- Coeficiente de bambeamento:

$$k = 569 \Big/ \frac{lh}{be} = 0.4$$

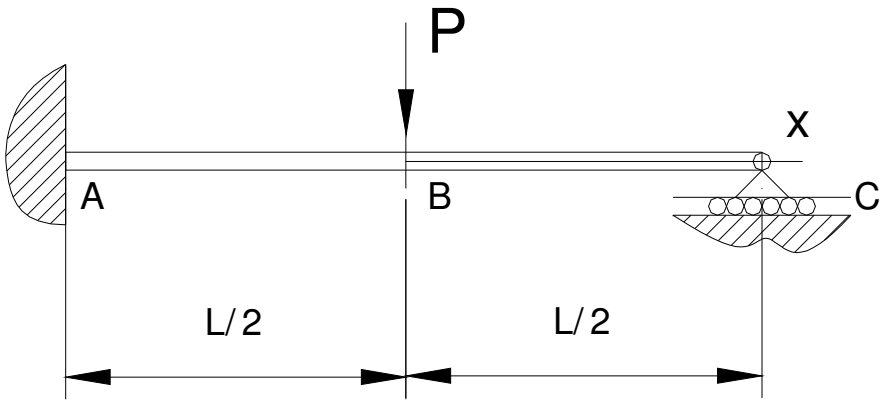
- O valor da tensão resistente de cálculo vale 235 [MPa], não se verificando a inequação de partida.

$$\sigma_{Sd} = \frac{589188}{0.4 \times \frac{70260 \times 10^{-8}}{0.186}} = 389[MPa] > 235[MPa]$$

Conclusão: Não se verificando a condição da inequação, a viga corre o risco de encurvar. Para evitar esta situação, os manobradores deverão suster a viga em causa através de dois apoios colocados mais perto um do outro, por exemplo a metade do comprimento total da viga, reduzindo o valor do comprimento de encurvadura.

ESTADO LIMITE ÚLTIMO DE RESISTÊNCIA COM PLASTIFICAÇÃO

- Uma viga de secção recatngular encontra-se encastrada na extremidade esquerda e simplesmente apoiada na outra extremidade, sendo submetida a um carregamento incremental concentrado P, a meio vão.
- Verificar o comportamento do elemento (deformção elástica), para um valor de carga ligeiramente inferior ao valor limite teórico Py
- Verifique ainda o estado limite (colapso) do comportamento do elemento (rótulas plásticas) para um valor de carga, ligeiramente superior a Ppl,y, depois da segunda rótula plástica formada.
- Determine ainda o perfil da defromação-tensão ao longo do eixo X.



ESTADO LIMITE ÚLTIMO DE RESISTÊNCIA COM PLASTIFICAÇÃO - RESOLUÇÃO

- Teoria da elasticidade linear:

$$M_A = -3PL/16$$

$$M_B = 5PL/32$$

$$M_C = 0$$

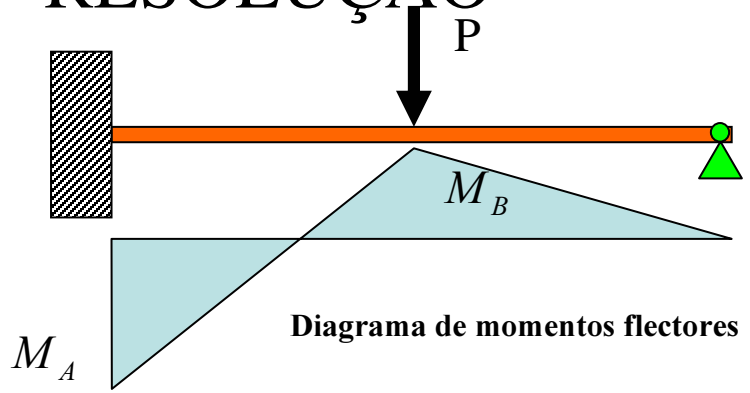
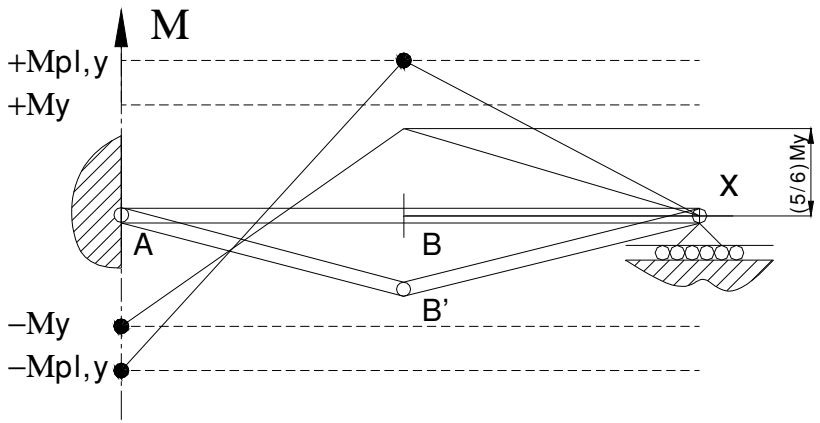


Diagrama de momentos flectores

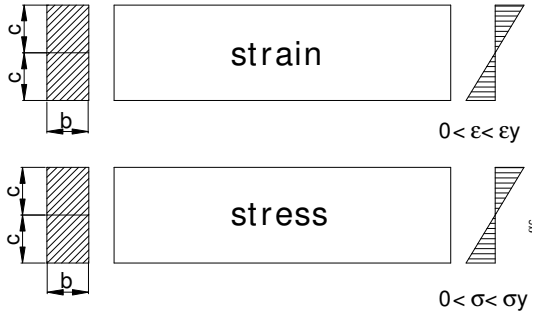
- Incrementando a carga P até que se forma a primeira cedência do material na secção A.

$$\boxed{M_A = M_y}$$



$$M_y = f_y.W_{el,y} = f_y\left(\frac{2}{3}bc^2\right)$$

$$M_A = 235\times10^6.\left(\frac{2}{3}\times0{,}0125\times0{,}1^2\right) = -3PL/16 \Rightarrow P_y = 26111[N]$$



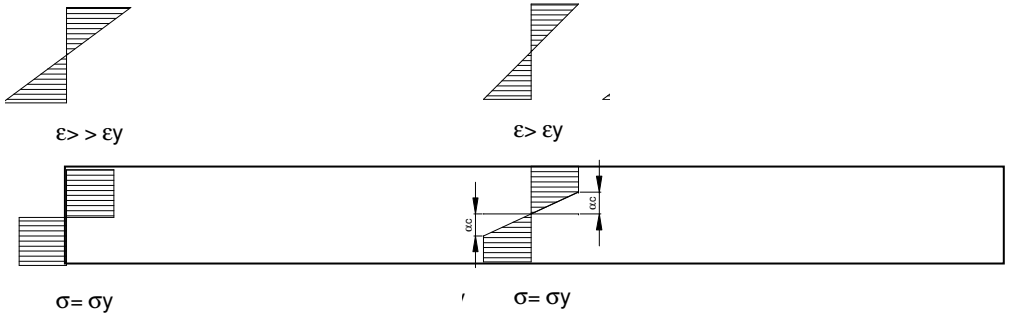
ESTADO LIMITE ÚLTIMO DE RESISTÊNCIA COM PLASTIFICAÇÃO - RESOLUÇÃO

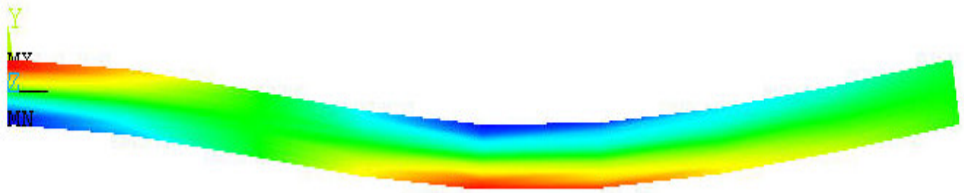
- Incrementando o valor da carga P até que se forme a primeira rótula plástica em A.

$$\boxed{M_A = M_{pl,y}}$$

$$M_{pl,y} = f_y . W_{pl,y} = f_y \left(2Q^{A/2}\right)$$

$$M_A = 235\times10^6 . \left(2\times(bc)\frac{c}{2}\right) = -3PL/16 \Rightarrow P = 39166[N]$$





Stress Sx

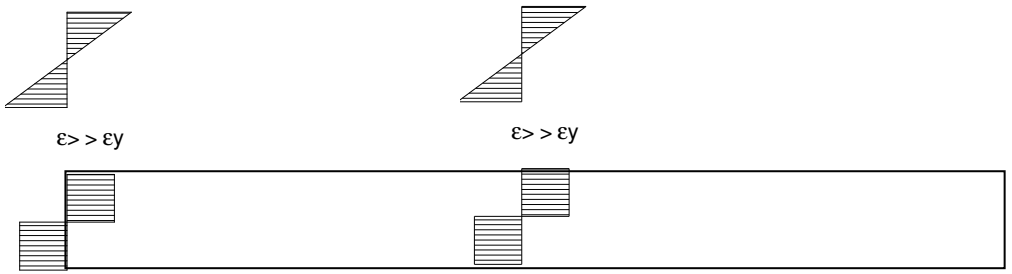
ESTADO LIMITE ÚLTIMO DE RESISTÊNCIA COM PLASTIFICAÇÃO - RESOLUÇÃO

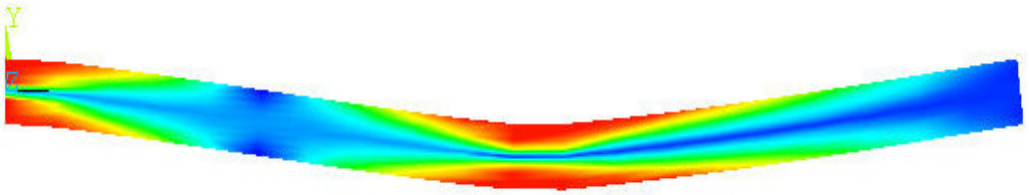
- Incrementando o valor da carga P até que se forme a segunda rótula plástica em B.

$$\boxed{M_B = M_{pl,y}}$$

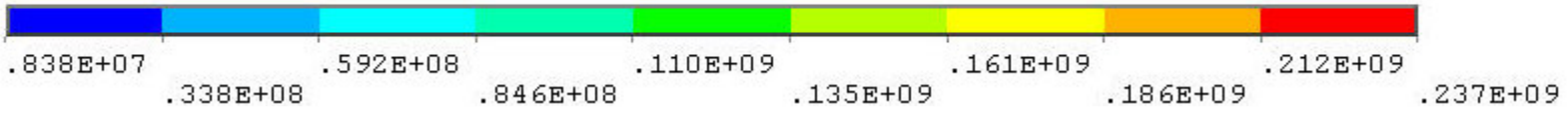
$$M_{pl,y} = f_y . W_{pl,y} = f_y \left(2Q^{A/2}\right)$$

$$M_B = 235\times10^6 . \left(2\times(bc)\frac{c}{2}\right) = 5PL/32 \Rightarrow P = 47000[N]$$



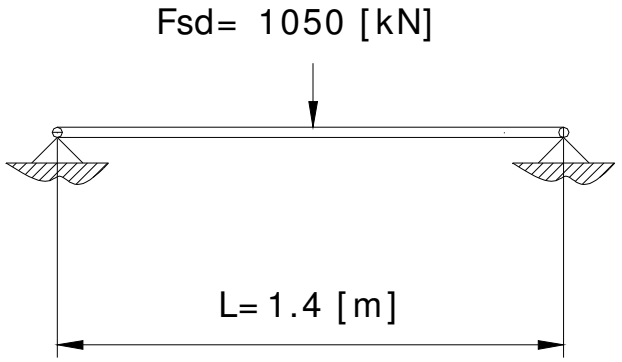


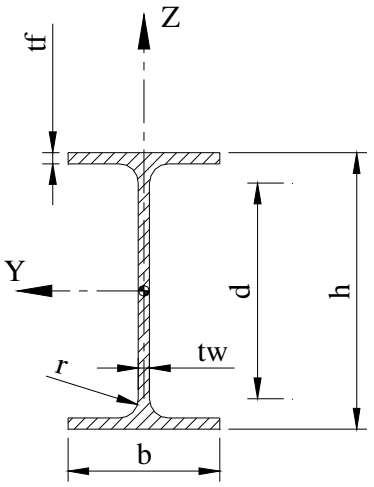
von Mises Stress



ESTADO LIMITE ÚTLIMO DE RESISTÊNCIA DE SECÇÃO RECTA SUJEITA A FLEXÃO E CORTE –EC3

- A segurança de uma viga com 1.4 [m] de comprimento, simplesmente apoiada, lateralmente restringida, deve ser verificada para suportar uma carga concentrada, a meio vão, de valor igual a 1050 [kN] (já majorada !). A disposição do elemento e do carregamento dá orgem a um esforço transverso máximo de V_{Ed}=525 [kN] e a um esforço de flexão máximo igual a M_{Ed}=367,5 [kNm].
- A secção recta do perfil 406x74 UB, na qualidade de material S275, deverá ser verificada para esta aplicação.





h=412.8 [mm]
b=179.5 [mm]
tw=9.5 [mm]
tf=16.0 [mm]
r=10.2 [mm]
A=9450 [mm^2]
$W_{pl,y}$=1501 [cm^3]

ESTADO LIMITE ÚTLIMO DE RESISTÊNCIA DE SECÇÃO RECTA SUJEITA A FLEXÃO E CORTE –EC3

- Propriedades do aço construção:

$$f_y = 275\ [MPa]$$
$$E = 210\ [GPa]$$

- Classificação da secção recta:

5.5 Classification of cross sections

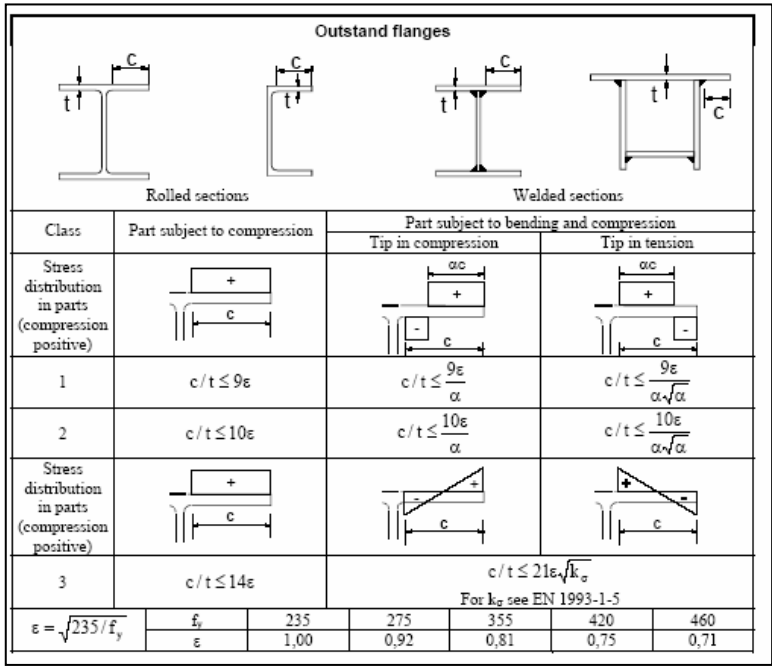
5.5.2 Classification

(3) The classification of a cross-section depends on the width to thickness ratio of the parts subject to compression.

(4) Compression parts include every part of a cross-section which is either totally or partially in compression under the load combination considered.

(5) The various compression parts in a cross-section (such as a web or flange) can, in general, be in different classes.

(6) A cross-section is classified according to the highest (least favourable) class of its compression parts. Exceptions are specified in 6.2.1(10) and 6.2.2.4(1).



– Flange à compressão:

$$\varepsilon = \sqrt{235/f_y} = \sqrt{235/275} = 0{,}92$$

$$c = (b - t_w - 2r)/2 = 74{,}8\ [mm]$$

$$c/t_f = 74.8/16.0 = 4.68 = 5.086\ \varepsilon$$ ❖Flange é classe 1

ESTADO LIMITE ÚTLIMO DE RESISTÊNCIA DE SECÇÃO RECTA SUJEITA A FLEXÃO E CORTE –EC3

– Alma à flexão:

$$\varepsilon = \sqrt{235/f_y} = \sqrt{235/275} = 0{,}92$$

$$c = (h - 2t_f - 2r) = 360{,}4\ [mm]$$

$$c/t_w = 360.4/9.5 = 37.94 = 41.43\ \varepsilon$$

❖ Alma é classe 1
❖ A secção também.

- Resistência da secção à flexão:

6 Ultimate limit states

6.2 Resistance of cross-sections

6.2.5 Bending moment

(1) The design value of the bending moment M_{Ed} at each cross-section should satisfy:

$$\frac{M_{Ed}}{M_{c,Rd}} \le 1{,}0$$

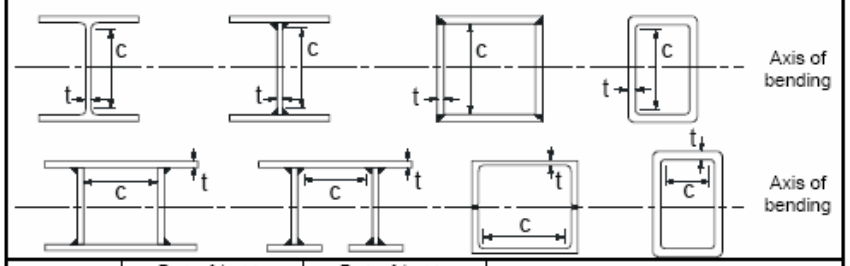
(2) The design resistance for bending about one principal axis of a cross-section is determined as follows:

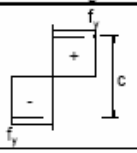
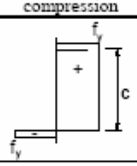
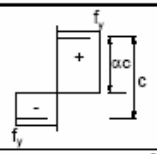
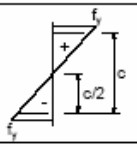
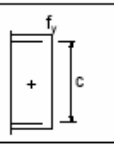
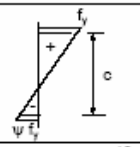
$$M_{c,Rd} = M_{pl,Rd} = \frac{W_{pl} f_y}{\gamma_{M0}} \quad \text{for class 1 or 2 cross sections} \qquad (6.13)$$

$$M_{c,y,Rd} = \frac{1501\times10^{-6}\times275\times10^{6}}{1.0} = 412755\ [Nm]$$

$$M_{E,d} = 367500\ [Nm] \quad \textbf{Verificação OK}$$

Internal compression parts



Class	Part subject to bending	Part subject to compression	Part subject to bending and compression
Stress distribution in parts (compression positive)			
1	$c/t \le 72\varepsilon$	$c/t \le 33\varepsilon$	when $\alpha > 0{,}5$: $c/t \le \frac{396\varepsilon}{13\alpha - 1}$; when $\alpha \le 0{,}5$: $c/t \le \frac{36\varepsilon}{\alpha}$
2	$c/t \le 83\varepsilon$	$c/t \le 38\varepsilon$	when $\alpha > 0{,}5$: $c/t \le \frac{456\varepsilon}{13\alpha - 1}$; when $\alpha \le 0{,}5$: $c/t \le \frac{41{,}5\varepsilon}{\alpha}$
Stress distribution in parts (compression positive)			
3	$c/t \le 124\varepsilon$	$c/t \le 42\varepsilon$	when $\psi > -1$: $c/t \le \frac{42\varepsilon}{0{,}67 + 0{,}33\psi}$; when $\psi \le -1$*): $c/t \le 62\varepsilon(1-\psi)\sqrt{(-\psi)}$

$\varepsilon = \sqrt{235/f_y}$	f_y	235	275	355	420	460
	ε	1,00	0,92	0,81	0,75	0,71

*) $\psi \le -1$ applies where either the compression stress $\sigma \le f_y$ or the tensile strain $\varepsilon_y > f_y/E$

ESTADO LIMITE ÚTLIMO DE RESISTÊNCIA DE SECÇÃO RECTA SUJEITA A FLEXÃO E CORTE –EC3

- Resistência da secção ao corte:

6.2.6 Shear

(1) The design value of the shear force V_{Ed} at each cross section should satisfy:

$$\frac{V_{Ed}}{V_{c,Rd}} \le 1{,}0$$

where $V_{c,Rd}$ is the design shear resistance. For plastic design $V_{c,Rd}$ is the design plastic shear resistance $V_{pl,Rd}$ as given in (2). For elastic design $V_{c,Rd}$ is the design elastic shear resistance calculated using (4) and (5).

(2) In the absence of torsion the design plastic shear resistance is given by:

$$V_{pl,Rd} = \frac{A_v\left(f_y / \sqrt{3}\right)}{\gamma_{M0}} \qquad (6.18)$$

where A_v is the shear area.

(3) The shear area A_v may be taken as follows:

a) rolled I and H sections, load parallel to web $\quad A - 2bt_f + (t_w + 2r)t_f$ but not less than $\eta h_w t_w$

$$A_v = A - 2bt_f + (t_w + r)t_f = 9450 - 2\times 179.5\times 16 + (9.5 + 2\times 10.2)\times 16 = 4184.4$$

$$A_v = \eta \times h_w \times t_w = 1.2\times 380.8\times 9.5 = 4341.12$$

$$A_v = 4341.12\ [mm^2]$$

$$V_{pl,Rd} = \frac{4341.12\times 10^{-6}\left(275\times 10^{6} / \sqrt{3}\right)}{1.0} = 689245.4\ [N]$$

ESTADO LIMITE ÚTLIMO DE RESISTÊNCIA DE SECÇÃO RECTA SUJEITA A FLEXÃO E CORTE –EC3

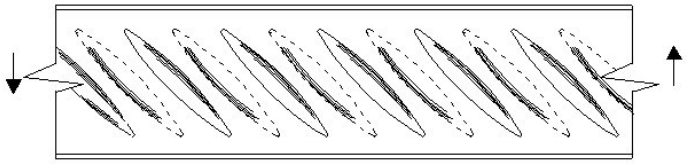
- A verificação da encurvadura provocada pelo esforço de corte não precisa ser efectuada, porque não se verifica inequação.

(6) In addition the shear buckling resistance for webs without intermediate stiffeners should be according to section 5 of EN 1993-1-5, if

$$\frac{h_w}{t_w} > 72\frac{\varepsilon}{\eta} \qquad (6.22)$$

For η see section 5 of EN 1993-1-5.

NOTE η may be conservatively taken equal to 1,0.



$$\frac{h_w}{t_w} = \frac{380.8}{9.5} = 40.08$$

$$72\frac{\varepsilon}{\eta} = \frac{72\times 0.92}{1.2} = 55.2$$

$$\frac{h_w}{t_w} \le 72\frac{\varepsilon}{\eta}$$

- A verificação da secção resistente ao corte é aceitável, porque:

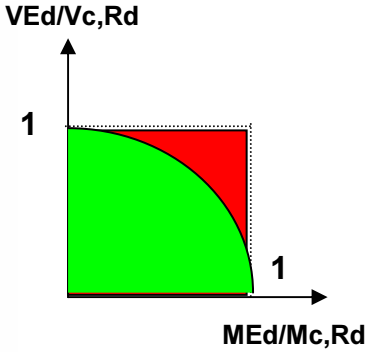
$$V_{E,d} \le V_{c,Rd} \quad \Leftrightarrow \quad 525000 \le 689245.4$$

Verificação OK

ESTADO LIMITE ÚTLIMO DE RESISTÊNCIA DE SECÇÃO RECTA SUJEITA A FLEXÃO E CORTE –EC3

- Resistência da secção tendo em consideração os esforços combinados:

6.2.8 Bending and shear



(1) Where the shear force is present allowance should be made for its effect on the moment resistance.

(2) Where the shear force is less than half the plastic shear resistance its effect on the moment resistance may be neglected except where shear buckling reduces the section resistance, see EN 1993-1-5.

(3) Otherwise the reduced moment resistance should be taken as the design resistance of the cross-section, calculated using a reduced yield strength

$$(1-\rho)\, f_y \qquad (6.29)$$

for the shear area,

where $\rho = \left(\frac{2\,V_{Ed}}{V_{pl,Rd}} - 1\right)^2$ and $V_{pl,Rd}$ is obtained from 6.2.6(2). $\Rightarrow$ $\boxed{\rho = \left(\frac{2\times 525000}{689245.4} - 1\right)^2 = 0.274}$

$$\boxed{V_{E,d} = 525000 \quad \geq \quad \frac{V_{pl,Rd}}{2} = 344622.7} \qquad \Rightarrow \qquad \textbf{Cálculo de um momento resistente reduzido} \qquad \boxed{M_{y,V,Rd}}$$

(5) The reduced design plastic resistance moment allowing for the shear force may alternatively be obtained for I-cross-sections with equal flanges and bending about the major axis as follows:

$$M_{y,V,Rd} = \frac{\left[W_{pl,y} - \frac{\rho A_w^{\,2}}{4\,t_w}\right] f_y}{\gamma_{M0}} \qquad \text{but } M_{y,V,Rd} \leq M_{y,c,Rd}$$

$$\boxed{M_{y,V,Rd} = 386829\ [Nm]}$$

$$\boxed{M_{y,c,Rd} = 412755\ [Nm]}$$

where $M_{y,c,Rd}$ is obtained from 6.2.5(2)

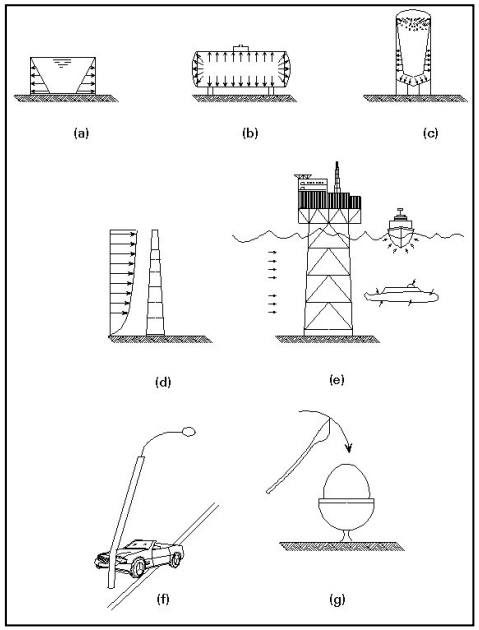
and $A_w = h_w\, t_w$

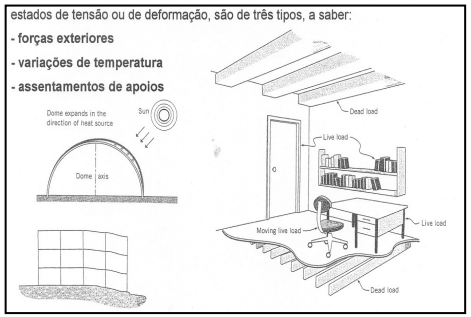
Conclusão: A secção do perfil é adequada para a solicitação combinada.

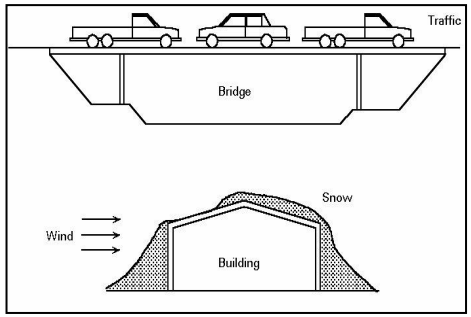
REGULAMENTO SEGURANÇA E ACÇÕES PARA ESTRUTURAS DE EDIFÍCIOS E PONTES - RSA

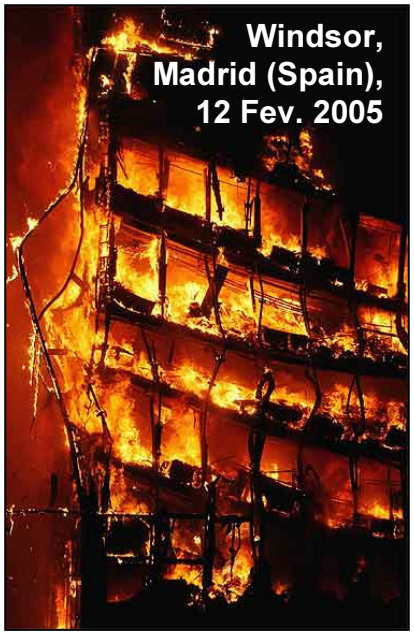
- Regulamento dividido em duas partes:
  - Critérios gerais de segurança (já verificado no REAE);
  - Quantificação de acções.

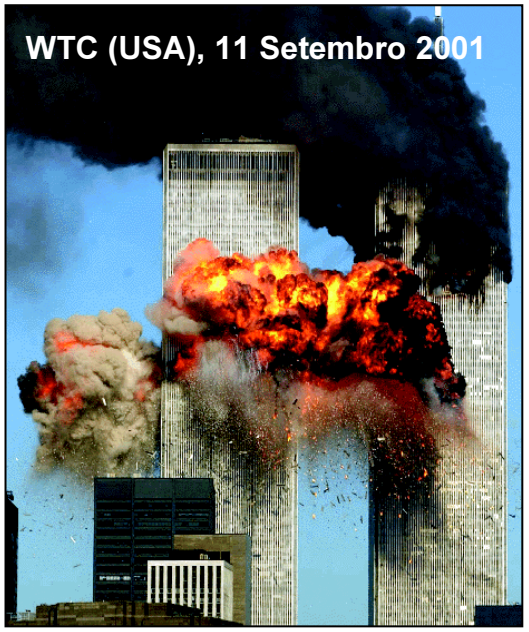
- Quantificação das acções:
  - Acções permanentes (peso próprio, impulsos da terra,…);
  - Acções variáveis (sobrecargas, neve, sismos, temperatura,…);
  - Acções provocadas por acidente (explosões, choques, incêndios,…).







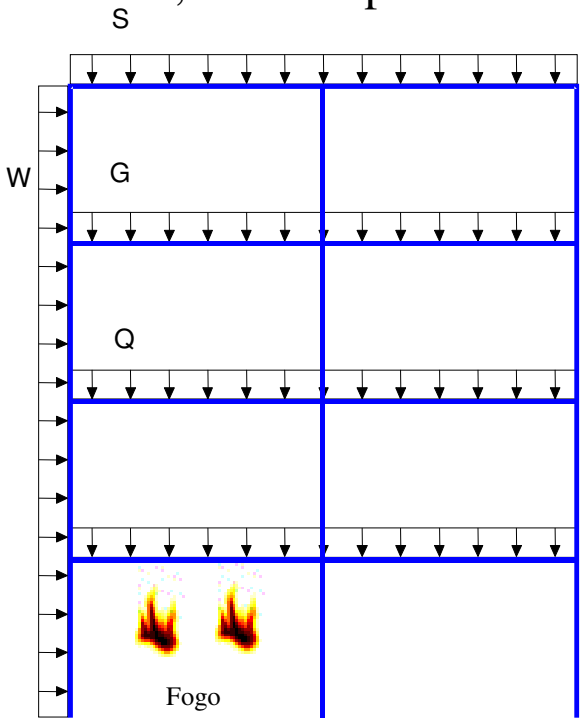




RSA – Características das acções

- Uma vez que nem todas as acções têm obrigação de actuar em simultâneo são feitas combinações das mesmas.
  - Combinação fundamental: $$S_d = \sum_{i=1}^{m} \gamma_{gi} S_{Gik} + \gamma_q \left[S_{Q1k} + \sum_{j=2}^{n} \psi_{0j} S_{Qjk} \right]$$
  - Combinação acidental: $$S_d = \sum_{i=1}^{m} S_{Gik} + S_{Fa} + \sum_{j=1}^{n} \psi_{2j} S_{Qjk}$$

- As acções são em geral quantificadas por valores característicos e, no caso das acções variáveis, também por valores reduzidos.



ACÇÕES

Acções para análise de temperatura Efeito térmico
FOGO

Acções para análise estrutural Efeito Mecânico	
Acções permanentes	G
Sobrecargas	Q
Neve	S
Vento	W

RSA – Características das Combinações e Coef. Segurança

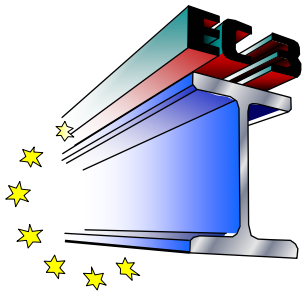
- As acções permanente quantificadas por valores característicos e as acções variáveis, quantificadas por valores reduzidos.
- Os valores reduzidos das acções variáveis são determinados pelos coeficientes ψ, em função do estado limite em consideração.
- Na verificação da segurança em relação aos estados limites, devem ser consideradas as combinações das acções cuja actuação simultânea seja verosímil e que produzam na estrutura os efeitos mais desfavoráveis.
- Caso as acções tenham um efeito favorável:
  - Acções permanentes: Valores característicos e coef. segurança unitários.
  - Acções variáveis: Não devem fazer parte da combinação.
- Coeficientes de segurança:

  $\gamma G=\gamma Q=1.5$

- ELU: $S_d = \sum_{i=1}^{m} 1.5\, S_{Gik} + 1.5\left[S_{Q1k} + \sum_{j=2}^{n} \psi_{0j} S_{Qjk} \right]$
- ELS, combinação rara: $S_d = \sum_{i=1}^{m} 1.0\, S_{Gik} + 1.0\left[S_{Q1k} + \sum_{j=2}^{n} \psi_{1j} S_{Qjk} \right]$
- ELS, combinação frequente: $S_d = \sum_{i=1}^{m} 1.0\, S_{Gik} + 1.0\left[\psi_1\, S_{Q1k} + \sum_{j=2}^{n} \psi_{2j} S_{Qjk} \right]$
- ELS, combinação quase permanente: $S_d = \sum_{i=1}^{m} 1.0\, S_{Gik} + 1.0\left[\psi_2\, S_{Q1k} + \sum_{j=2}^{n} \psi_{2j} S_{Qjk} \right]$

EC3 – PARTES SIGNIFICATIVAS PARA EDIFICAÇÃO EM AÇO

- EC1 Actions on structures
  - Part 1.1 Basis of design
  - Part 2.1 Densities, self-weight and imposed loads
  - Part 2.2 Actions on structures exposed to fire
  - Part 2.3 Snow loads
  - Part 2.4 Wind loads
- EC3 Design of steel structures
  - Part 1.1 - General Rules and rules for buildings
  - Part 1.2 - Fire resistance
- Combinação fundamental para ELU de um edifício de escritórios, acção variável dominante Q:



$$E_d = \gamma_G G + \gamma_{Q,1} Q_1 + \sum_{i>1} \psi_{0,i} \gamma_{Q,i} Q_i$$

Ed= 1,35 **G** + 1,5 **Q** + 0,7 x 1,5 (**W+S**)

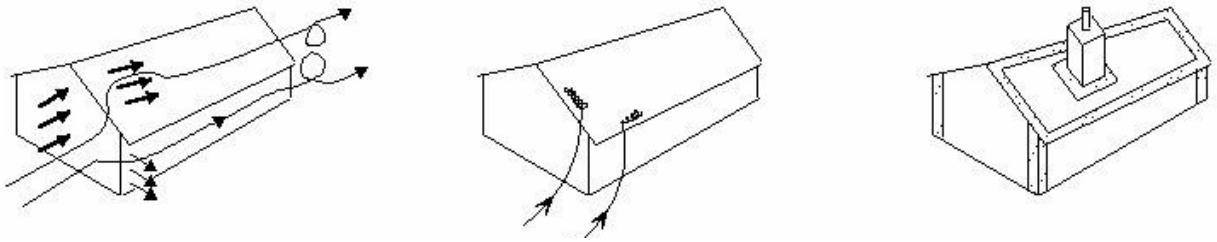
RSA- ACÇÃO PERMANENTE = G

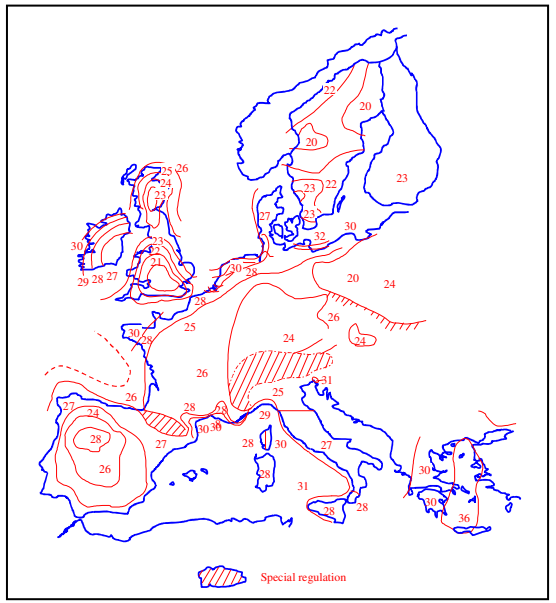
- Os pesos próprios dos elementos de construção devem ser obtidos a partir dos valores que os pesos volúmicos dos materiais apresentam nas condições reais de utilização.

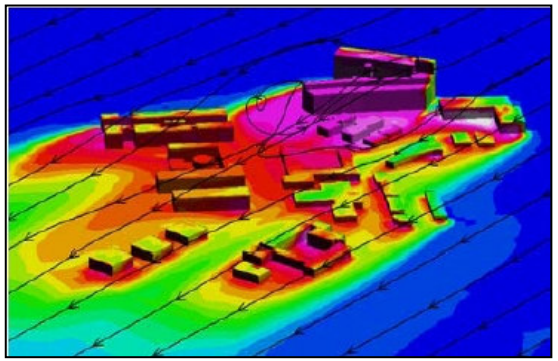
MATERIAIS	**DENSIDADE [KN/m^3]**
concrete	
Lightweight (varies with density class)	9 - 20
normal weight	*24
heavyweight	>28
reinforced and prestressed concrete; unhardened concrete	+1
masonry units	
dense limestone	20 - 29
granite	27 - 30
sandstone	21 - 27
glass blocks, hollow	8
terra cotta, solid	21
Metals	
aluminium	27
copper	87
steel	77
zinc	71
wood	
timber (depending on strength class C14 - C70; see prEN 338)	2,9 - 9,0
fibre building board:	
hardboard, standard and tempered	10
medium density fibreboard	8
softboard	4
other materials	
glass, in sheets	25
plastics:	
acrylic sheet	12
polystyrene, expanded, granules	0,25
slate	29

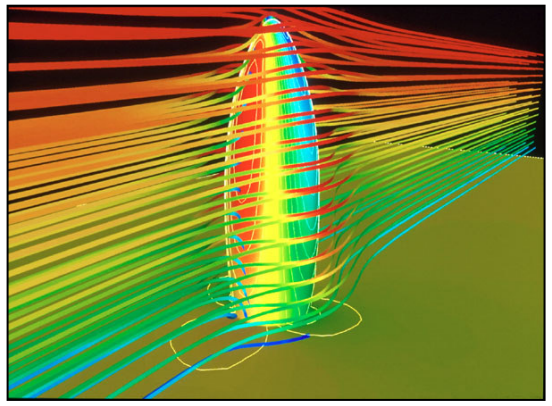
RSA- ACÇÃO DO VENTO =W

- Determinação do efeito por métodos analíticos, experimentais ou numéricos.
- Depende da velocidade do vento, logo da localização da edificação (zonamento)
- Depende da categoria do terreno, logo da tipologia da localização (rugosidade).
- Esforços determinados pelo modelo simplificado (presssões estáticas).









– Zonamento do continente e ilhas é definido por:
  - Zona A – locais não incluídos na zona B;
  - Zona B – Açores e Madeira e, no continente, locais situados na faixa de 5Km de largura ou altitude superiores a 600m.
– Rugosidade aerodinâmica pode ser dividida segundo a classificação I e II:
  - Rugosidade tipo I – zonas urbanas (construções de médio e grande porte)
  - Rugosidade tipo II – zonas rurais e periferia de zonas urbanas

RSA- ACÇÃO DO VENTO

- Pressão dinâmica do vento:
  - Para a região pertencente ao zonamento B, os valores característicos da pressão dinâmica a considerar, devem ser obtidos a partir dos valores do zonamento A, multiplicando por 1.2.

$$w_k = 0.5 \times \rho_{ar} \times v^2 = 0.613 \times v^2$$

- Pressão estática equivalente:
  - pressão dinâmica;
  - coeficientes de pressão.

$$p_{est} = w_k \times \delta_p = w_k \times (\delta_{pe} + \delta_{pi})$$

- Valores reduzidos desta acção:

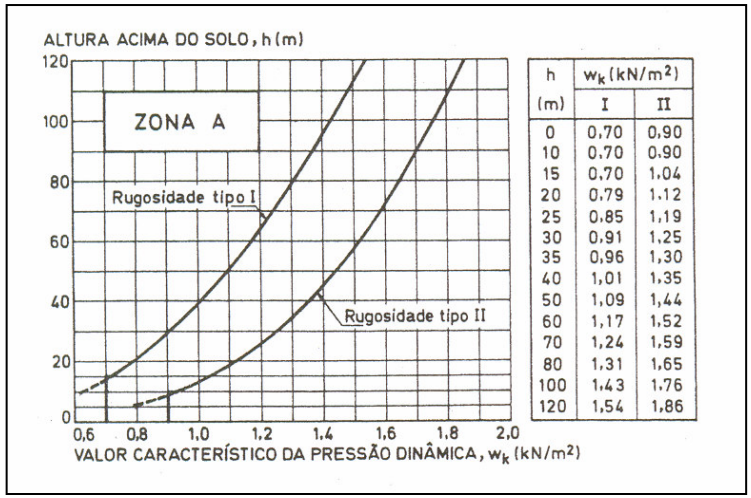
$$\psi_1 = 0.2$$

$$\psi_2 = 0$$

$$\psi_0 = 0.4$$

Rugosidade tipo I $$v = 18\left(\frac{h}{10}\right)^{0.28} + 14\ [m/s]$$

Rugosidade tipo II $$v = 25\left(\frac{h}{10}\right)^{0.20} + 14\ [m/s]$$



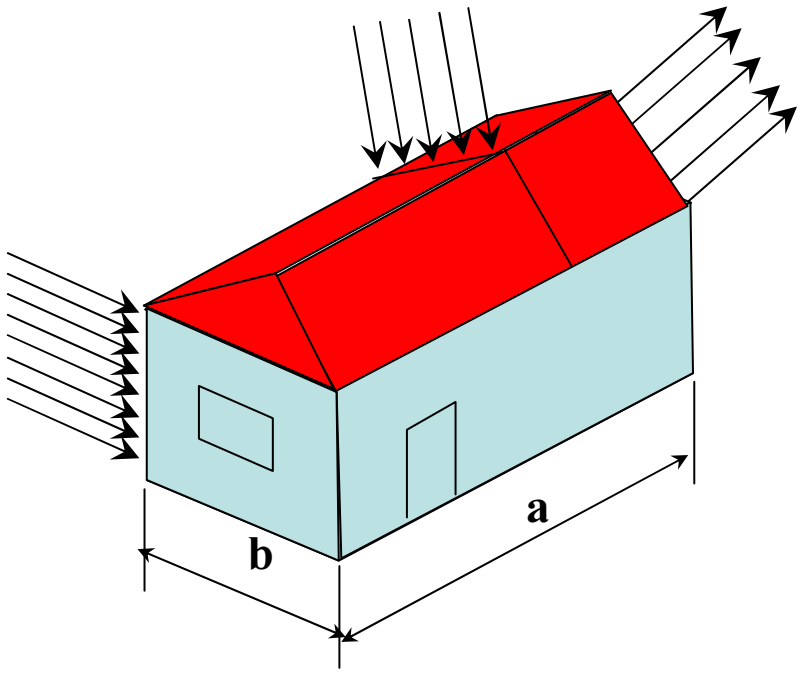
h (m)	w_k (kN/m²) I	II
0	0,70	0,90
10	0,70	0,90
15	0,70	1,04
20	0,79	1,12
25	0,85	1,19
30	0,91	1,25
35	0,96	1,30
40	1,01	1,35
50	1,09	1,44
60	1,17	1,52
70	1,24	1,59
80	1,31	1,65
100	1,43	1,76
120	1,54	1,86

RSA- ACÇÃO DO VENTO. Coeficientes de pressão (edifícios)

- δ_{pe} • Coeficientes de pressão exterior: Dependem da forma, direcção e sentido da actuação do vento.
- δ_{pi} • Coeficientes de pressão interior: Dependem das aberturas na evolvente dos edifícios.

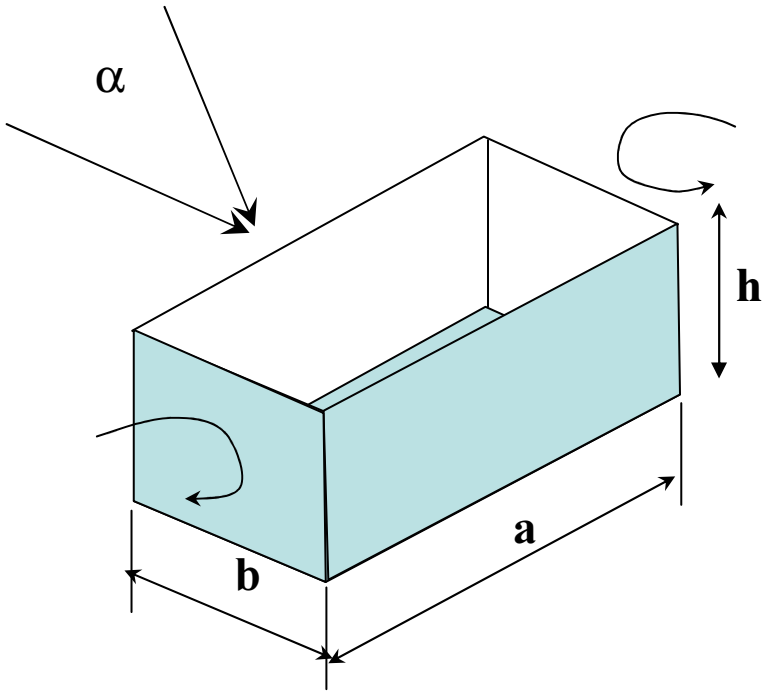
- Pressões: consideradas como acção nas faces do elemento de construção, positiva.
- Sucções: consideradas como acção nas faces do elemento de construção, negativa

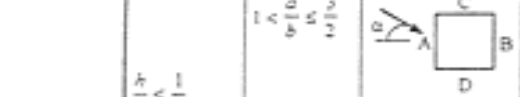
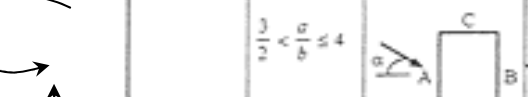
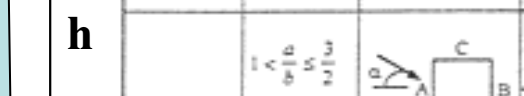
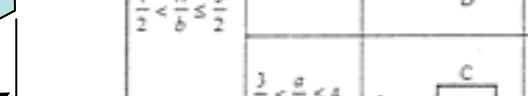
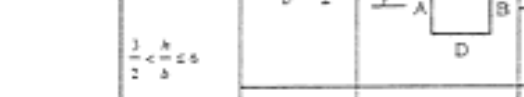
- Acções locais: Zonas restritas junto às arestas das fachadas e coberturas, desenvolvem-se acções importantes. Estas acções não se adicionam às pressões exteriores. Devem ser consideradas no dimensionamento de elementos secundários (madres, chapas, ligações, etc.).



RSA- ACÇÃO DO VENTO – Coef. pressão exterior

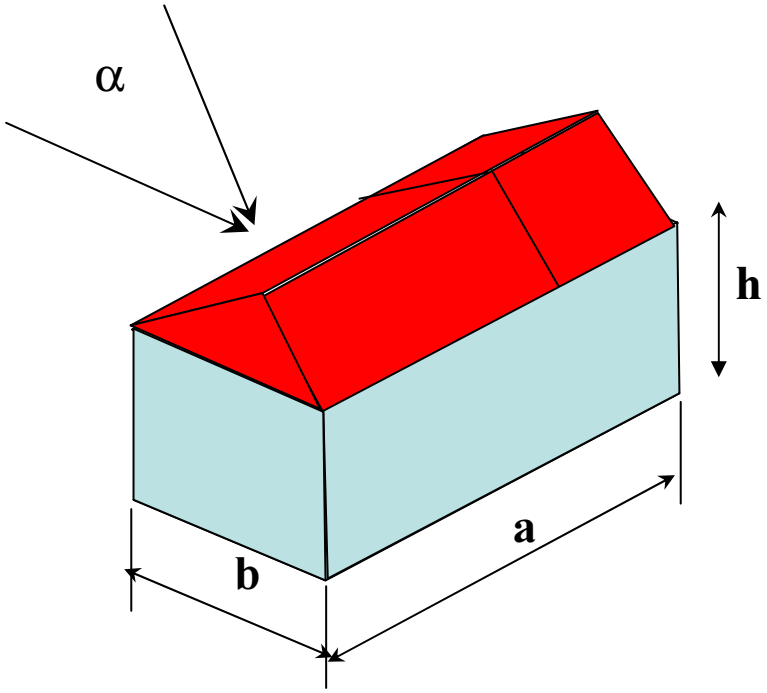
- Coeficientes de pressão nas fachadas:

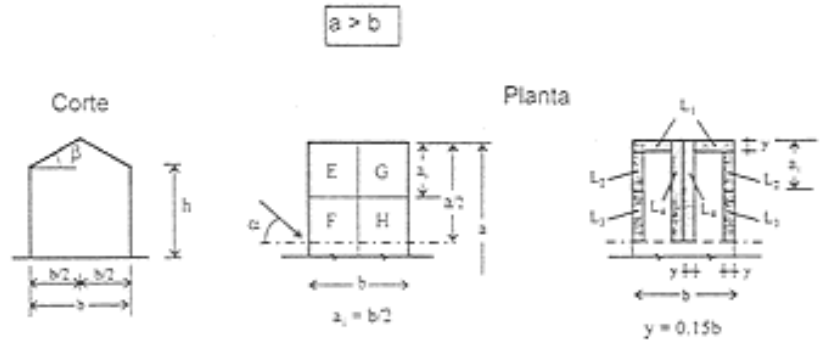


Relações geométricas do edifício (*)		planta	Direcção do vento	Acções globais sobre as superfícies				Acção locais na faixa referenciada na figura
h/b	a/b		α (graus)	A	B	C	D	0,25a / h
$\frac{h}{b} \leq \frac{1}{2}$	$1 < \frac{a}{b} \leq \frac{3}{2}$		0	+0,7	-0,2	-0,5	-0,5	-0,8
			90	-0,5	-0,5	+0,7	-0,2	
	$\frac{3}{2} < \frac{a}{b} \leq 4$		0	+0,7	-0,25	-0,6	-0,6	-1,0
			90	-0,5	-0,5	+0,7	-0,1	
$\frac{1}{2} < \frac{h}{b} \leq \frac{3}{2}$	$1 < \frac{a}{b} \leq \frac{3}{2}$		0	+0,7	-0,25	-0,6	-0,6	-1,1
			90	-0,6	-0,6	+0,7	-0,25	
	$\frac{3}{2} < \frac{a}{b} \leq 4$		0	+0,7	-0,3	-0,7	-0,7	-1,1
			90	-0,5	-0,5	+0,7	-0,1	
$\frac{3}{2} < \frac{h}{b} \leq 6$	$1 < \frac{a}{b} \leq \frac{3}{2}$		0	+0,8	-0,25	-0,8	-0,8	-1,2
			90	-0,8	-0,8	+0,8	-0,25	
	$\frac{3}{2} < \frac{a}{b} \leq 4$		0	+0,7	-0,4	-0,7	-0,7	-1,2
			90	-0,5	-0,5	+0,8	-0,1	

RSA- ACÇÃO DO VENTO – Coef. pressão exterior

- Coeficientes de pressão nas coberturas de duas vertentes:

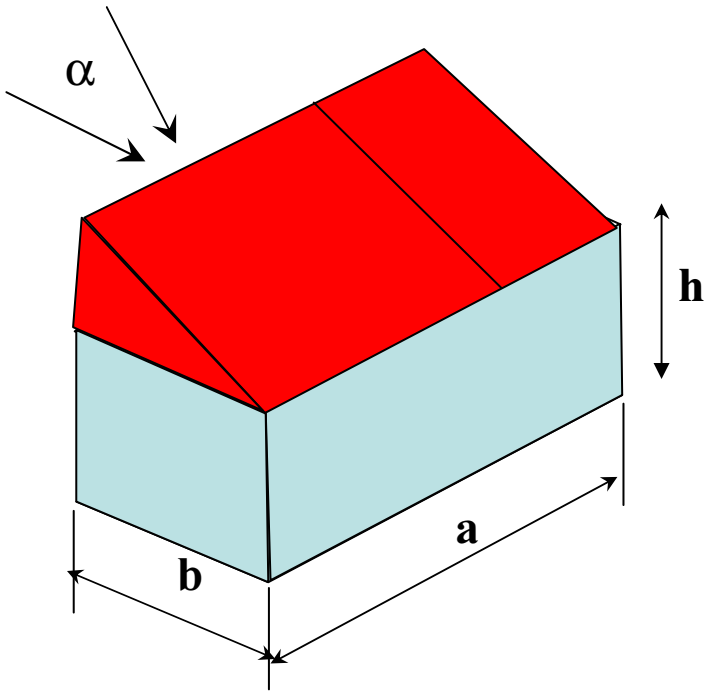


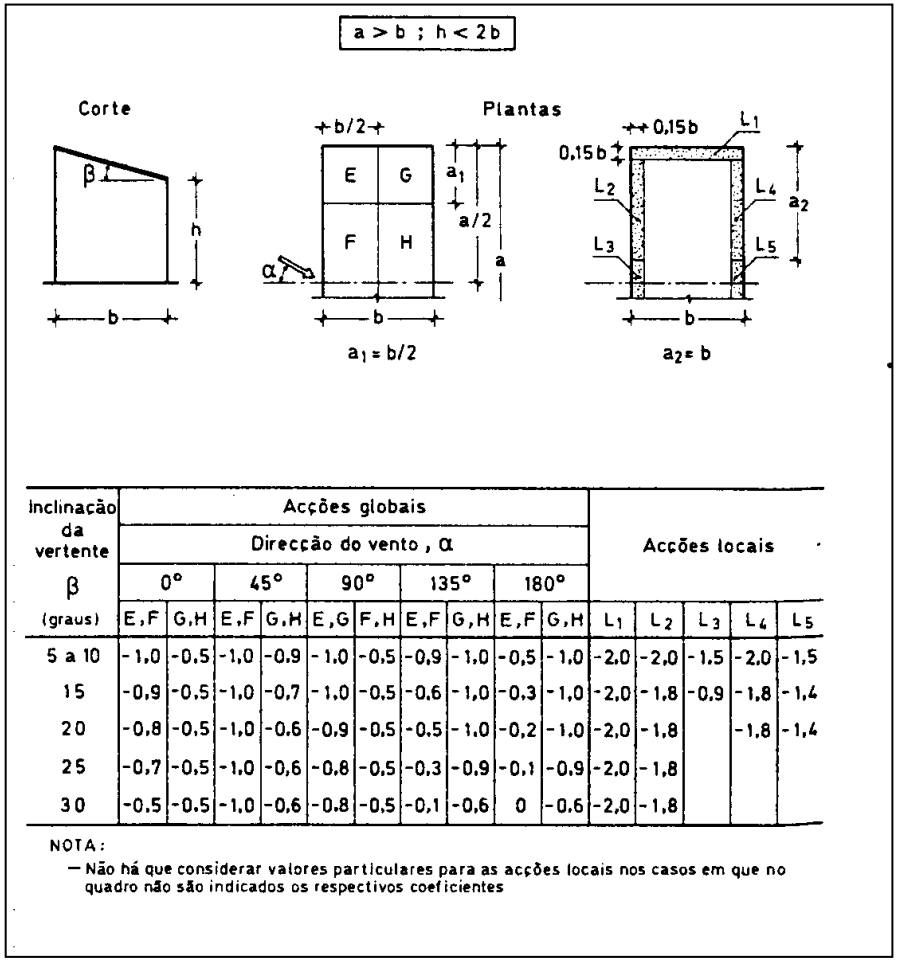


Relações geométricas do edifício h/b	Inclinação da vertente β (graus)	Acções globais: Direcção do vento α = 0°: E, F	Acções globais: Direcção do vento α = 0°: G, H	Acções globais: Direcção do vento α = 90°: E, G	Acções globais: Direcção do vento α = 90°: F, H	Acções locais: L_1	Acções locais: L_2	Acções locais: L_3	Acções locais: L_4
$\frac{h}{b} \leq \frac{1}{2}$	0	-0,8	-0,4	-0,8	-0,4	-2,0	-2,0	-2,0	-
	5	-0,9	-0,4	-0,8	-0,4	-1,4	-1,2	-1,2	-1,0
	10	-1,2	-0,4	-0,8	-0,6	-1,4	-1,4		-1,2
	20	-0,4	-0,4	-0,7	-0,6	-1,0			-1,2
	30	0	-0,4	-0,7	-0,6	-0,8			-1,1
	45	+0,3	-0,5	-0,7	-0,6				-1,1
$\frac{1}{2} < \frac{h}{b} \leq \frac{3}{2}$	0	-0,8	-0,6	-1,0	-0,6	-2,0	-2,0	-2,0	-
	5	-0,9	-0,6	-0,9	-0,6	-2,0	-2,0	-1,5	-1,0
	10	-1,1	-0,6	-0,8	-0,6	-2,0	-2,0	-1,5	-1,2
	20	-0,7	-0,5	-0,8	-0,6	-1,5	-1,5	-1,5	-1,0
	30	-0,2	-0,5	-0,8	-0,8	-1,0			-1,0
	45	+0,2	-0,5	-0,8	-0,8				
$\frac{3}{2} < \frac{h}{b} \leq 6$	0	-0,7	-0,6	-0,9	-0,7	-2,0	-2,0	-2,0	-
	5	-0,7	-0,6	-0,8	-0,6	-2,0	-2,0	-1,5	-1,0
	10	-0,7	-0,6	-0,8	-0,8	-2,0	-2,0	-1,5	-1,2
	20	-0,8	-0,6	-0,8	-0,8	-1,5	-1,5	-1,5	-1,2
	30	-1,0	-0,5	-0,8	-0,7	-1,5			
	40	-0,2	-0,5	-0,8	-0,7	-1,0			
	50	+0,2	-0,5	-0,8	-0,7				

RSA- ACÇÃO DO VENTO – Coef. pressão exterior

- Coeficientes de pressão nas coberturas de uma vertente:



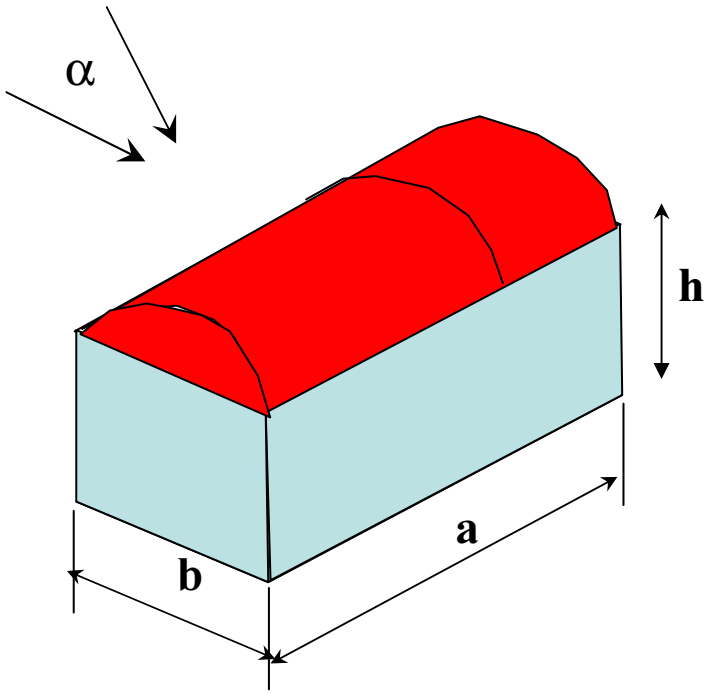


Inclinação da vertente β (graus)	Acções globais: Direcção do vento, α = 0° E,F	0° G,H	45° E,F	45° G,H	90° E,G	90° F,H	135° E,F	135° G,H	180° E,F	180° G,H	Acções locais L1	L2	L3	L4	L5
5 a 10	-1,0	-0,5	-1,0	-0,9	-1,0	-0,5	-0,9	-1,0	-0,5	-1,0	-2,0	-2,0	-1,5	-2,0	-1,5
15	-0,9	-0,5	-1,0	-0,7	-1,0	-0,5	-0,6	-1,0	-0,3	-1,0	-2,0	-1,8	-0,9	-1,8	-1,4
20	-0,8	-0,5	-1,0	-0,6	-0,9	-0,5	-0,5	-1,0	-0,2	-1,0	-2,0	-1,8		-1,8	-1,4
25	-0,7	-0,5	-1,0	-0,6	-0,8	-0,5	-0,3	-0,9	-0,1	-0,9	-2,0	-1,8			
30	-0,5	-0,5	-1,0	-0,6	-0,8	-0,5	-0,1	-0,6	0	-0,6	-2,0	-1,8			

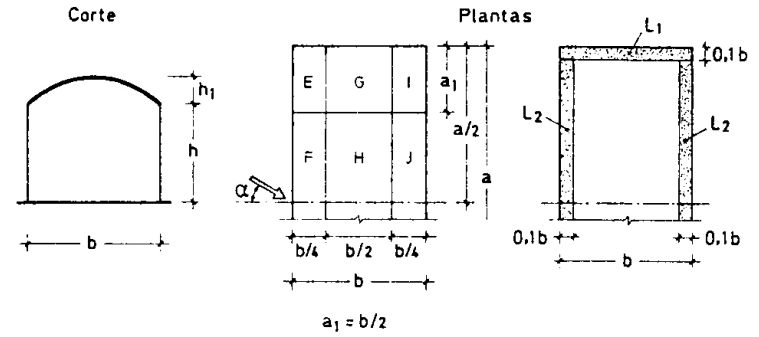
NOTA:
— Não há que considerar valores particulares para as acções locais nos casos em que no quadro não são indicados os respectivos coeficientes

RSA- ACÇÃO DO VENTO – Coef. pressão exterior

- Coeficientes de pressão nas coberturas cilindricas:



$a > b \quad h/b \geq 0{,}5$
$0{,}1 \leq h_1/b \leq 0{,}5$



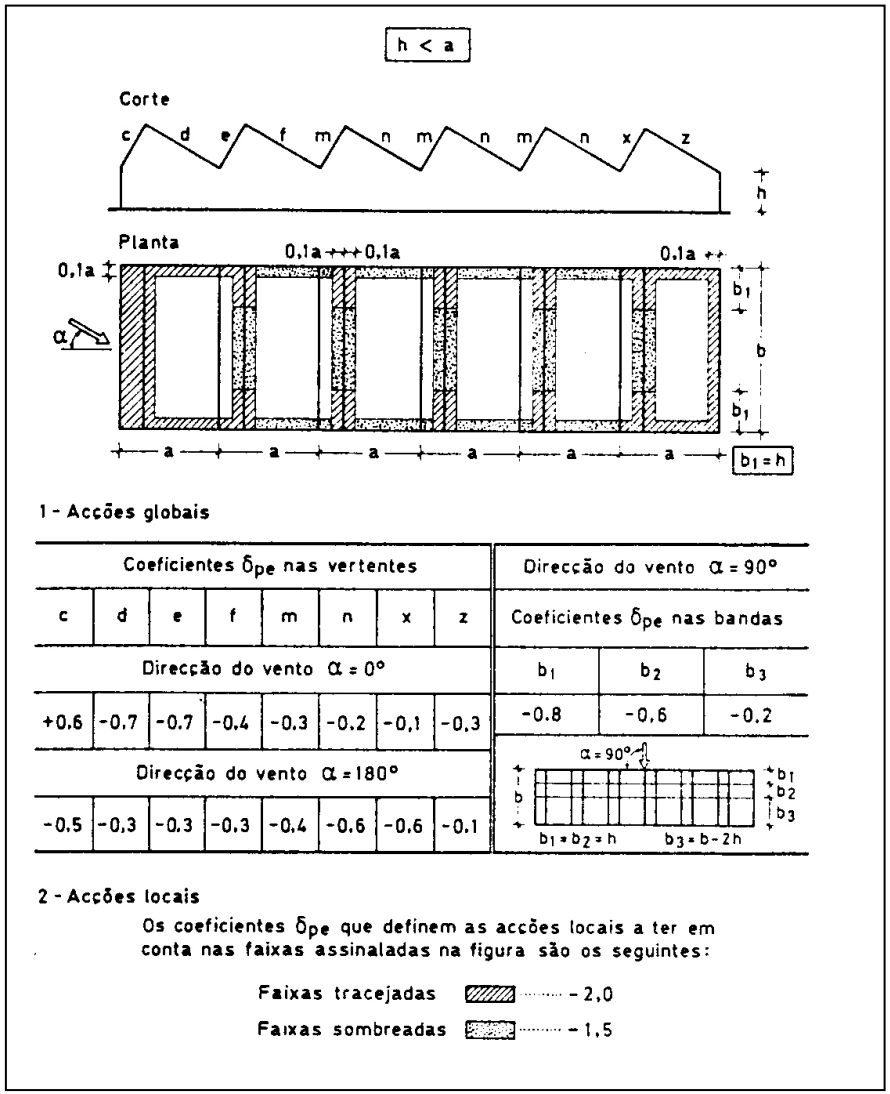
Abatimento h_1/b	Acções globais					Acções locais	
	Direcção do vento , α						
	0°			90°			
	E,F	G,H	I,J	E,G,I	F,H,J	L_1	L_2
0,1	-0,9	-0,8	-0,5	-0,8	-0,6	-1,6	-1,8
0,2	-0,9 ou 0 (*)	-0,9	-0,5	-0,8	-0,6	-1,6	-1,8
0,3	-0,3 ou +0,2 (*)	-1,0	-0,5	-0,8	-0,6	-1,6	-0,6
0,4	+0,4	-1,1	-0,5	-0,8	-0,6	-1,6	
0,5	+0,7	-1,2	-0,5	-0,8	-0,6	-1,6	

(*) Deve considerar-se o valor mais desfavorável

NOTA :
– Não há que considerar valores particulares para as acções locais nos casos em que no quadro não são indicados os respectivos coeficientes

RSA- ACÇÃO DO VENTO – Coef. pressão exterior

- Outras coberturas: Dentes de serra, múltiplas 2 vertentes.



1 - Acções globais

Coeficientes δ_{pe} nas vertentes							
c	d	e	f	m	n	x	z
Direcção do vento $\alpha = 0°$							
+0.6	-0.7	-0.7	-0.4	-0.3	-0.2	-0,1	-0.3
Direcção do vento $\alpha = 180°$							
-0.5	-0.3	-0.3	-0.3	-0.4	-0.6	-0.6	-0.1

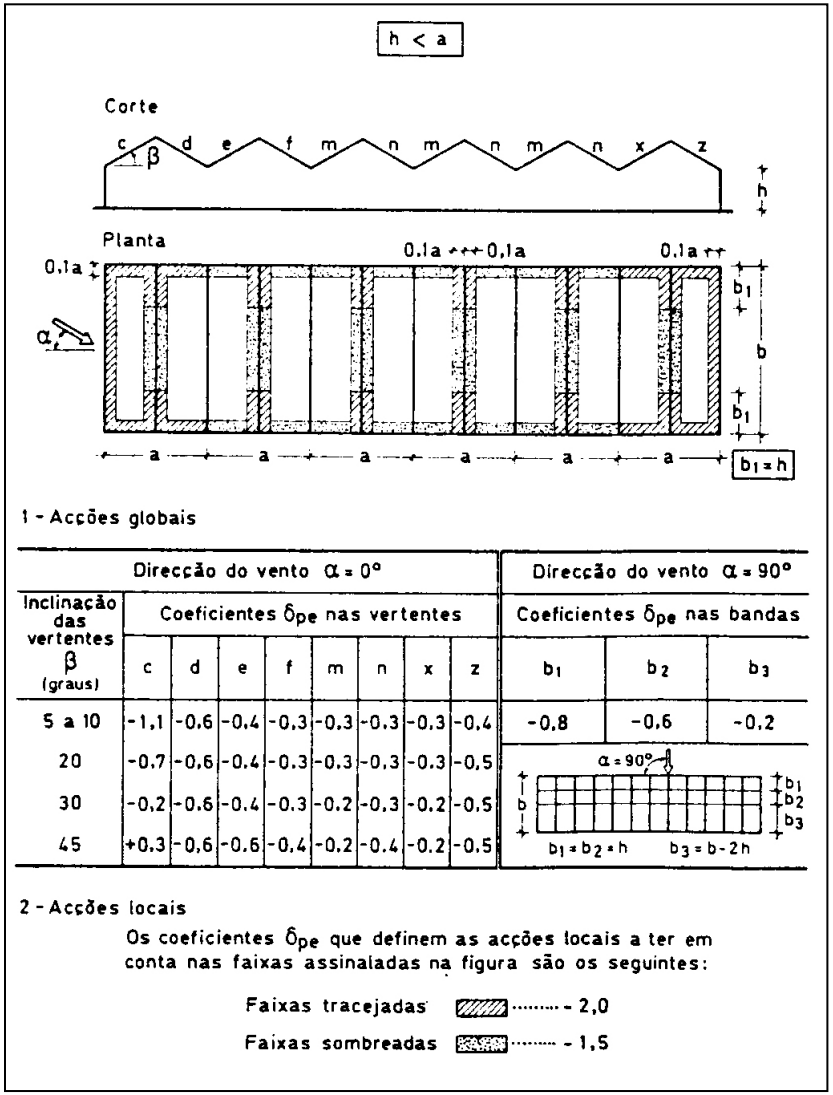
Direcção do vento $\alpha = 90°$		
Coeficientes δ_{pe} nas bandas		
b_1	b_2	b_3
-0.8	-0,6	-0.2

2 - Acções locais

Os coeficientes δ_{pe} que definem as acções locais a ter em conta nas faixas assinaladas na figura são os seguintes:

Faixas tracejadas ..... - 2,0

Faixas sombreadas ..... - 1,5



1 - Acções globais

Direcção do vento $\alpha = 0°$									Direcção do vento $\alpha = 90°$		
Inclinação das vertentes β (graus)	Coeficientes δ_{pe} nas vertentes								Coeficientes δ_{pe} nas bandas		
	c	d	e	f	m	n	x	z	b_1	b_2	b_3
5 a 10	-1,1	-0,6	-0,4	-0,3	-0,3	-0,3	-0,3	-0,4	-0,8	-0,6	-0,2
20	-0,7	-0,6	-0,4	-0,3	-0,3	-0,3	-0,3	-0,5			
30	-0,2	-0,6	-0,4	-0,3	-0,2	-0,3	-0,2	-0,5			
45	+0,3	-0,6	-0,6	-0,4	-0,2	-0,4	-0,2	-0,5			

2 - Acções locais

Os coeficientes δ_{pe} que definem as acções locais a ter em conta nas faixas assinaladas na figura são os seguintes:

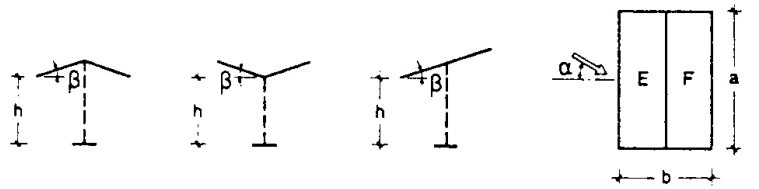
Faixas tracejadas ..... - 2,0

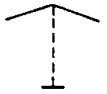
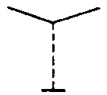
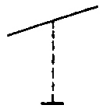
Faixas sombreadas ..... - 1,5

RSA- ACÇÃO DO VENTO – Coef. pressão

- Coberturas isoladas:
  - Acção exercída sobre as partes superiores e inferiores da cobertura.
    - Positivos de cima para baixo.
    - Negativos no sentido contrário.
  - Acção que resulta do atrito do ar:
    - Forças horizontais: $F1=0.05xaxbxW_k$

$a > b \quad 0,5 \leqslant h/b < 1,0$



Tipo de cobertura	Inclinação da vertente β (graus)	Direcção do vento α (graus)	Coeficientes δ_p nas vertentes (*) E	F
	5	0	-1,1 ou +1,2	-1.0
	10		-1,1 ou +1,4	-1,0
	15		-0,7 ou +1,6	-1,0
	20		-0,3 ou +1,8	-1,0
	25		-0,2 ou +2,0	-0,8
	30		0 ou +2,0	-0,7
	5	0	-1.2 ou +0,8	-0,8 ou +1,0
	10		-1,4 ou +0.6	-0,6 ou +1,0
	15		-1,6 ou +0.4	-0,6 ou +1,0
	20		-1,8 ou +0,2	-0,6 ou +0,7
	25		-2.0 ou 0	-0,6 ou +0,2
	30		-2.0 ou 0	-0,6 ou 0
	0	0 (bordo mais baixo a barlavento)	-1,5 ou+1.5 (**)	-0.5 ou+0.5 (**)
	5		-1,5 ou+1.5 (**)	-0.55 ou+0.55(**)
	10		+1,55	+0,65
	15		+1,55	+0,7
	20		+1,6	+0,75
	25		+1,6	+0,85
	30		+1,65	+0,95
	0	180 (bordo mais baixo a sotavento)	-0.5 ou+0.5 (**)	-1.5 ou+1,5 (**)
	5		-0,55 ou+0.55(**)	-1.5 ou+1,5 (**)
	10		-0.65	-1,55
	15		-0,7	-1,55
	20		-0,75	-1.6
	25		-0,85	-1,6
	30		-0,95	-1,65

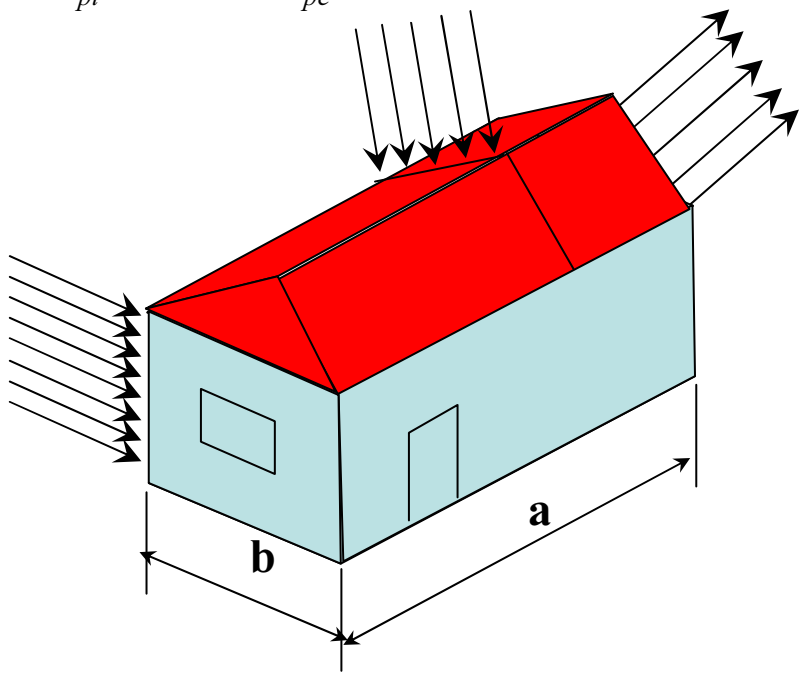
(*) Sempre que, com o mesmo β e α, são indicados dois valores de δ_p numa mesma vertente, deverá considerar-se a hipótese mais desfavoravel

(**) Os coeficientes a considerar simultaneamente para as vertentes E e F devem ter o mesmo sinal

RSA- ACÇÃO DO VENTO – Coef. pressão interior

- Edificíos com interior não compartimentado:
  - situações pouco prováveis de existência de aberturas nas fachadas com vento intenso
    - duas fachadas opostas com permeabilidade semelhante e as outras duas impermeáveis:
      - vento normal às fachadas permeáveis: $\delta_{pi} = +0.2$
      - vento normal às fachadas impermeáveis: $\delta_{pi} = -0.3$
    - quatro fachadas com permeabilidade semelhante: $\delta_{pi} = -0.3$
  - situações com existência de aberturas nas fachadas em situações de vento intenso
    - o coef.d epressão exterior considerado nas fachadas em que predominam as aberturas

$$\delta_{pi} = +0.75\ \delta_{pe}$$

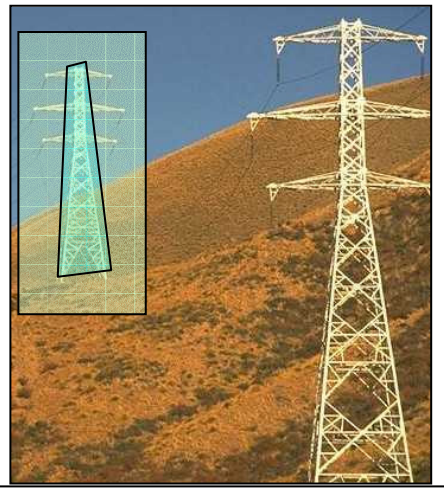


RSA- ACÇÃO DO VENTO – construções especiais

- Estruturas reticuladas (estruturas planas isoladas):
  - Índicie de cheios

$$\lambda = \frac{A_1}{A_2}$$

em que A_1 — área efectiva — é a soma das áreas das projecções de todos os elementos da estrutura num plano normal à direcção do vento, e A_2 é a área limitada pela projecção, no mesmo plano, do contorno exterior da estrutura.



  - Um tipo de barras:

$$F = \delta_f \; w \; A_1$$

Coeficientes de força (regimes supercríticos e sub.)

Índice de cheios λ	Tipos de elementos da estrutura		
	Barras de secção angulosa	Barras de secção circular	
		$d\sqrt{w} < 0{,}15$ (*)	$d\sqrt{w} \geq 0{,}15$ (*)
0,1	1,9	1,2	0,7
0,2	1,8	1,2	0,8
0,3	1,7	1,2	0,8
0,4	1,7	1,1	0,8
0,5	1,6	1,1	0,8
0,75	1,6	1,5	1,4

(*) d expresso em metros e w em quilonewtons por metro quadrado

  - Mais do que um tipo de barras:

$$F = w \; (\delta_{fa} A_a + \delta_{fc1} A_{c1} + \delta_{fc2} A_{c2})$$

δ_{fa} — coeficiente de força correspondente às barras de secção angulosa;
δ_{fc1} — coeficiente de força correspondente às barras de secção circular em regime subcrítico;
δ_{fc2} — coeficiente de força correspondente às barras de secção circular em regime supercrítico;
A_a — área efectiva correspondente às barras de secção angulosa;
A_{c1} — área efectiva correspondente às barras de secção circular em regime subcrítico;
A_{c2} — área efectiva correspondente às barras de

RSA- ACÇÃO DO VENTO – construções especiais

- Estruturas reticuladas (estruturas dispostas paralelamente):
  - Índice aerodinâmico de cheios ϕ.

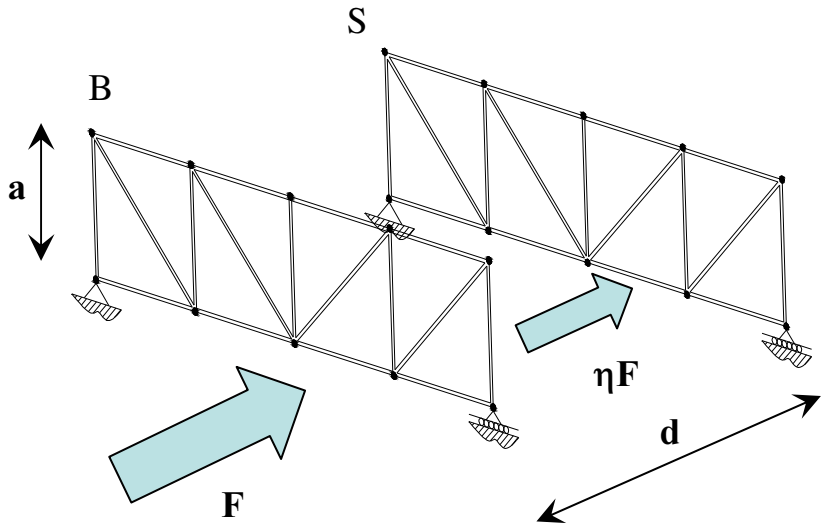
$$\varphi = \xi \lambda$$

em que λ é calculado de acordo com a definição dada em 3.4.1 e o coeficiente ξ toma os seguintes valores:

$\xi = 1{,}6$ — no caso de estruturas formadas unicamente por barras de secção angulosa;
$\xi = 1{,}2$ — no caso de estruturas formadas predominantemente por barras de secção circular em regime subcrítico;
$\xi = 0{,}5$ — no caso de estruturas formadas predominantemente por barras de secção circular em regime supercrítico.

$$\lambda = \frac{A_1}{A_2}$$

  - Factor de protecção η.



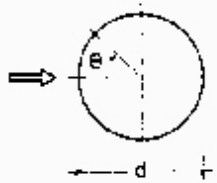
Coeficiente de espaçamento μ	Índice aerodinâmico de cheios φ							
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	≥0,8
≤ 1,0	1,0	0,96	0,90	0,80	0,68	0,54	0,44	0,37
2,0	1,0	0,97	0,91	0,82	0,71	0,58	0,49	0,43
3,0	1,0	0,97	0,92	0,84	0,74	0,63	0,54	0,48
4,0	1,0	0,98	0,93	0,86	0,77	0,67	0,59	0,54
5,0	1,0	0,98	0,94	0,88	0,80	0,71	0,64	0,60
6,0	1,0	0,99	0,95	0,90	0,83	0,75	0,69	0,66

$$\mu = \frac{d}{a}$$

RSA- ACÇÃO DO VENTO – construções especiais

- Construções de forma cilindrica (Reservatórios):

  - Coeficientes de pressão exterior



Ângulo θ (graus)	Superfície rugosa		Superfície lisa	
	h/d = 10	h/d = 2,5	h/d = 10	h/d = 2,5
0	+1,0	+1,0	+1,0	+1,0
10	+0,9	+0,9	+0,9	+0,9
20	+0,7	+0,7	+0,7	+0,7
30	+0,4	+0,4	+0,35	+0,35
40	0	0	0	0
50	−0,6	−0,4	−0,7	−0,5
60	−0,95	−0,8	−1,2	−1,05
70	−1,25	−1,1	−1,4	−1,25
80	−1,2	−1,05	−1,45	−1,3
90	−1,0	−0,85	−1,4	−1,2
100	−0,8	−0,65	−1,1	−0,85
120	−0,5	−0,35	−0,6	−0,4
140	−0,4	−0,3	−0,35	−0,25
160	−0,4	−0,3	−0,35	−0,25
180	−0,4	−0,3	−0,35	−0,25

  - Coeficientes de pressão interior

$h/d \geq 0{,}3 \ldots . \delta_{pi} = -0{,}8$

$h/d < 0{,}3 \ldots . \delta_{pi} = -0{,}5$

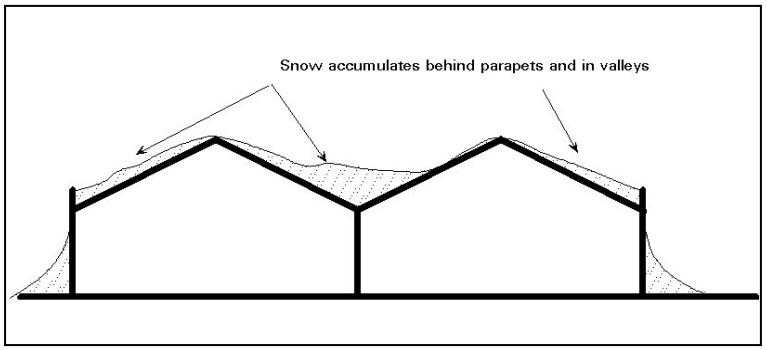
RSA- ACÇÃO DA NEVE = S

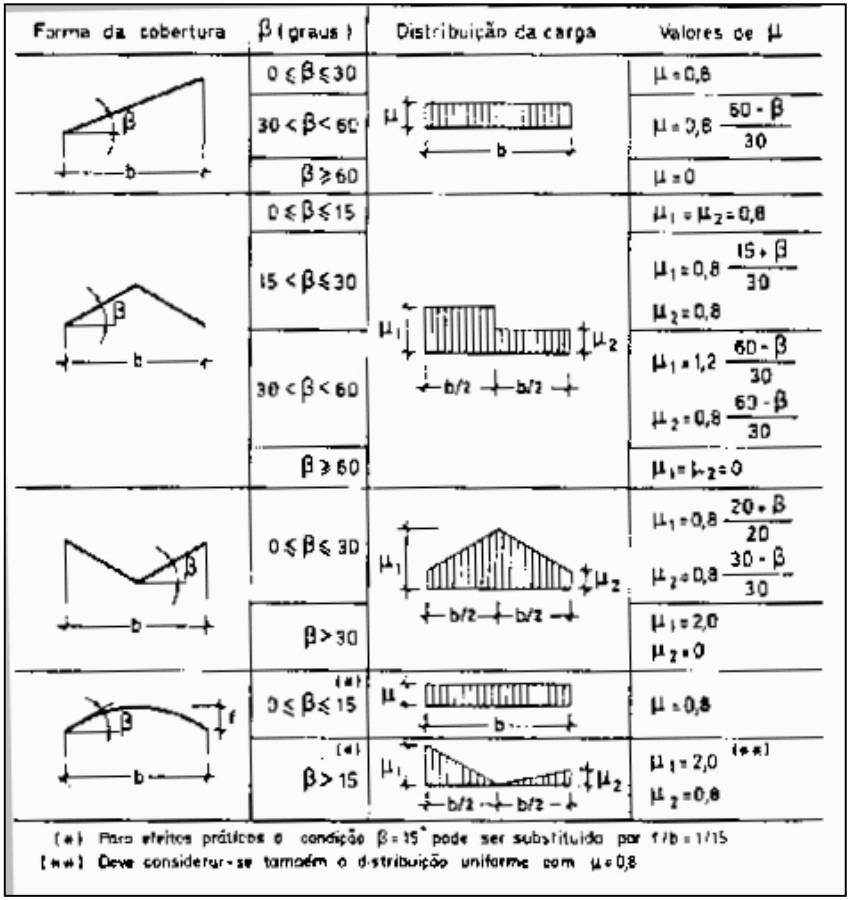
- Locais a considerar (Portugal):
  - locais com altitude igual ou superior a 200 m situados nos distritos de Viana do Castelo, Braga, Vila Real, Bragança, Porto, Aveiro, Viseu, Guarda, Coimbra, Leiria, Castelo Branco e Portalegre.
  - Nos restantes locais do continente e nos arquipélagos dos Açores e da Madeira não há que considerar a acção da neve
- Valor de projecto em plano horizontal:
  - coeficiente de forma
  - valor carcaterístico

$$S_k = \mu\, S_{0k} \rightarrow S_{0k} = \frac{1}{400}(h-50) \quad [kN/m^2]$$

- Valores reduzidos desta acção:

$$\psi_0 = 0.6 \qquad \psi_1 = 0.3 \qquad \psi_2 = 0$$

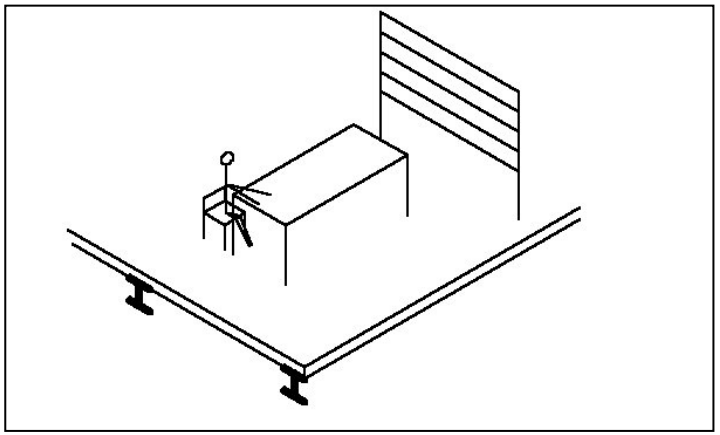




RSA - ACÇÕES ESPECÍFICAS (sobrecarga) = Q

- Pavimentos (valores característicos):

Tipo	PAVIMENTOS	S
1.a	Compartimentos de utilização privada	2.0 [kN/m2]
1.b	Compartimentos de utilização colectiva, sem concentração	3.0 [kN/m2]
1.c	Compartimentos de utilização colectiva, média concentração	4.0 [kN/m2]
1.d	Recintos de utilização colectiva, elevada concentração	5.0 [kN/m2]
1.e	Recintos de utilização colectiva, muito elevada concentração	6.0 [kN/m2]
2.c	Oficinas de indústria ligeira	5.0 [kN/m2]
2.d	Garagens de automóveis ligeiros particulares	4.0 [kN/m2]
2.d	Garagens de automóveis ligeiros públicas	5.0 [kN/m2]



- Coberturas (valores característicos):

COBERTURAS	S
Ordinárias	0.3 [kN/m2]
Terraços não acessíveis	1.0 [kN/m2]
Terraços acessíveis	2.0 [kN/m2]

- Valores reduzidos das sobrecargas a considerar nas coberturas são geralmente nulos.
- Valores reduzidos nos pavimentos

Tipo	PAVIMENTOS	ψ_0	ψ_1	ψ_2
1.a	Compartimentos de utilização privada	0.4	0.3	0.2
1.b	Compartimentos de utilização colectiva, sem concentração	0.7	0.6	0.4
1.c	Compartimentos de utilização colectiva, média concentração	0.7	0.6	0.4
1.d	Recintos de utilização colectiva, elevada concentração	0.4	0.3	0.2
1.e	Recintos de utilização colectiva, muito elevada concentração	0.4	0.3	0.2
2.c	Oficinas de indústria ligeira	0.8	0.7	0.6
2.d	Garagens de automóveis ligeiros particulares	0.8	0.7	0.6
2.d	Garagens de automóveis ligeiros públicas	0.8	0.7	0.6

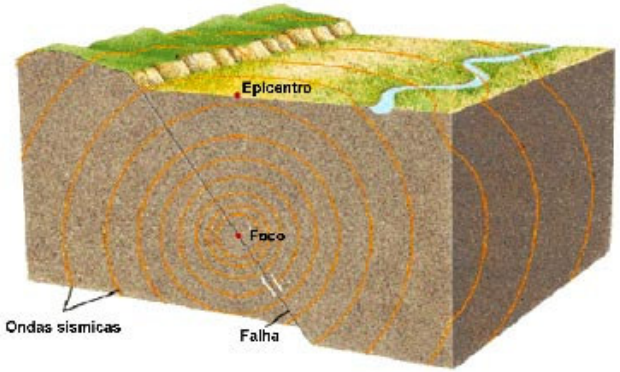
RSA - ACÇÕES SÍSMICAS

- Escala de Richter: Atribui um número sem limite superior (escala aberta) para quantificar o sismo. Escala criada em 1035, mede o movimento da terra a 100 km do epícentro. Varia de uma forma logarítmica, o que significa que a energia aumenta 10 vezes por cada número de escala.

$$Log(a_{máx}) - Log(0.001) \approx M$$

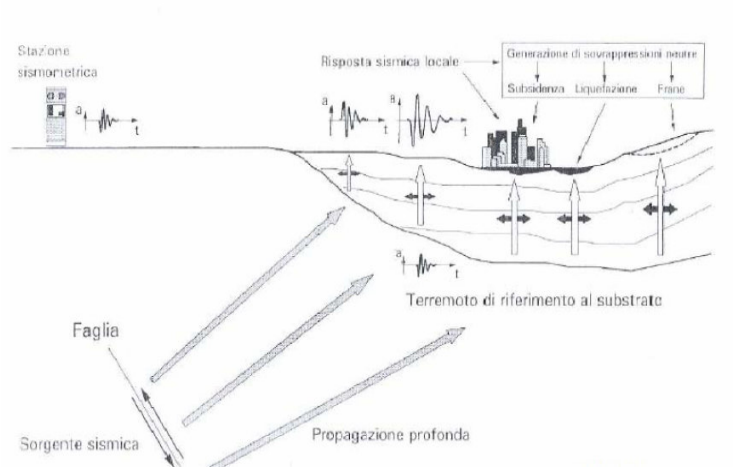
$a_{máx}$ Medido a 100 [km] do epicentro, dimensão [mm].

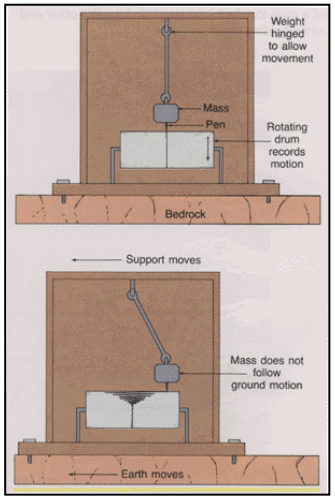
Descriptor	Richter magnitudes	Earthquake Effects	Frequency of Occurrence
Micro	Less than 2.0	Microearthquakes, not felt.	About 8,000 per day
Very minor	2.0-2.9	Generally not felt, but recorded.	About 1,000 per day
Minor	3.0-3.9	Often felt, but rarely causes damage.	49,000 per year (est.)
Light	4.0-4.9	Noticeable shaking of indoor items, rattling noises. Significant damage unlikely.	6,200 per year (est.)
Moderate	5.0-5.9	Can cause major damage to poorly constructed buildings over small regions. At most slight damage to well-designed buildings.	800 per year
Strong	6.0-6.9	Can be destructive in areas up to about 100 miles across in populated areas.	120 per year
Major	7.0-7.9	Can cause serious damage over larger areas.	18 per year
Great	8.0-8.9	Can cause serious damage in areas several hundred miles across.	1 per year
Rare Great	9.0 or greater	Devastating in areas several thousand miles across.	1 per 20 years

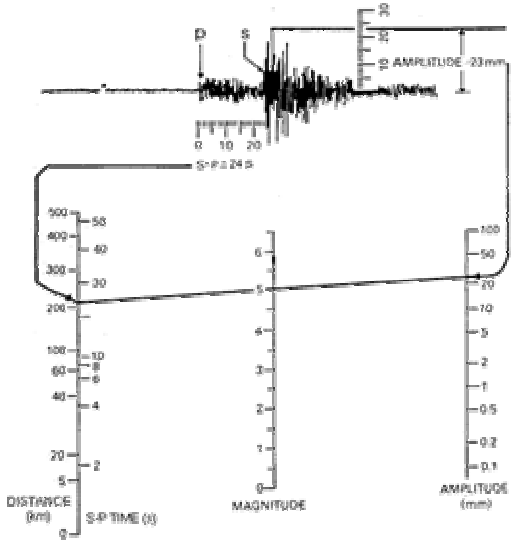


RSA - ACÇÕES SÍSMICAS

- Nomograma para detrminação da escala de Richter.







- A noção de Magnitude (M) está relacionada com a quantidade de energia que é libertada no foco. $\log E = 12.2 + 1.44\,M$

Escala M	Energia E [erg]	Efeito nas edificações	Referência
3	$2x10^{16}$	Sem efeito	
4	$6x10^{17}$	Sem efeito	
5	$2x10^{19}$	Afecta as edificações perto do epicentro	Bomba atómica
6	$6x10^{20}$	Afecta as edificações em grandes áreas	Benavente (1909)
7	$7x10^{22}$	Afecta as edificações em grandes áreas	Açores (1980)
8	$6x10^{23}$	Afecta as edificações em grandes áreas	
9	$2x10^{25}$	Afecta a superfície do solo	Lisboa (1755)

ACÇÕES SÍSMICAS - EFEITOS

- Efeitos relacionados com a escala de Richter

- Richter=3.5

- Richter=4.5

- Richter=5.4

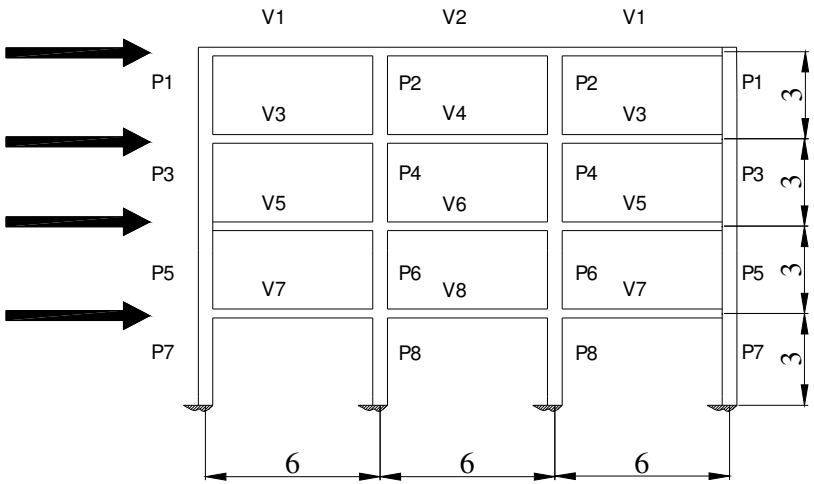
- Richter=6.5

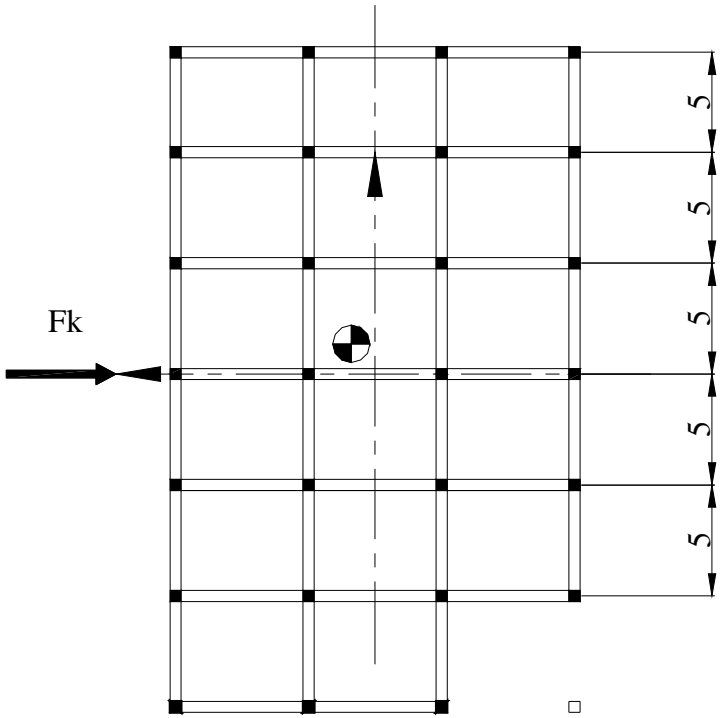
- Richter=7.3

- Richter=8.1

QUANTIFICAÇÃO DO EFEITO DA ACÇÃO SÍSMICA

- Determine o efeito da acção sísmica para a estrutura apresentada na figura, com quatro pisos, estrutura em betão armado, destinada a utilização de escritórios, a construir na zona de Lisboa (zona sísmica A), sendo o terreno da fundação em argilas miocénicas duras (tipo II). A estrutura modulada com ductilidade normal (η=2,5), de dimensões em planta 18x30 [m], altura 12 [m] e paredes interiores amovíveis.



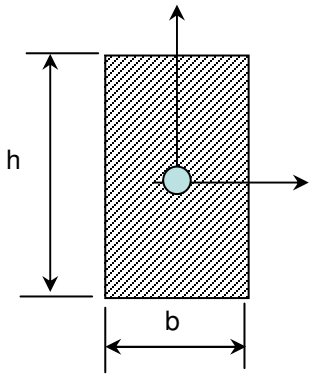


QUANTIFICAÇÃO DO EFEITO DA ACÇÃO SÍSMICA

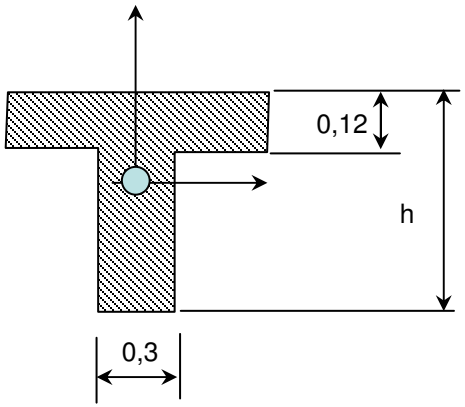
- Característica dos elementos estruturais

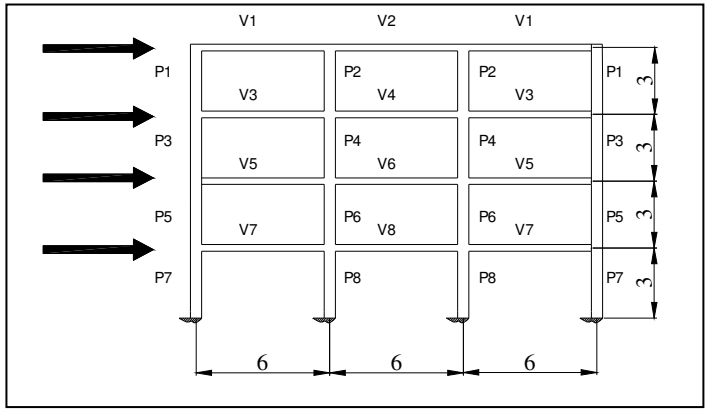
Vigas Ref.	h (cm)	pilares				
		Ref.	b(cm)	h(cm)	Ixx(dm4)	Iyy (dm4)
V1-V2	50	P1 P2 P3	30	40	16	9
V3-V4	50	P4 P5	30	40	16	9
V5-V6	55	P6 P7	40	45	30.37	24
V7-V8	55	P8	40	45	30.37	24

pilares



vigas

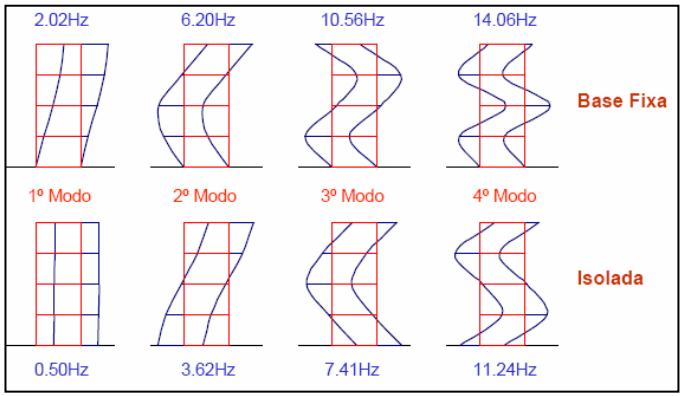




SOLUÇÃO 1/10 - método estático equivalente

- Em função do número de pisos (n=4), é possível determinar de uma forma aproximada o valor da frequência própria fundamental f.

$$f = \frac{12}{n} = \frac{12}{4} = 3\,[Hz]$$



- O coeficiente sísmico de referência:

$$\beta_0 = 0{,}2\sqrt{f} = 0{,}35$$

- O Coeficiente de sismicidade (Lisboa = zona A):

$$\alpha = 1.0$$

- O Coeficiente de comportamento de uma estrutura porticada (η):

$$\eta = 2{,}5$$

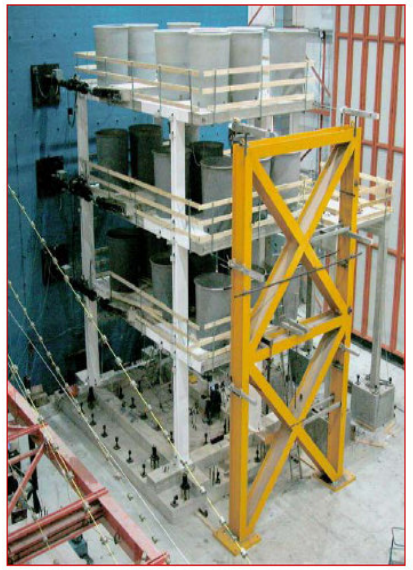
- O coeficiente sísmico:

$$\beta = \beta_0 \frac{\alpha}{\eta} = 0{,}14 \quad \alpha = 0{,}14$$

SOLUÇÃO 2/10 - método estático equivalente

- Valor característico da força global aplicada no piso i

$$F_{ki} = \beta \times h_i \times G_i \times \frac{\sum_{i=1}^{n} G_i}{\sum_{i=1}^{n} h_i \times G_i}$$



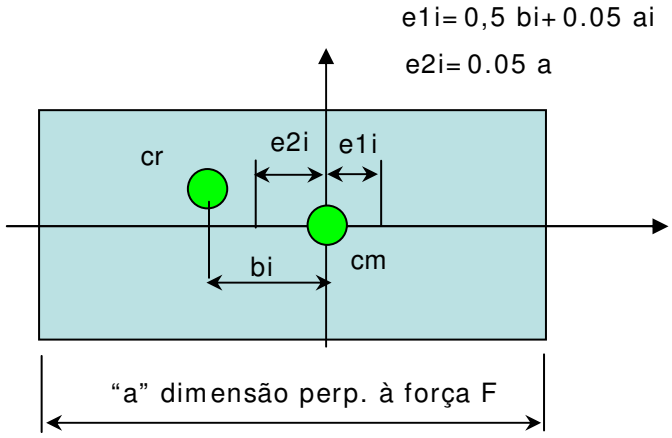
β - Coeficiente sísmico

h_i - altura do piso i

G_i - Soma dos valores das cargas permanentes e dos valores quase permanentes $\psi_2 F_k$ das acções variáveis correspondentes ao piso i

n - número de pisos acima do nível do terreno

- Estas forças devem ser consideradas nos pisos em análise, aplicadas com execentricidades e1i ou e2i, conforme situação mais desfavorável.

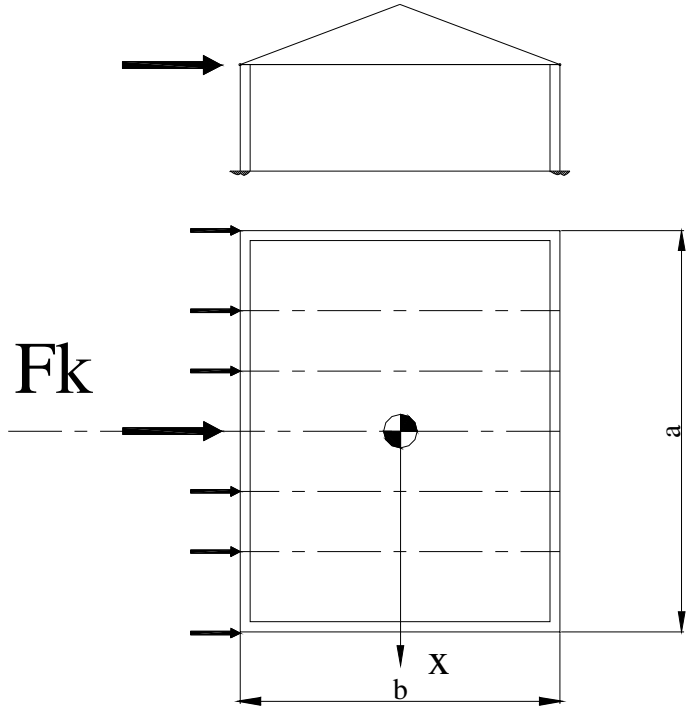


SOLUÇÃO 3/10 - método estático equivalente

- No caso de estrutura simétrica em relação ao plano que contém a direcção da acção sísmica, pode considerar-se que as resultantes das forças estáticas equivalentes actuam segundo esse plano, distribuindo o seu efeito pelos elementos localizados em paralelo, utilizando o seguinte factor.

$$F_{ki}^{\ pi} = \frac{F_{ki}}{np}\xi$$

$$\xi = 1 \times \frac{0.6 \times x}{a}$$



SOLUÇÃO 4/10 - método estático equivalente

- Determinação do centro de massa em cada piso, pela resultante das forças verticais aplicadas ao eixo de cada pilar, de grandeza proporcional às massas suportadas por cada um.

  O pé direito, por baixo das vigas no R/C e 1º andar=2,45 [m]
  O pé direito, no 2º e 3º andar= 2,60 [m]

- O centro de rigidez é determinado do mesmo modo que o anterior, considerando forças de grandeza proporcional ao momento de inércia de cada um dos pilares, para cada uma das direcções x e y.

MASSA DO EDIFÍCIO		Tipo: P- permanente V- variável
Elemento	Valor característico	
Laje	370 [kg/m2]	P
Parede da fachada	430 [kg/m2]	P
Enchimento cobertura	280 [kg/m2]	P
Viga V1...V4	310 [kg/m]	P
Viga V5...V8	350 [kg/m]	P
Pilar P1...P5	350 [kg/m]	P
Pilar P6...P8	560 [kg/m]	P
Sobrecarga terraço	200 [kg/m2]	V
Sobrecarga pavimento	300 [kg/m2]	V
Sobrecarga divisórias	130 [kg/m2]	V

SOLUÇÃO 5/10 - método estático equivalente

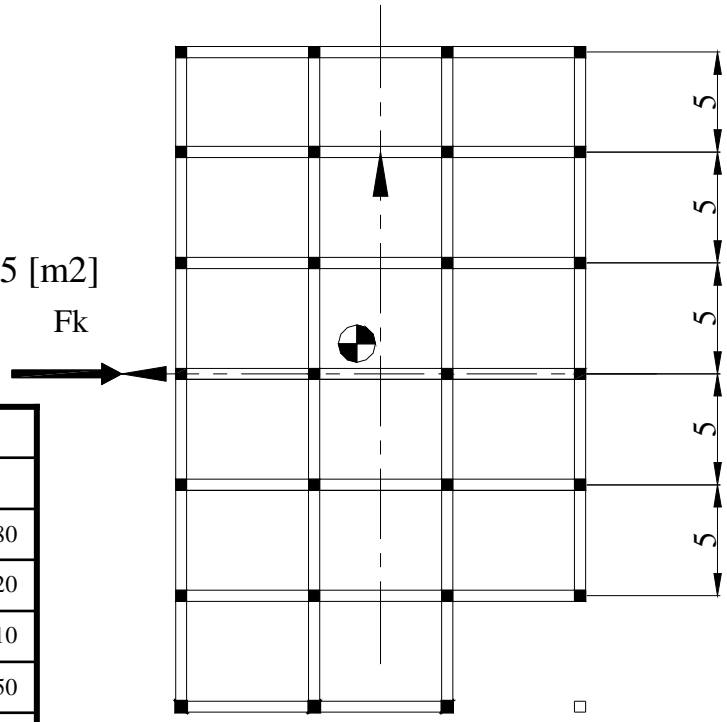
- A estrutura não é simétrica, mas pode ser considerada com tal, considerando uma massa negativa no pilar que falta.
- O cálculo tem de ser efectuado para cada piso, considerando as cargas permanentes e o valor 40% (sobre carga) das cargas variáveis

•área do piso considerado simétrico:

$$A = 30{,}3 \times 18{,}3 = 554\ [m^2]$$

•Comprimento total das vigas = 241 [m]
•Comprimento total dos pilares =4x7x2.5=70 [m]
•Área das paredes de fachada, por piso = 1,5x2x(30,3+18)=145 [m2]

•Massa permanente do último piso (cobertura):



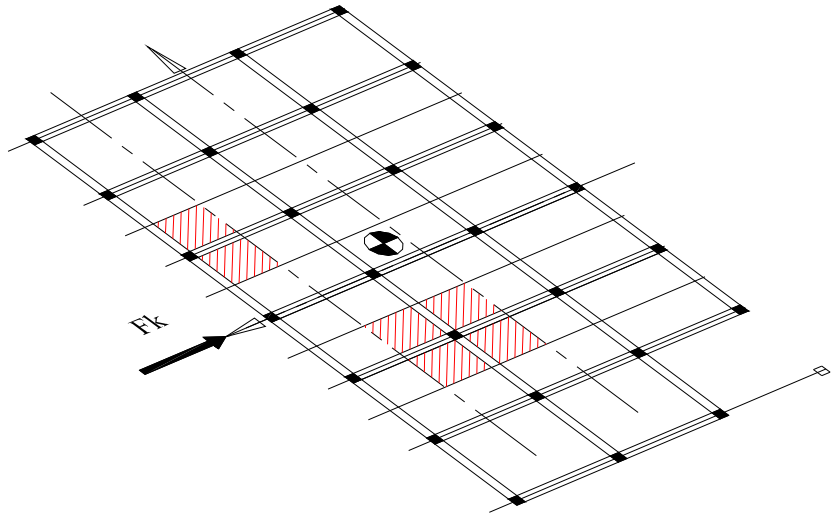
MASSA DO EDIFÍCIO		Massa [kg]
Elemento	Valor característico	
Laje	370 [kg/m2]	554x370=204 980
Enchimento cobertura	280 [kg/m2]	554x280=115 120
Viga V1...V2	310 [kg/m]	241x310= 74 710
Pilar P1...P2	350 [kg/m]	1/2x70 x 350 = 12 250
Sobrecarga terraço	200 [kg/m2]	40%(554x200)=44 320
total		491 380

SOLUÇÃO 6/10 - método estático equivalente

•Massa permanente do 3º piso:

MASSA DO EDIFÍCIO		Massa [kg]
Elemento	Valor característico	
Laje do pavimento	370 [kg/m2]	554x370=204 980
Viga V3...V4	310 [kg/m]	241x310= 74 710
Divisórias leves		554x130=72 020
Pilar P3...P4	350 [kg/m]	70 x 350 = 24 500
Paredes de fachada	430 [kg/m2]	145x430=62 3500
Sobre carga	300 [kg/m2]	40%(554x300)=66 480
total		505 040

- A determinação da massa para os pisos, 1 e 2, deverá ser feita de maneira semelhante.
- título de exemplo, determine-se a posição do centro de massa no terraço:
  - Considere-se uma área de influência para os pilares centrais (10), metade para os (14) pilares periféricos, mais um quarto para os extremos.



SOLUÇÃO 7/10 - método estático equivalente

•Pilares:

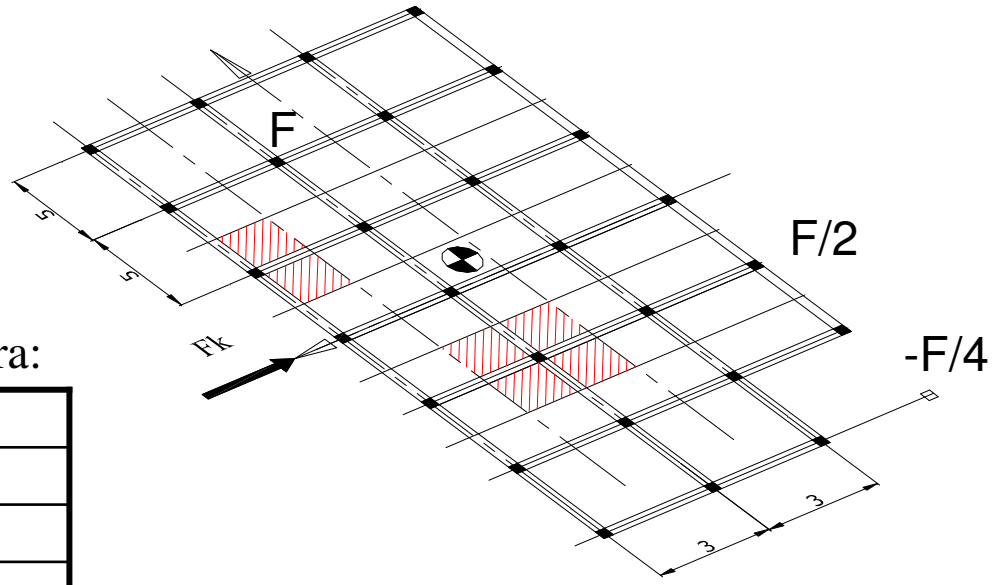
$$(10+7+1)F = 18\ F = m_t \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow F \approx 27300\ [kg]$$

MASSA DO EDIFÍCIO		Massa [kg]
Elemento	Valor característico	
Laje	370 [kg/m2]	554x370=204 980
Enchimento cobertura	280 [kg/m2]	554x280=115 120
Viga V1...V2	310 [kg/m]	241x310= 74 710
Pilar P1...P2	350 [kg/m]	1/2x70 x 350 = 12 250
Sobrecarga terraço	200 [kg/m2]	40%(554x200)=44 320
total		491 380

•centro de massa da cobertura:

$$\bar{x} = \frac{\sum \bar{x}_i m_i}{m_t} = 0{,}41$$

$$\bar{y} = \frac{\sum \bar{y}_i m_i}{m_t} = 0{,}24$$



•ordenadas do centro de massa na estrutura:

Piso	Σmi	xi	yi
1	491380	0,41	0,24
2	505040	0,41	0,24
3	529380	0,41	0,24
4	529380	0,41	0,24

SOLUÇÃO 8/10 - método estático equivalente

•Pilares:

- •Ixx= 16 [dm4]
- •Iyy=9 [dm4]

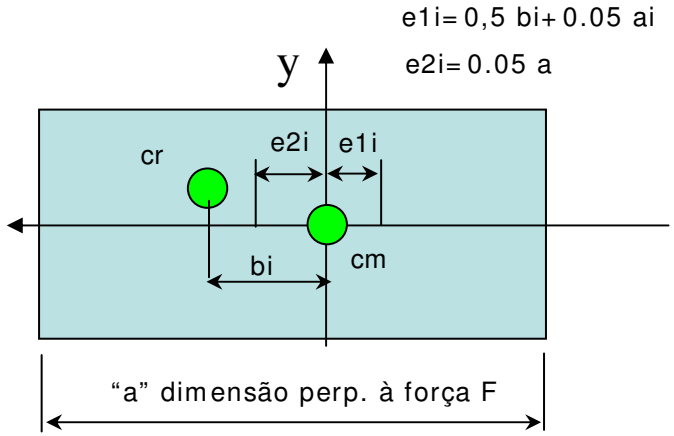
•centro de rigidez da cobertura: Este parâmetro é calculado do mesmo modo que o parâmetro anterior, considerando forças de grandeza proporcional ao momento de inércia de cada pilar, para cada uma das direcções.

$$x_{cr} = \frac{\sum \bar{x}_i I_{yyi}}{\sum I_{yyi}} = \frac{I_{yy} \times 15}{27\ I_{yy}} = 0.55 \qquad y_{cr} = \frac{\sum \bar{y}_i I_{xxi}}{\sum I_{xxi}} = \frac{I_{xx} \times 9}{27\ I_{xx}} = 0.33$$

•Para verificar a condição de aplicabilidade do método estático (artigo 30 do RSA), a distância entre o centro de rigidez e o centro de massa não deve exceder 15% da dimensão do edifício perpendicular à das forças consideradas.

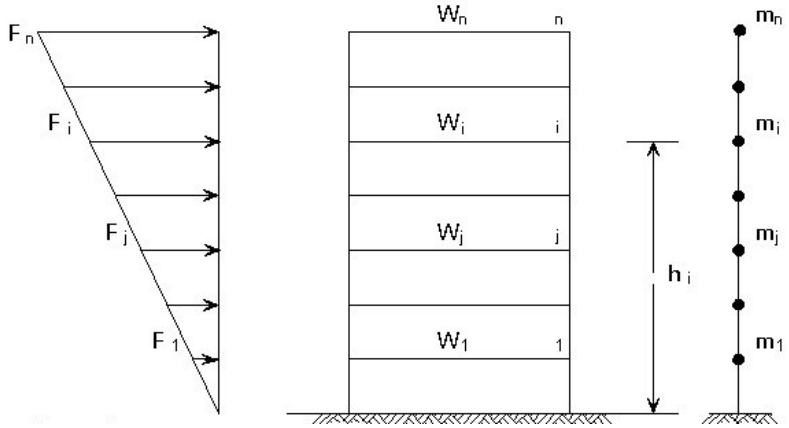
$$b_{ix} = 0{,}55 - 0{,}41 = 0{,}15 \quad < \quad 15\%(30) = 4{,}5[m]$$

$$b_{iy} = 0{,}33 - 0{,}24 = 0{,}09 \quad < \quad 15\%(18) = 2{,}7[m]$$



SOLUÇÃO 9/10 - método estático equivalente

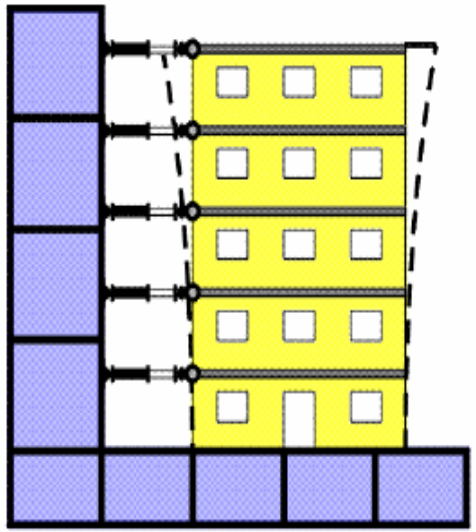
ID	Peso das massas [kN]	Momento das massas [kNm]
cobertura	**G4=4817**	**M4=4817x12**
3º	**G3=4951**	**M3=4951x9**
2º	**G2=5190**	**M2=5190x6**
1º	**G1=5190**	**M1=5190x3**
Total	**Σ Gi = 20148**	**Σ hiGi = 149073**



$$\frac{\sum G_i}{\sum h_i G_i} = \frac{20148}{149073} = 0{,}135$$

$$F_{ki} = \beta \times h_i \times G_i \times \frac{\sum_{i=1}^{n} G_i}{\sum_{i=1}^{n} h_i \times G_i}$$

ID	Força piso [kN]	
cobertura	**Fk4=0,14x12x4817x0,135**	**Fk4=1092**
3º	**Fk3=0,14x9x4951x0,135**	**Fk3=842**
2º	**Fk2=0,14x6x5190x0,135**	**Fk2=589**
1º	**Fk1=0,14x3x5190x0,135**	**Fk1=294**

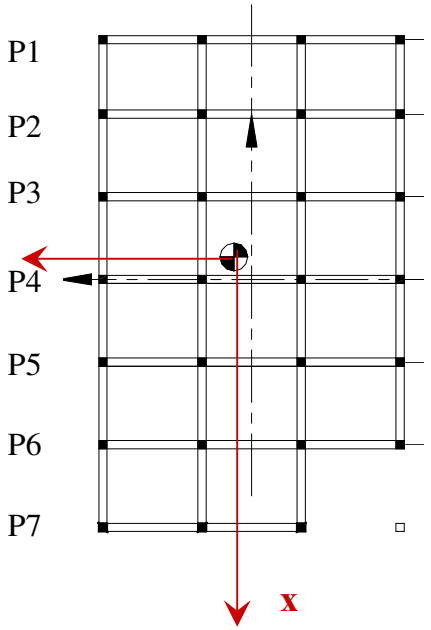


SOLUÇÃO 10/10 - método estático equivalente

•As resultantes determinadas para cada piso devem ser distribuídas pelos diferentes pórticos (np=7), em cada uma das duas direcções principais.

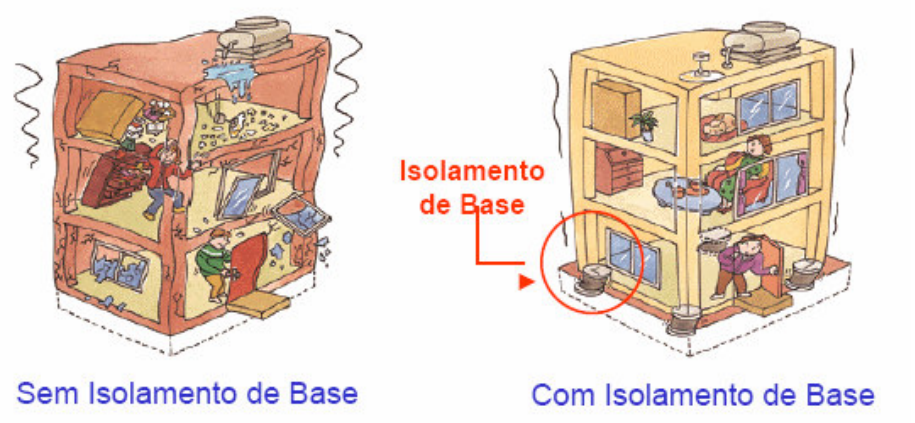
$$F_{ki}^{\ pi} = \frac{F_{ki}}{np}\xi \qquad \xi = 1 \times \frac{0.6 \times x}{a} \qquad \rightarrow \qquad F_{ki}^{\ pi} = \frac{F_{ki}}{7}(1 \pm 0{,}02x)$$

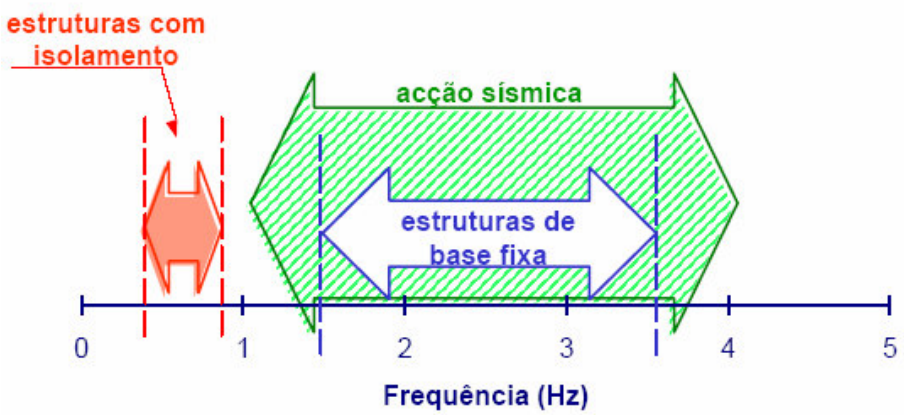
valores	Porticos transversais							Fki
	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	[kN]
x	-14,59	-9,59	-4,59	0,41	5,41	10,41	15,41	
ξ	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	
Fk4	109,2	124,8	140,4	156,0	171,6	187,2	202,3	1092
Fk3	84,2	96,2	108,3	120,3	132,3	144,3	156,4	842
Fk2	58,9	67,3	75,7	84,1	92,6	101,0	109,4	589
Fk1	29,4	33,6	37,8	42,0	46,2	50,4	54,6	294
Total								2817

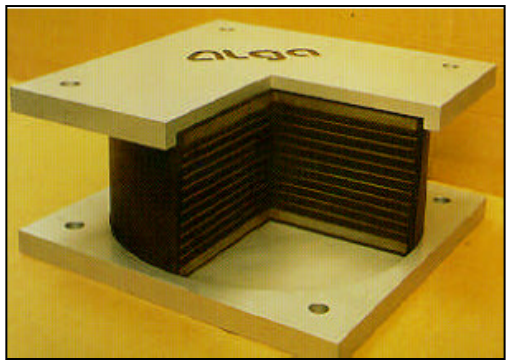


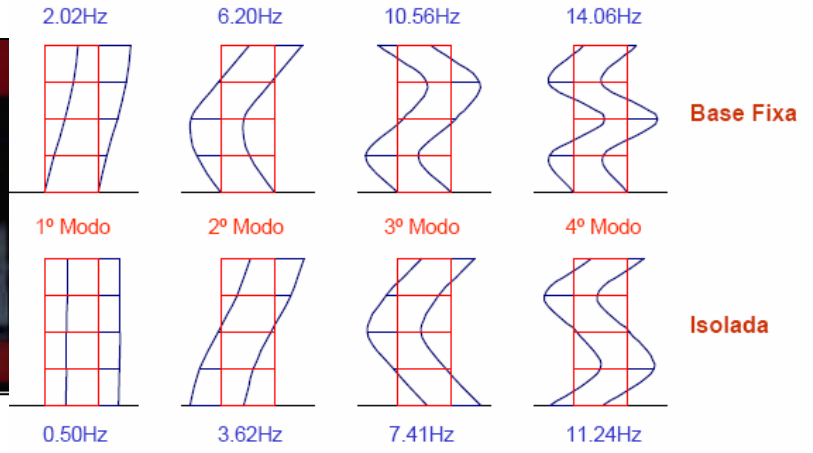
SISTEMAS PASSIVOS DE PROTECÇÃO SISMICA

A consequência imediata da interposição de uma camada deformável é a redução da frequência própria de vibração. Numa estrutura com isolamento de base os deslocamentos horizontais concentram-se ao nível da camada de isolamento. A restante estrutura quase não se deforma, comportando-se como um corpo rígido.



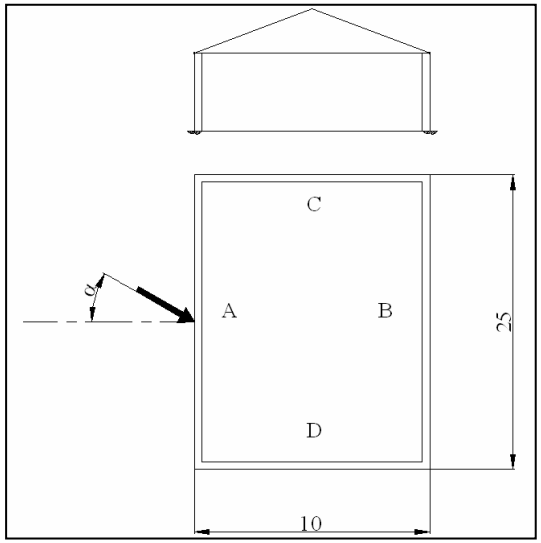






EXERCÍCIO DE APLICAÇÃO – QUANTIFICAÇÃO ACÇÃO DO VENTO

- Quantifique a acção do vento <u>sobre as fachadas</u> de uma construção na Figueira da Foz, sendo as 4 fachadas de permeabilidade semelhante. Altura de edificação igual a 10 [m].



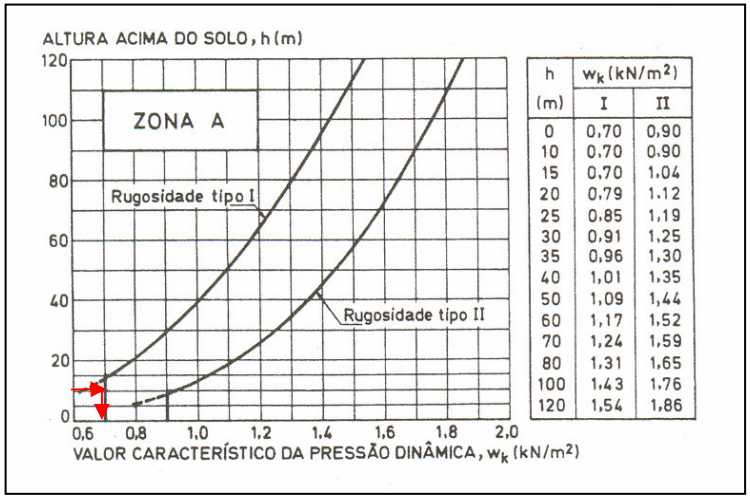
- Pressão estática equivalente:

$$p_{est} = w_k \times \delta_p = w_k \times \left(\delta_{pe} + \delta_{pi}\right)$$

- Pressão dinâmica:
  - Rugosidade tipo I, Zona B (zona costeira de 5 [km])

$$w_{k,B} = w_{k,A} = 1.2\left(0.5 \times \rho_{ar} \times v^2\right) = 1.2\left(0.613 \times v^2\right)$$

$$v = 18\left(\frac{h}{10}\right)^{0.28} + 14\,[m/s]$$



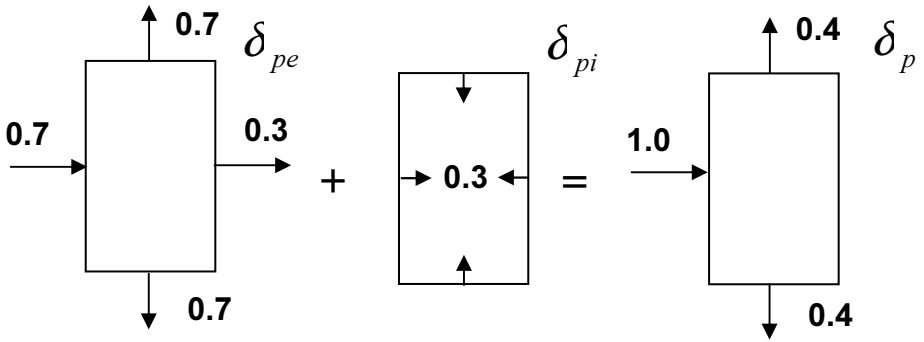
h (m)	w_k (kN/m²) I	II
0	0,70	0,90
10	0,70	0,90
15	0,70	1,04
20	0,79	1,12
25	0,85	1,19
30	0,91	1,25
35	0,96	1,30
40	1,01	1,35
50	1,09	1,44
60	1,17	1,52
70	1,24	1,59
80	1,31	1,65
100	1,43	1,76
120	1,54	1,86

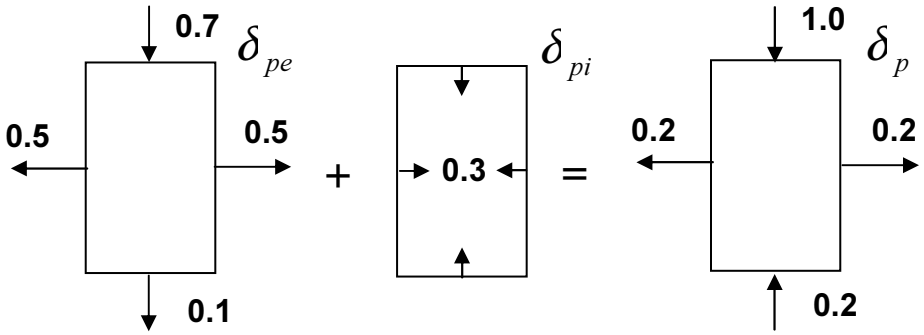
EXERCÍCIO DE APLICAÇÃO – QUANTIFICAÇÃO ACÇÃO DO VENTO

- Coeficiente de pressão interior:

$$\delta_{pi} = -0.3$$

- Coeficientes de pressão, fachadas:

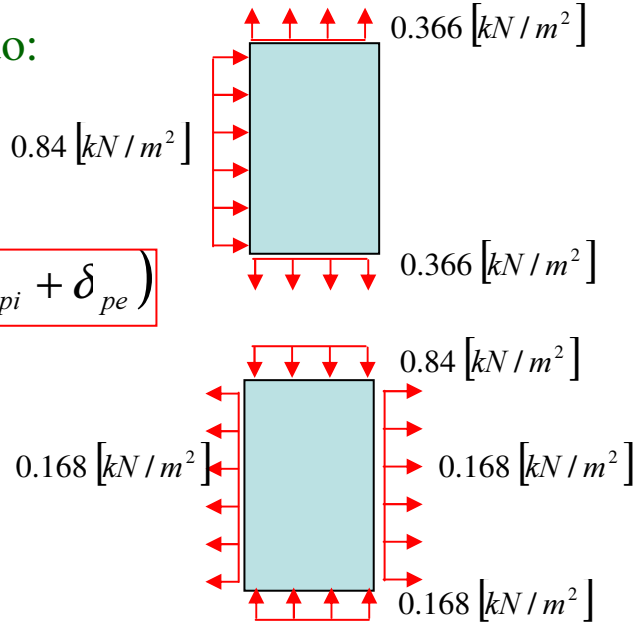




Relações geométricas do edifício (*)		planta	Direcção do vento	Acções globais sobre as superfícies				Acção locais na faixa referenciada na figura
h/b	a/b		α (graus)	A	B	C	D	0.25a
$\frac{1}{2} < \frac{h}{b} \leq \frac{3}{2}$	$1 < \frac{a}{b} \leq \frac{3}{2}$		0	+0,7	-0,25	-0,6	-0,6	-1,1
			90	-0,6	-0,6	+0,7	-0,25	
	$\frac{3}{2} < \frac{a}{b} \leq 4$		0	+0,7	-0,3	-0,7	-0,7	-1,1
			90	-0,5	-0,5	+0,7	-0,1	

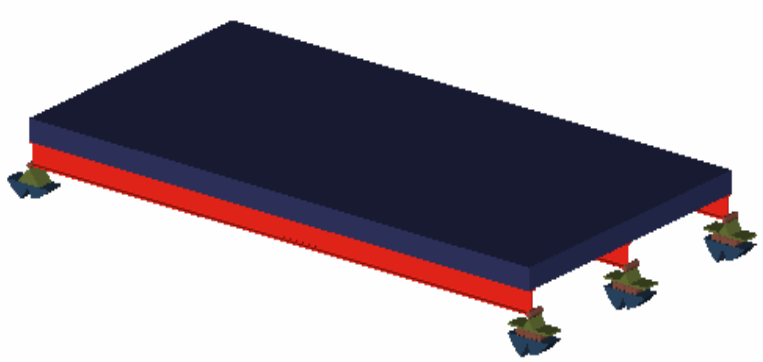
- Resultado:

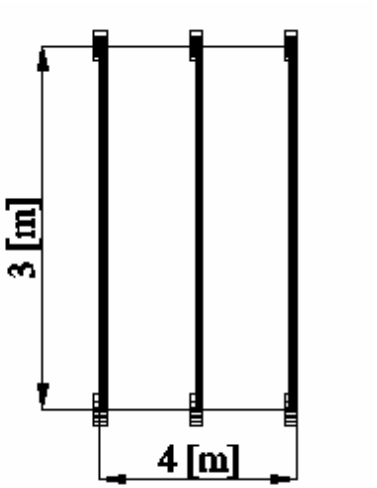
$$p = 0.84 \times (\delta_{pi} + \delta_{pe})$$



EXERCÍCIO DE APLICAÇÃO – QUANTIFICAÇÃO E VERIFICAÇÃO DE SEGURANÇA

- Verifique a segurança da viga de uma cobertura (madre), conforme regulamentos apresentados (RSA e REAE, sabendo que esta se situa num local a uma altitude de 300 [m]. Considere este elemento constituído por uma viga IPE300 em aço S235. A área de influência da cobertura é de 4x3 m2, suportada por 3 vigas simplesmente apoiada, dispostas a 3[m] de altura.

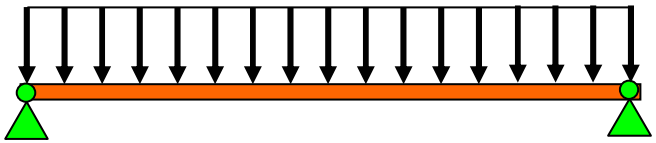




EXERCÍCIO DE APLICAÇÃO – QUANTIFICAÇÃO E VERIFICAÇÃO DE SEGURANÇA

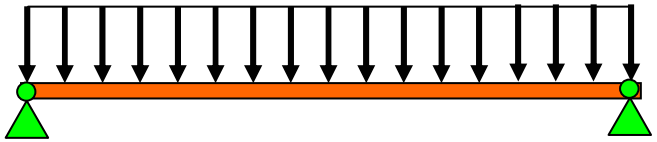
- Quantificação das acções:
  - Acção permanente (=G):
    - Densidade do material.

$$S_{Gk} = G = 42.2\ [kg/m] = 0.414\ [kN/m]$$



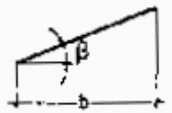
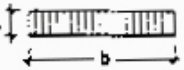
  - Acção variável (sobre carga=Q):
    - Coberturas ordinárias.

$$S_Q = Q = 0.3\ [kN/m^2] = 0.6\ [kN/m]$$



$$\boxed{\psi_0 = 0} \quad \boxed{\psi_1 = 0} \quad \boxed{\psi_2 = 0} \qquad \textbf{artigo 34.3}$$

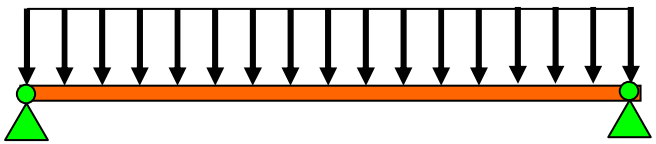
  - Acção variável (Neve = S):
    - Forma da cobertura: Uma vertente 0º.

Forma da cobertura	β (graus)	Distribuição da carga	Valores de μ
	$0 \le \beta \le 30$		$\mu = 0{,}8$
	$30 < \beta < 60$		$\mu = 0{,}8\ \frac{60-\beta}{30}$
	$\beta \ge 60$		$\mu = 0$

$$S_{0k} = \frac{1}{400}(h - 50) = 0.625 \quad [kN/m^2]$$

$$S_k = \mu\, S_{0k} = 0.8 \times 0.625 = 0.5\ [kN/m^2] = 1.0\ [kN/m]$$

$$S_Q = S = 0.5\ [kN/m^2] = 1.0\ [kN/m]$$



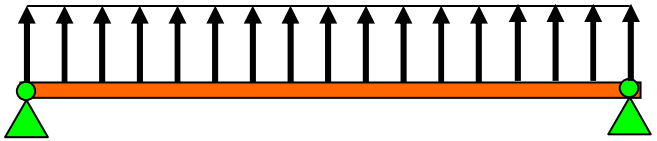
artigo 27.2

$$\boxed{\psi_0 = 0.6} \quad \boxed{\psi_1 = 0.3} \quad \boxed{\psi_2 = 0}$$

EXERCÍCIO DE APLICAÇÃO – QUANTIFICAÇÃO E VERIFICAÇÃO DE SEGURANÇA

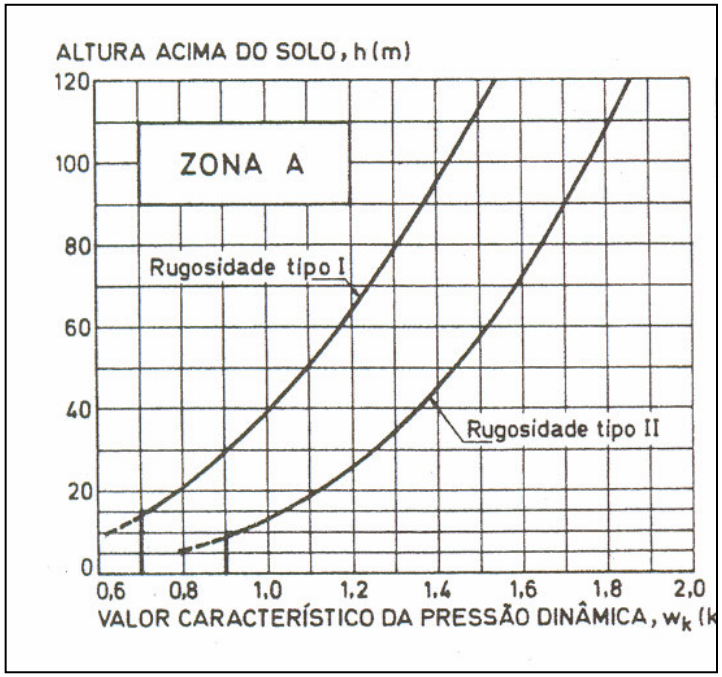
- Quantificação das acções:
  - Acção variável (=W):
    - Rugosidade tipo II, Zonamento A, h=3 [m].
    - Fachadas com permeabilidade semelhante. $\delta_{pi} = -0.3$

$$S_Q = W = 0.63\ [kN/m^2] = 1.26\ [kN/m]$$



$$w_k = 0.9\ [kN/m^2]$$

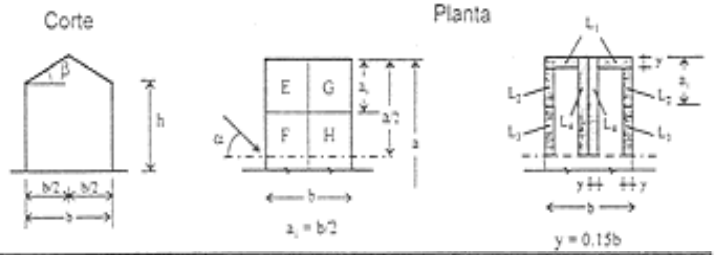
$$p_{est} = w_k \times \delta_p = w_k \times (\delta_{pe} + \delta_{pi}) = 0.9 \times (-1 + 0.3) = -0.63\ [kN/m^2] = -1.26\ [kN/m]$$



a > b

Corte

Planta



Relações geométricas do edifício h/b	Inclinação da vertente β (graus)	Acções globais – Direcção do vento α = 0° E, F	G, H	α = 90° E, G	F, H	Acções locais L_1	L_2	L_3	L_4
$\frac{1}{2} < \frac{h}{b} \leq \frac{3}{2}$	0	-0,8	-0,6	-1,0	-0,6	-2,0	-2,0	-2,0	-
	5	-0,9	-0,6	-0,8	-0,6	-2,0	-2,0	-1,5	-1,0
	10	-1,1	-0,6	-0,8	-0,6	-2,0	-2,0	-1,5	-1,2
	20	-0,7	-0,5	-0,8	-0,6	-1,5	-1,5	-1,5	-1,0
	30	-0,2	-0,5	-0,8	-0,8	-1,0			-1,0
	45	+0,2	-0,5	-0,8	-0,8				

$\psi_0 = 0.4$ $\psi_1 = 0.2$ $\psi_2 = 0$

artigo 24.3

EXERCÍCIO DE APLICAÇÃO – QUANTIFICAÇÃO E VERIFICAÇÃO DE SEGURANÇA

- Combinação das acções:
  - Acções verosímeis e que originem efeitos mais desfavoráveis;
  - Acções variáveis apenas com efeito desfavorável;
  - Coeficientes de segurança e de redução adequados;
  - ELU e ELS.
- ELU
  - Hipótese 1: Acção variável de base: Q

$$E_d = 1.5\,G + 1.5\,[Q + 0.6\,S + 0\,W] = 2.421\ [kN/m]$$

  - Hipótese 2: Acção variável de base: S

$$E_d = 1.5\,G + 1.5\,[S + 0\,Q + 0\,W] = 2.121\ [kN/m]$$

  - Hipótese 3: Acção variável de base: W

$$E_d = 1.0\,G + 1.5\,[W + 0\,Q + 0\,S] = -1.476\ [kN/m]$$

- ELS (combinação frequente)
  - Hipótese 1: Acção variável de base: Q

$$E_d = 1.0\,G + 1.0\,[\psi_1\,Q + \psi_2\,S + 0\,W] = 1.0\,G + 1.0\,[0\,Q + 0\,S + 0\,W] = 0.414\ [kN/m]$$

  - Hipótese 2: Acção variável de base: S

$$E_d = 1.0\,G + 1.0\,[\psi_1\,S + \psi_2\,Q + 0\,W] = 1.0\,G + 1.0\,[0.3\,S + 0\,Q + 0\,W] = 0.714\ [kN/m]$$

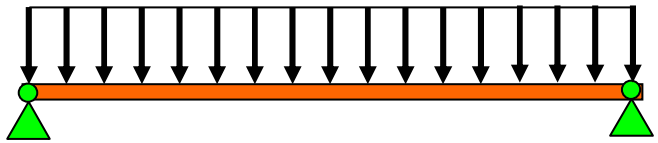
  - Hipótese 3: Acção variável de base: W

$$E_d = 1.0\,G + 1.0\,[\psi_1\,W + \psi_2\,S + \psi_2\,Q] = 1.0\,G + 1.0\,[0.2\,W + 0\,S + 0\,Q] = 0.162\ [kN/m]$$

EXERCÍCIO DE APLICAÇÃO – QUANTIFICAÇÃO E VERIFICAÇÃO DE SEGURANÇA

- ELU:
  - Flexão e transverso desprezado.

$$E_d = 2.421\,[kN/m]$$



$$M_{Ed}^{\max} = \frac{E_d \times L^2}{8} = 2.72\,[kN/m]$$

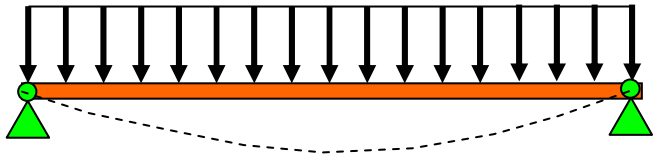
  - Assumindo perfil IPE300 (Wy=557 [cm^3], Iy=8356 [cm^4])

$$\sigma_{Sd} = \frac{M_{Ed}^{\max} \times y^{\max}}{I} = 4.9\,[MPa]$$

$$\sigma_{Rd} = 235\,[MPa]$$ **Verificação ok a 2% ELU !**

- ELS:
  - Teoria de vigas:

$$E_d = 0.714\,[kN/m]$$



$$\delta_{\max} = \frac{5(E_d)L^4}{384\,E\,I} = 0.041\,[mm]$$

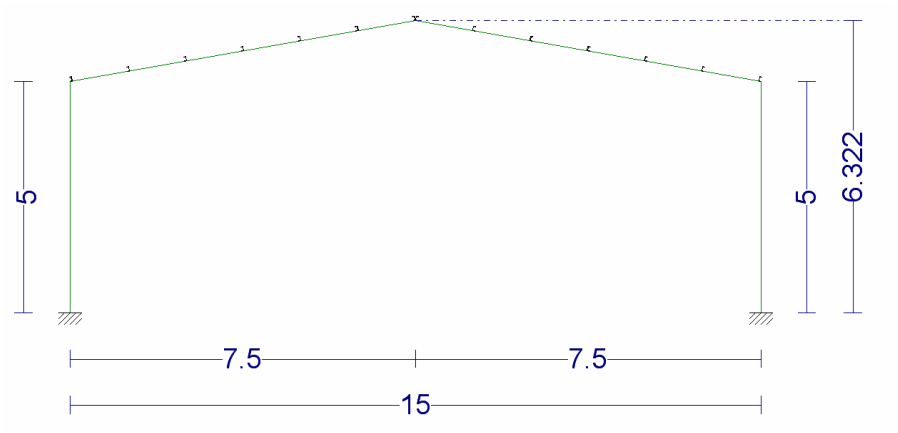
  - REAE: Artigo 45 => δmax=L/200=15 [mm]

Verificação ok a 0.27% do ELS !

- Observação: Perfil sobre dimensionado

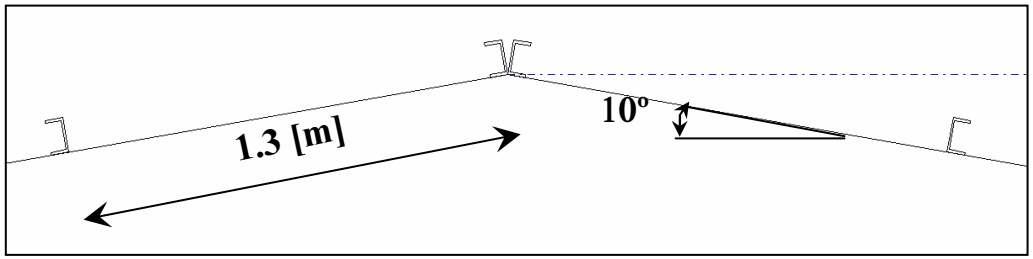
COMBINAÇÃO DAS ACÇÕES E VERIFICAÇÃO DA SEGURANÇA DE UMA MADRE

- Quantifique acções num pavilhão construído em Braga interior e zona urbana, com duas águas de inclinação de 10º. O comprimento total do pavilhão é de 20 [m], a largura é de 15 [m], sendo a distância entre pórticos de 5 [m] e a distância entre madres igual a 1,3[m]. Considere a cobertura como ordinária. Despreze a acção da neve.
- Considere um perfil inicial UPN100 em material S235 para a madre, num processo iterativo de projecto. Considere ainda uma cobertura tipo sandwish metálica (ex: painel 2000), com 50 [mm] de espessura e com as seguinte características: (ρ=0,11 [kN/m2] e λ=0.41 [W/mK]).

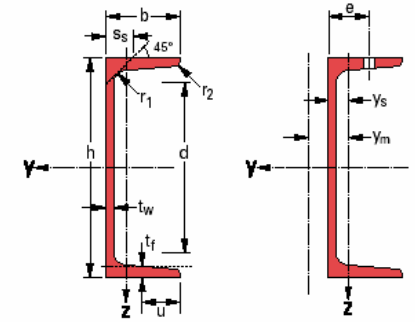


COMBINAÇÃO DAS ACÇÕES E VERIFICAÇÃO DA SEGURANÇA DE UMA MADRE

- Embora as madres não façam parte da estrutura resistente principal, o seu dimensionamento deverá ser cuidado.
- O espaçamento das madres podendo variar, foi fixado neste caso em 1,3 [m], de acordo com o pormenor que representa a cumeeira.



- Perfil escolhido: UPN 100

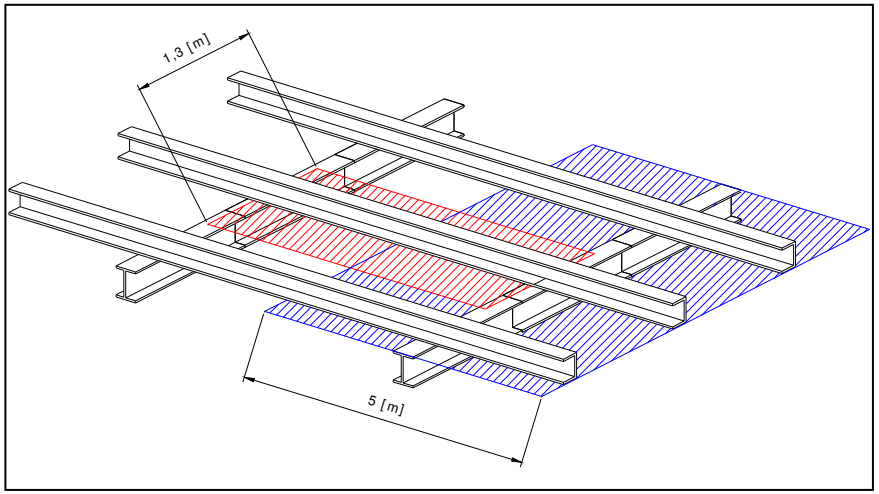


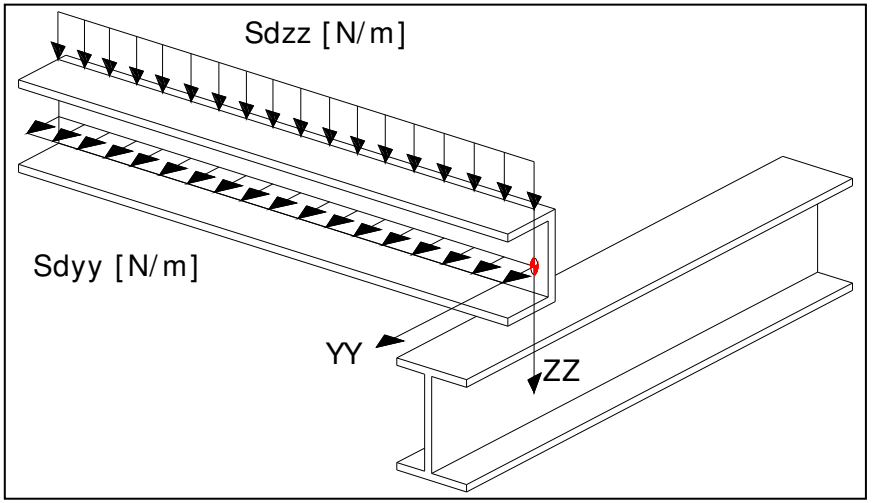
Désignation Designation Bezeichnung	Valeurs statiques / Section properties / Statische Kennwerte															Classification ENV 1993-1-1			
	axe fort y-y strong axis y-y starke Achse y-y					axe faible z-z weak axis z-z schwache Achse z-z										pure bending y-y		pure compression	
	G kg/m	I_y cm^4	$W_{el,y}$ cm^3	$W_{pl,y}$ cm^3	i_y cm	A_{vz} cm^2	I_z cm^4	$W_{el,z}$ cm^3	$W_{pl,z}$ cm^3	i_z cm	s_s mm	I_t cm^4	$I_w \times 10^{-3}$ cm^6	y_s cm	y_m cm	S 235	S 355	S 235	S 355
UPN 100	10.6	206	41.2	49	3.91	6.46	29.3	8.49	16.2	1.47	20.3	2.81	0.41	1.55	2.93	1	1	1	1
UPN 120	13.4	364	60.7	72.6	4.62	8.8	43.2	11.1	21.2	1.59	22.2	4.15	0.9	1.6	3.03	1	1	1	1
UPN 140	16.0	605	86.4	103	5.45	10.41	62.7	14.8	28.3	1.75	23.9	5.68	1.8	1.75	3.37	1	1	1	1
UPN 160	18.8	925	116	138	6.21	12.6	85.3	18.3	35.2	1.89	25.3	7.39	3.26	1.84	3.56	1	1	1	1
UPN 180	22.0	1350	150	179	6.95	15.09	114	22.4	42.9	2.02	26.7	9.55	5.57	1.92	3.75	1	1	1	1

COMBINAÇÃO DAS ACÇÕES E VERIFICAÇÃO DA SEGURANÇA DE UMA MADRE

- A quantificação das acções deve considerar:
  - Área de influência das acções nas madres e vigas do pórtico.
  - Acções permanentes (G): peso próprio do material utilizado na cobertura.
    - $G = G_1 + G_2 = 0{,}11\,[kN/m^2] \times 1{,}3\,[m] + (10{,}6 \times 9{,}81) = 247\,[N/m]$
    - Decomposição degundo as duas direcções principais da secção:
    - $G_{zz} = 247\,[N/m] \times \cos(10^\circ) = 243\,[N/m]$
      $G_{yy} = 247\,[N/m] \times \sin(10^\circ) = 42{,}9\,[N/m]$
  - Acções variáveis (Q) sobrecarga:
    - Converter o valor característico 0,3 [kN/m^2] em plano inclinado 0,295 [kN/m^2] em plano horizontal.
    - Decomposição degundo as duas direcções principais da secção:

      $Q_{zz} = 295 \times 1{,}3\,[N/m] \times \cos(10^\circ) = 378\,[N/m]$
      $Q_{yy} = 295 \times 1{,}3\,[N/m] \times \sin(10^\circ) = 66{,}9\,[N/m]$





COMBINAÇÃO DAS ACÇÕES E VERIFICAÇÃO DA SEGURANÇA DE UMA MADRE

- A quantificação das acções deve considerar:
  - Acções variáveis (W) vento:
    - Pressão dinâmica Wk=0,7 [kN/m2], coeficiente de pressão δp=1.4, acção segundo a primeira direcção principal de inércia, zz.

$$W_{zz} = 1{,}4 \times 0{,}7 \times 1{,}3 \left[N/m\right] = -1274 \left[N/m\right]$$

- Combinação das acções:
  - ELU:
    - Hipótese 1 - acção de base W:

$$S_{dyy} = 1{,}0\, G_{yy} = 0{,}247 \times \sin(10^{o}) = 0{,}04289 \left[kN/m\right]$$
$$S_{dzz} = 1{,}0\, G_{zz} + 1{,}5 \left[W_{zz} + 0 \times Q\right] = 1{,}0 \times 0{,}243 + 1{,}5 \times (-1{,}274) \left[kN/m\right] = -1{,}668 \left[kN/m\right]$$

    - Hipóeste 2 – acção de base Q:

$$S_{dyy} = 1{,}5\, S_{Gyy} + 1{,}5 \left[Q_{yy} + 0{,}4 \times (W = 0)\right] = 1{,}5 \times 0{,}04289 + 1{,}5 \left[0{,}0669\right] = 0{,}1647 \left[kN/m\right]$$
$$S_{dzz} = 1{,}5\, S_{Gzz} + 1{,}5 \left[Q_{zz} + 0{,}4 \times (W = 0)\right] = 1{,}5 \times 0{,}243 + 1{,}5 \left[0{,}378\right] = 0{,}9315 \left[kN/m\right]$$

  - ELS:
    - Hipótese 1 - acção de base W:

$$S_{dyy} = 1{,}0\, S_{Gyy} + 1{,}0 \left[\psi_1 \times 0 + (\psi_2 = 0) \times Q\right] = 0{,}247 \times \sin(10^{o}) = 0{,}04289 \left[kN/m\right]$$
$$S_{dzz} = 1{,}0\, S_{Gzz} + 1{,}0 \left[\psi_1 W_{zz} + (\psi_2 = 0) \times Q\right] = 1{,}0 \times 0{,}243 + 1{,}0 \times \left[0{,}2 \times (-1{,}274) + 0\right] \left[kN/m\right] = 0{,}243 \left[kN/m\right]$$

    - Hipótese 1 - acção de base Q:

$$S_{dyy} = 1{,}0\, S_{Gyy} + 1{,}0 \left[(\psi_1 = 0) \times Q_{yy} + (\psi_2 = 0) \times (W = 0)\right] = 1{,}0 \times 0{,}04289 = 0{,}04289 \left[kN/m\right]$$
$$S_{dzz} = 1{,}0\, S_{Gzz} + 1{,}0 \left[(\psi_1 = 0) \times Q_{zz} + (\psi_2 = 0) \times (W = 0)\right] = 1{,}0 \times 0{,}243 = 0{,}243 \left[kN/m\right]$$

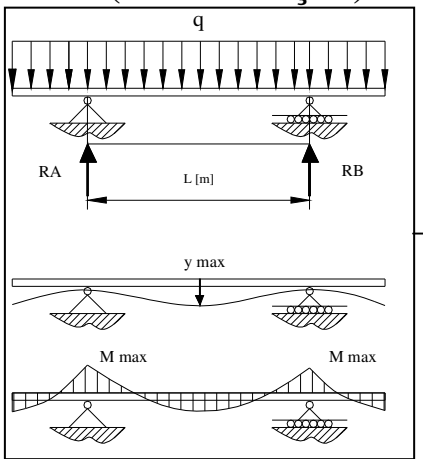
COMBINAÇÃO DAS ACÇÕES E VERIFICAÇÃO DA SEGURANÇA DE UMA MADRE

- Verificação de segurança:
  - ELU (estado limite último de resistência sem plastificação):

$$
\begin{aligned}
& S_d \le R_d \\
& \Leftrightarrow \sigma_{Sd} \le \sigma_{Rd} \\
& \Leftrightarrow \frac{M_{yy}}{W_{yy}} + \frac{M_{zz}}{W_{zz}} \le \sigma_{Rd} \\
& \Leftrightarrow \frac{\frac{q_{zz} L^2}{10}}{41.2\times10^{-6}} + \frac{\frac{q_{yy} L^2}{10}}{8.49\times10^{-6}} \le 235\times10^{6} \\
& \Leftrightarrow \frac{\frac{1668 L^2}{10}}{41.2\times10^{-6}} + \frac{\frac{42.89 L^2}{10}}{8.49\times10^{-6}} \le 235\times10^{6} \\
& \Leftrightarrow 113.8\times10^{6} \le 235\times10^{6}
\end{aligned}
$$

Verificação ok a 48% ELU !

  - ELS (curta duração):



$$y_{\max} = \frac{qL^4}{384EI}$$

$$\delta_{adm} \le L/200$$

$$\delta_{yy} = \frac{S_{yy} L^4}{384 E I_{zz}} = \frac{42{,}89\times(5)^4}{384\times2.06\times10^{11}\times29.3\times10^{-8}} = 0{,}001156[m]$$

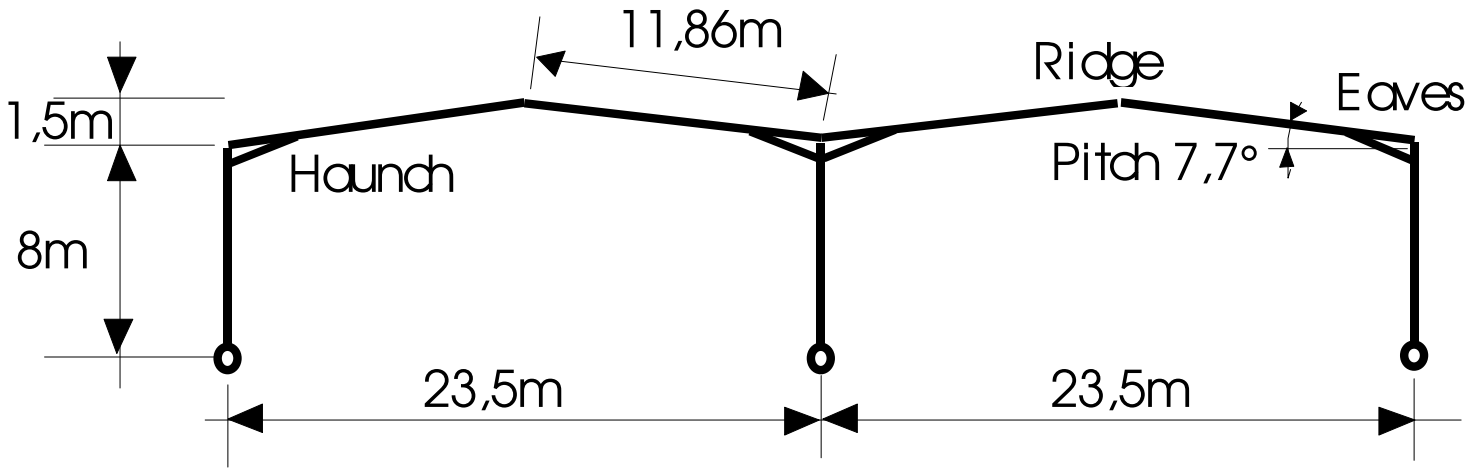
$$\delta_{zz} = \frac{S_{zz} L^4}{384 E I_{yy}} = \frac{243\times(5)^4}{384\times2.06\times10^{11}\times206\times10^{-8}} = 0{,}000932[m]$$

$$\delta_{adm} = \sqrt{0{,}001156^2 + 0{,}000932^2} = 0{,}00148 \le 0{,}025$$

Verificação ok a 6% ELS !

PROJECTO DE UM PÓRTICO PLANO –ELÁSTICO – EC3

- Projecto de uma estrutura porticada em aço S275, para fins industriais, com as dimensões de atravancamento igual a 48 x 60 x 10 [m]. Os pórticos estão espaçados com 6 [m]. Estão previstas colunas articuladas na base e rígidas no topo, com 8 [m] de comprimento. A cobertura possui uma inclinação de 7.7º.



  - Projecto de uma estrutura porticada no dominio linear elástico (análise de primeira ordem) para ambos os estados limites ELU e ELS.

PROJECTO DE UM PÓRTICO PLANO –ELÁSTICO – EC3

- Factores parciais de segurança:
  - $\gamma M0 = 1,1$ para a resistência das secções rectas;
  - $\gamma M1 = 1,1$ para a resistência à encurvadura dos elementos;

- Acções:
  - As acções são apresentadas para a construção típica, devendo ser tomadas como indicativas, porque dependem da localização da edificação. As maiores diferenças são devidas ao vento (W) e à neve (S), ver EC1. Para o vento está previsto um valor de 0,965 kN/m², para um altura de 10 [m]. Para a neve está prevista uma força distribuída na cobertura de 0,44 kN/m².
  - Acções permanentes (G) com origem na cobertura e isolamento (0,15 kN/m +0,2 kN/m^2). As paredes com isolamento impõem (0,2 kN/m^2).

- Combinação de acções:
  - As combinações das acções para verificação da segurança dentro de ELU:
    - 1,35 G + 1,5 W (2 combinações)
    - 1,35 G + 1,5 S (4 combinações)
    - 1,35 G + 1,35 W + 1,35 S (8 combinações)

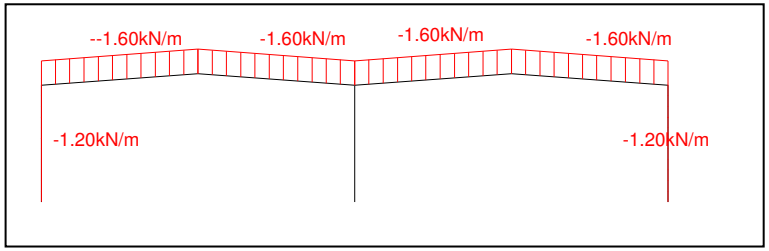
    $$\sigma_{Sd} \leq \sigma_{Rd}$$
  - As combinações das acções para verificação da segurança dentro do ELS:
    - 1,0 G + 1,0 S1 (elementos da cobertura)
    - 1,0 G + 1,0 S4 (elementos da cobertura)
    - 1,0 G + 1,0 W1 (elementos estruturais colunas)
    - 1,0 G + 1,0 W2 (elementos estruturais colunas)

    $$\delta_{max} \leq \frac{L}{200}$$

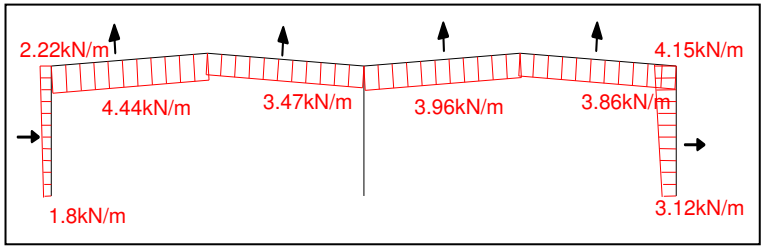
    $$\delta_{horiz} \leq \frac{h}{150}$$

PROJECTO DE UM PÓRTICO PLANO –ELÁSTICO – EC3

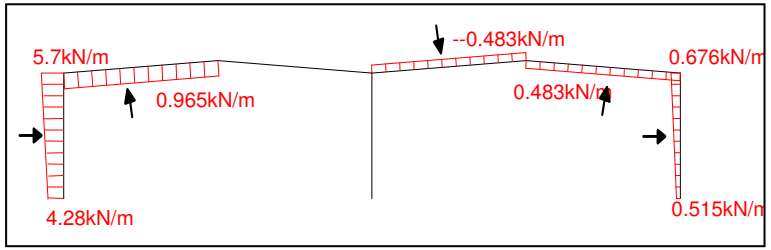
- Acções permanentes (G1) excluindo peso próprio dos perfis (G2). G=G1+G2



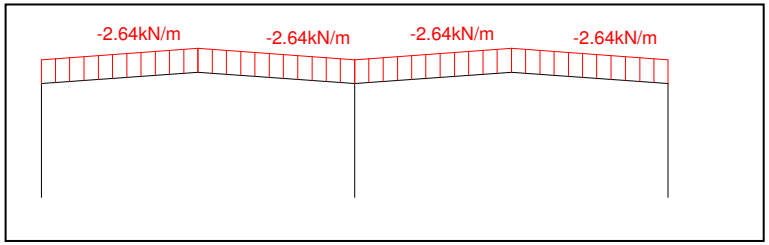
- Acções variáveis vento (W1).



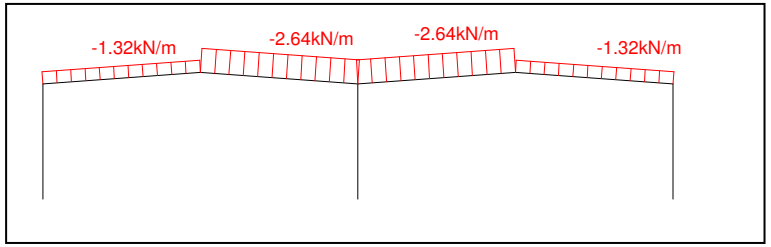
- Acções variáveis vento (W2) .



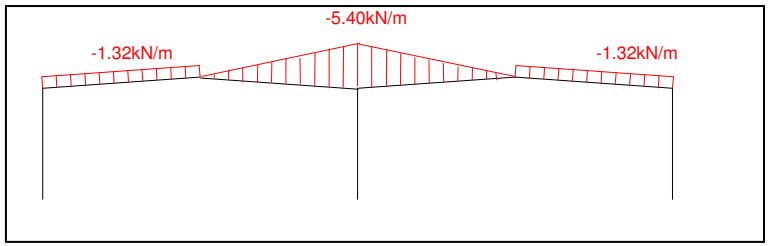
- Acções variáveis neve (S1) .



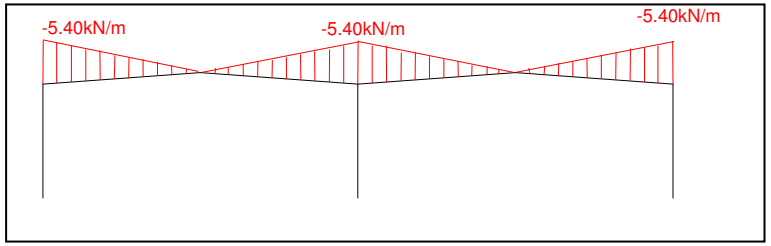
- Acções variáveis neve (S2) .



- Acções variáveis neve (S3) .



- Acções variáveis neve (S4) .



PROJECTO DE UM PÓRTICO PLANO –ELÁSTICO – EC3

- Imperfeições do pórtico:

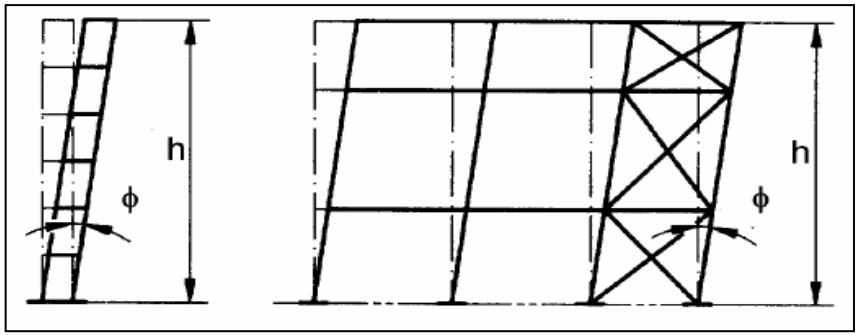
$$\phi = \phi_0 \alpha_h \alpha_m = 1/346$$

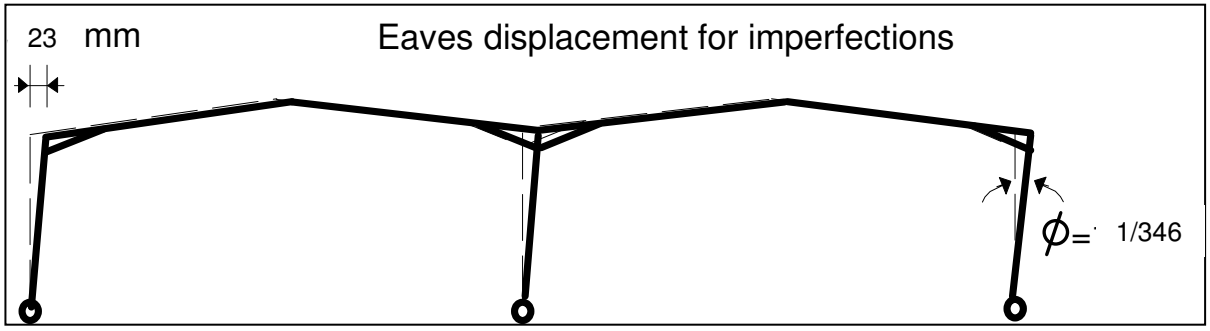
$$\phi_0 = \frac{1}{200}$$

$$\alpha_h = \frac{2}{\sqrt{h}} = 0.707 \quad mas \quad 1 \geq \alpha_h \geq 0.67$$

$$\alpha_m = \sqrt{0.5(1+\frac{1}{m})} = \sqrt{0.5\left(\frac{4}{3}\right)} = 0.816$$

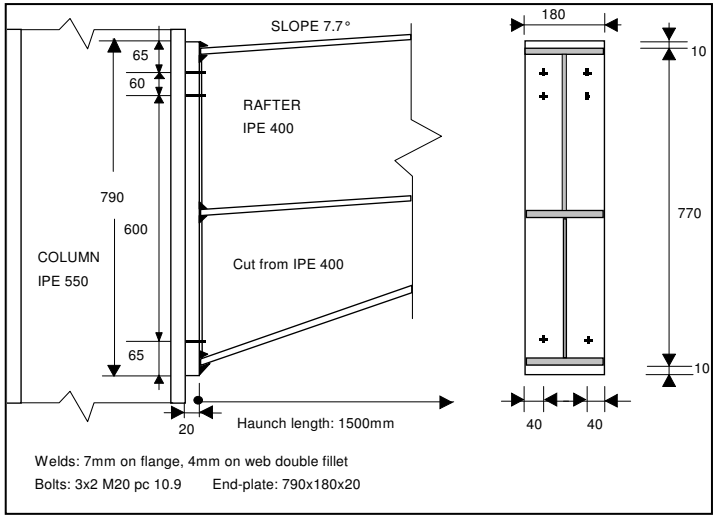
$$dh = \phi h = 23\,[mm]$$





PROJECTO DE UM PÓRTICO PLANO –ELÁSTICO – EC3

- Projecto preliminar:
  - Os elementos de coluna e viga serão do tipo conformados a quente (hot rolled).
  - A coluna do meio, embora não necessite da mesma secção recta, deverá ser projectada em função das restantes colounas (dimensões iguais).
  - Colunas : IPE550; vigas cobertura: IPE400.



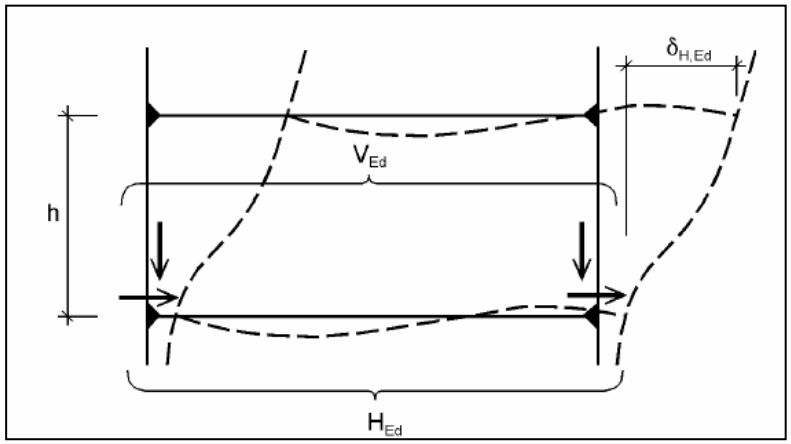
- Resultado de uma análise de 1ª ordem:
  - Efeito dos carregamentos mais críticos nos esforços internos, para ELU.

ELU	Esforço	"Eaves column (base)"	"Eaves Column (top)"	"Central column (base)"	"Central Column (top)"	"Haunch at eaves column"	"Beam at haunch"	"Beam at mid-span"	"Haunch at central column"
1,35G+1,5S1 (mais crítico)	**M (kNm)**	0,0	291,8	0,0	6,44	291,8	220,80	+121,7	326,45
	N (kN)	105,1	80,87	179,7	168,53	45,96	45,14	35,5	46,3
	V (kN)	36,53	36,42	0,83	0,78	75,87	68,85	6,63	78,79
1,35G+1,35S1 + 1,35W2	**M (kN/m)**	0,0	328,57	0,0	91,99	328,57	237,99	+111,9	344,58
	N (kN)	101,26	77,16	171,42	160,24	47,00	55,12	35,41	56,28
	V (kN)	44,49	37,95	11,53	11,47	71,99	65,50	11,75	75,42

PROJECTO DE UM PÓRTICO PLANO –ELÁSTICO – EC3

- Verificação do modo de colapso por instabilidade global:
  - Determinação de αcr.

$$\alpha_{cr} = \left(\frac{H_{Ed}}{V_{Ed}}\right)\left(\frac{h}{\delta_{H,Ed}}\right)$$
$$= \left(\frac{10000}{389900}\right)\left(\frac{8000}{15}\right)$$
$$= 13.7$$

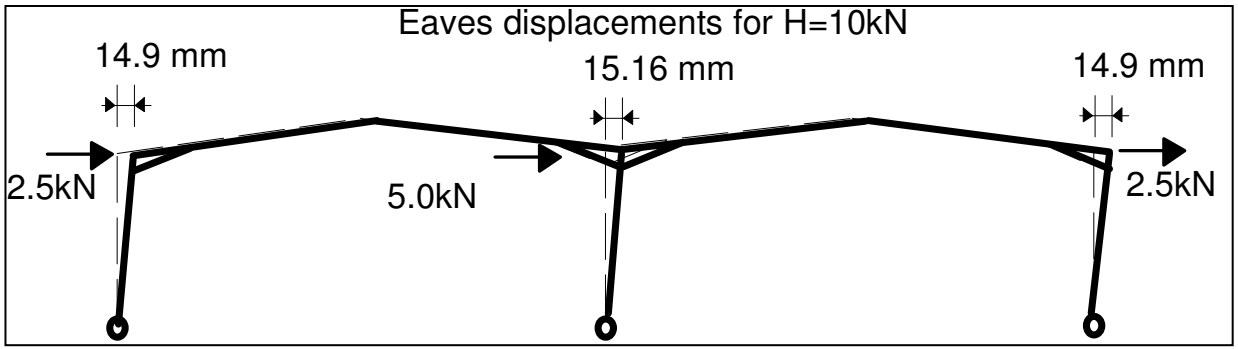


$$\alpha_{cr} = \frac{F_{cr}}{F_{Ed}} \geq 10 \quad \text{for elastic analysis}$$

$$\alpha_{cr} = \frac{F_{cr}}{F_{Ed}} \geq 15 \quad \text{for plastic analysis}$$

H_{Ed}	is the design value of the horizontal reaction at the bottom of the storey to the horizontal loads and fictitious horizontal loads, see 5.3.2(7)
V_{Ed}	is the total design vertical load on the structure on the bottom of the storey
$\delta_{H,Ed}$	is the horizontal displacement at the top of the storey, relative to the bottom of the storey, when the frame is loaded with horizontal loads (e.g. wind) and fictitious horizontal loads which are applied at each floor level
h	is the storey height

OBS: O modo de instabilidade global não se verifica.



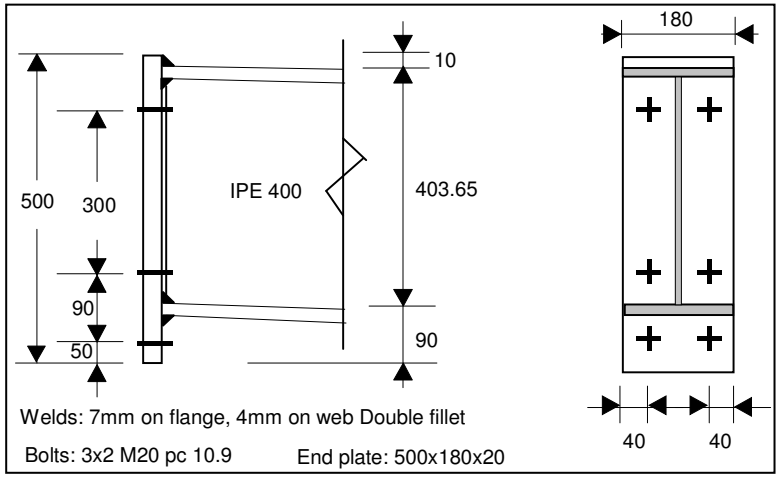
PROJECTO DE UM PÓRTICO PLANO –ELÁSTICO – EC3

- Verificação da segurança para cada elemento, de acordo com ELU: OK
  - Verificação das secções.
  - Verificação da estabilidade das colunas.

- Verificação da segurança para a estrutura, de acordo com ELS: OK
  - Verificação do deslocamento horizontal e vertical, para situação mais crítica.

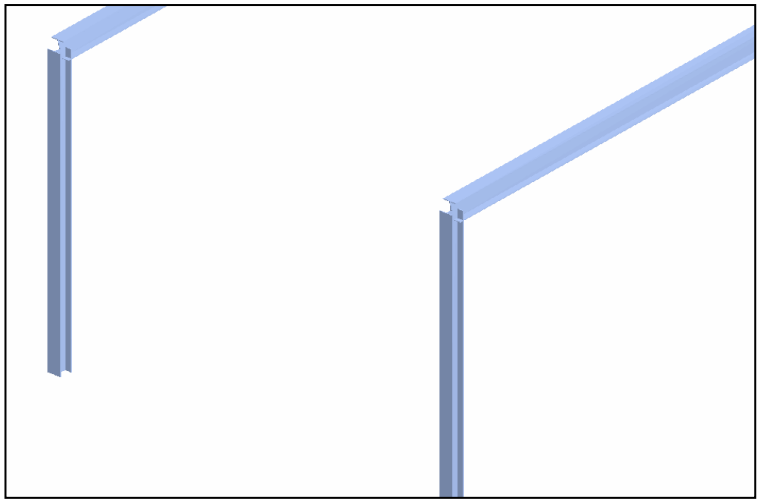
$$\delta_{\max} = 61.25\ [mm] \leq \frac{L}{200} = \frac{23500}{200} = 117{,}5\ [\text{mm}]$$

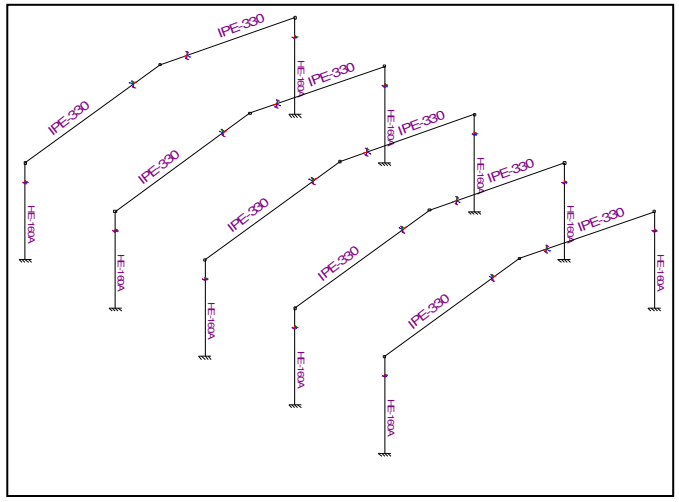
$$\delta_{horiz} = 42.35\ [mm] \leq \frac{h}{150} = \frac{8000}{150} = 53{,}3\ [\text{mm}]$$



VER. DA SEG. DE UM PÓRTICO POR ELEM. FINITOS

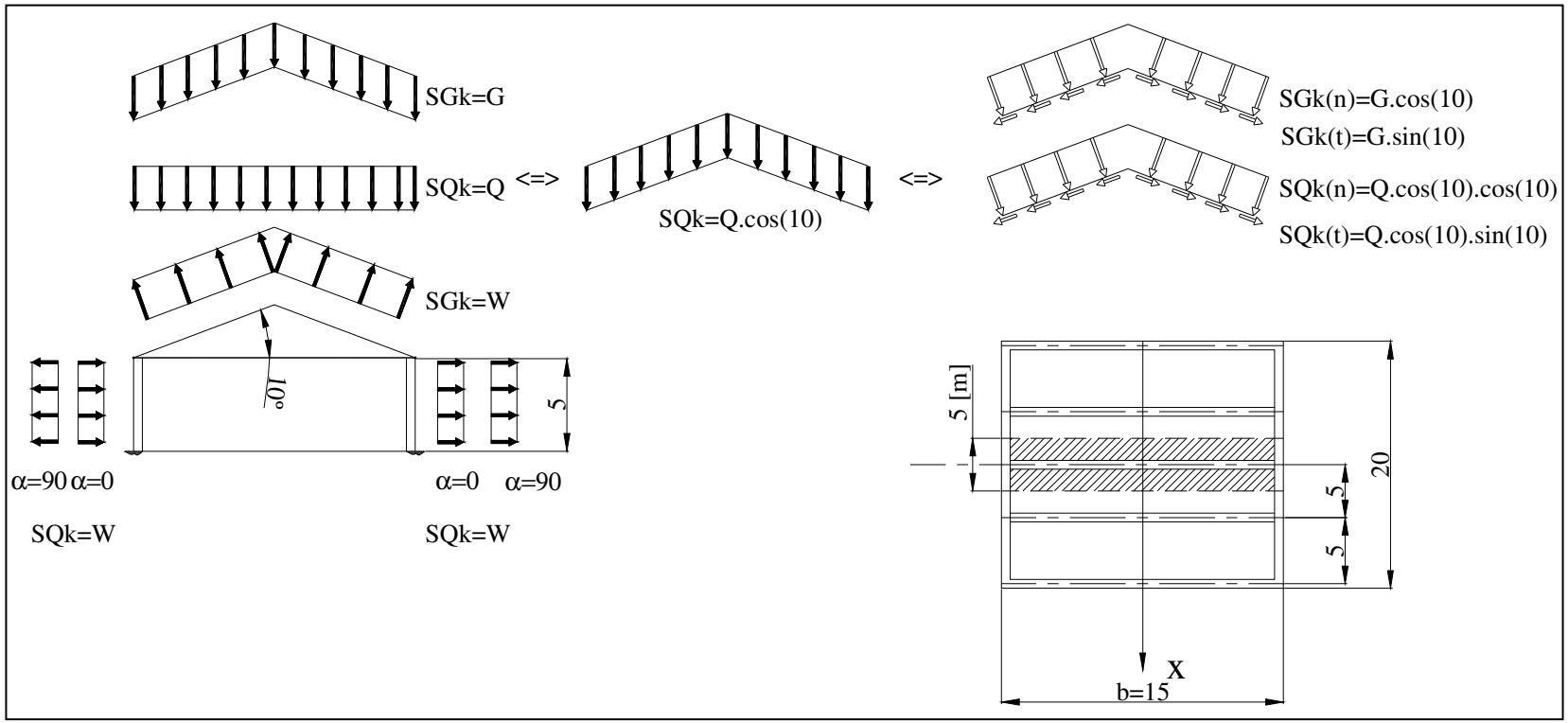
- Quantifique as acções num pórtico construído em Braga interior e zona urbana, com duas águas de inclinação de 10º.
- O comprimento total do pavilhão é de 20 [m], sendo a distância entre pórticos de 5 [m] e a distância entre madres igual a 1,3[m].
- Considere ainda que a direcção do vento actua na direcção normal às fachadas permeáveis e que a cobertura se caracteriza sem acesso do tipo sandwish metálica (ex: painel 2000), com 50 [mm] de espessura e com masa específica ρ=0,11 [kN/m2].
- Despreze a acção da neve.
- Deverá verificar a segurança do pórtico central, considerando um perfil IPE330 para as vigas da cobertura e um perfil HEA 160 para os pilares, ambos em material S235.





VERIFICAÇÃO DA SEGURANÇA DE UM PÓRTICO

- Pelo facto de nem todas as acções se encontrarem definidas no mesmo plano de acção, será necessário recorrer à respectiva projecção.

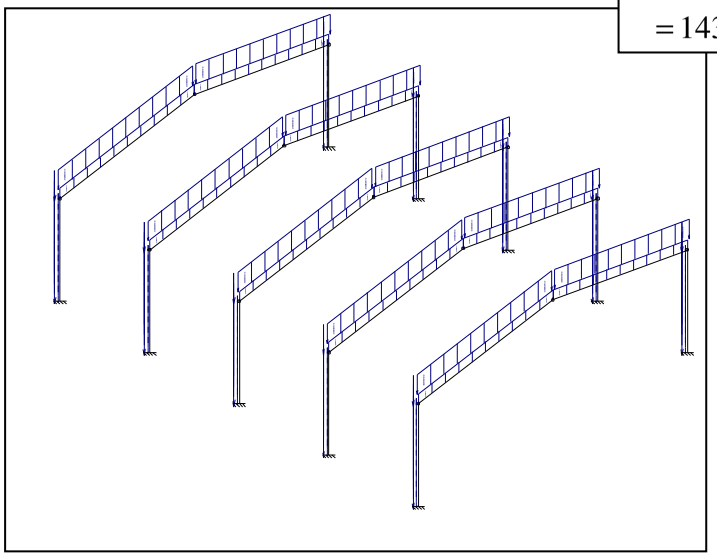


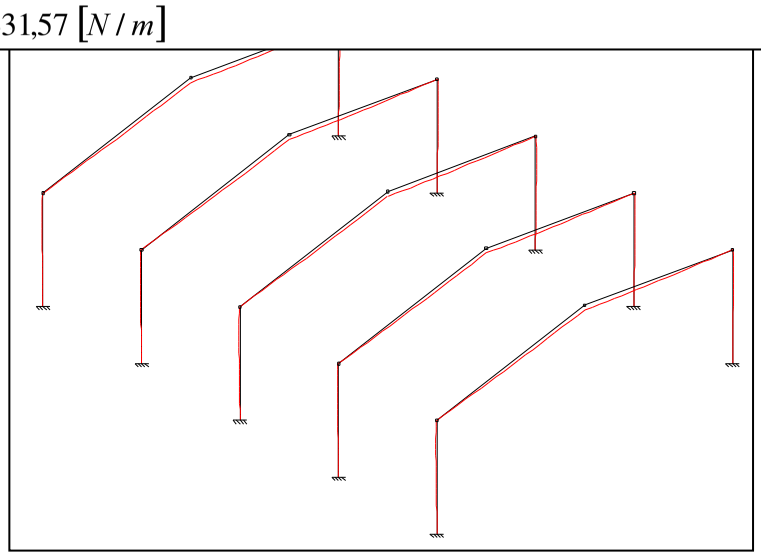
VERIFICAÇÃO DA SEGURANÇA DE UM PÓRTICO

- Efeito das acções permanentes = G
  - Esforços internos e deslocamentos.

$$G = G_1 + G_2 + G_3 = 0{,}11\,[kN/m^2] \times 5\,[m] + [(10{,}6 \times 9{,}81) \times 5[m]]/(1{,}3\,[m]) + 481{,}67[N/m]$$
$$= 550\,[N/m] + 399{,}94\,[N/m] + 481{,}67[N/m]$$
$$= 949{,}9 + 481{,}67$$
$$= 1431{,}57\,[N/m]$$

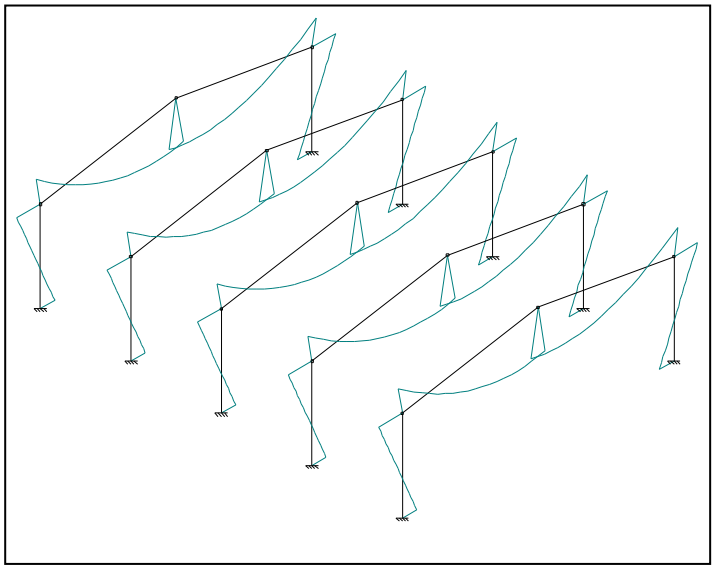
Acções

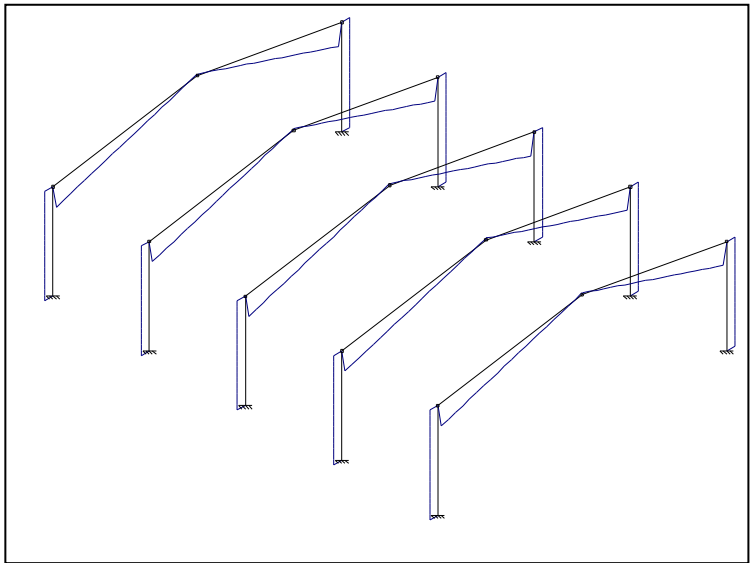




Deslocamentos

Momento flector





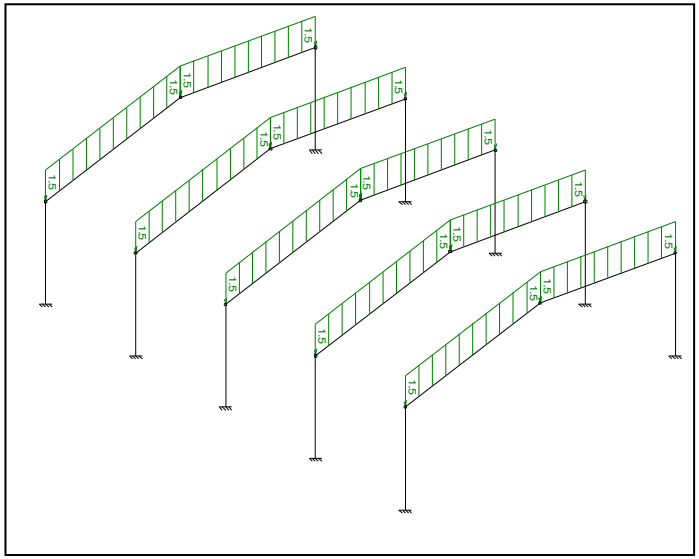
Transverso

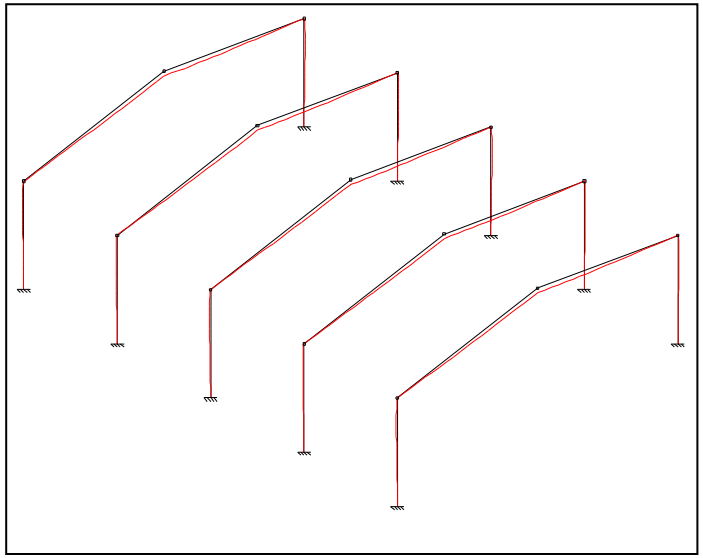
VERIFICAÇÃO DA SEGURANÇA DE UM PÓRTICO

- Efeito das acções variáveis: Acções específicas = Q
  - Esforços internos e deslocamentos.

$$S_{Qk} = 0.3\,\lfloor kN/m^2{}_{ph} \rfloor = 0.295\,\lfloor kN/m^2 \rfloor \times 5[m] \cong 1.5\,[kN/m]$$

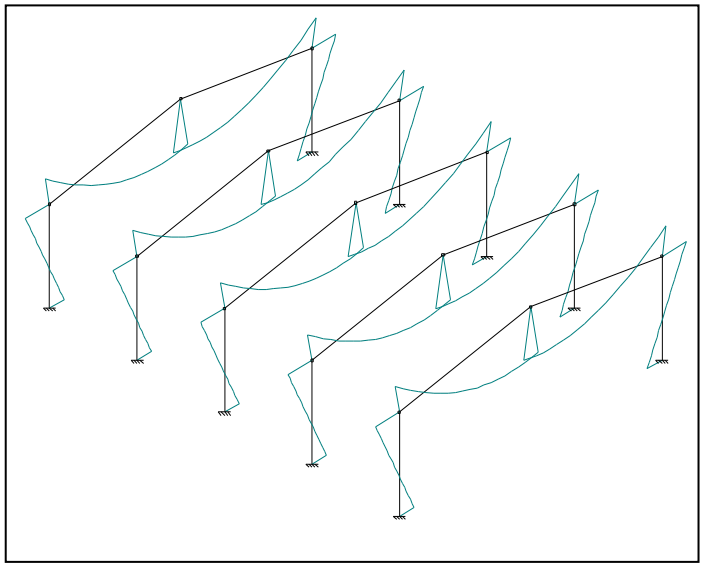
Acções

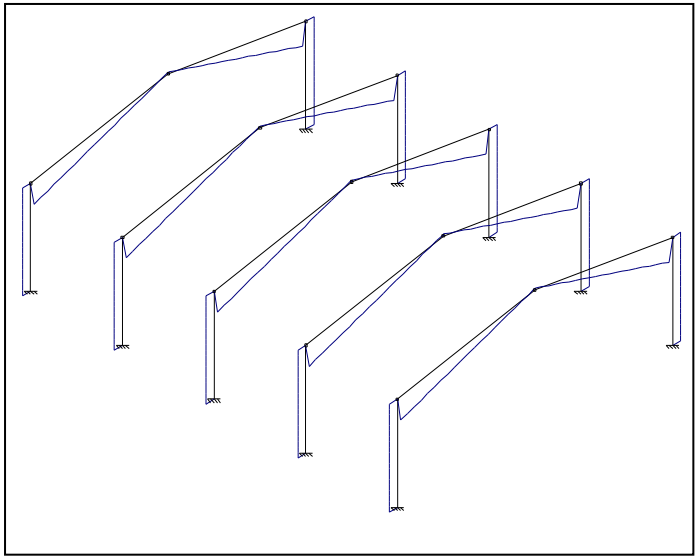




Deslocamentos

Momento flector





Transverso

VERIFICAÇÃO DA SEGURANÇA DE UM PÓRTICO

$$p = W \times \delta_p = W \times (\delta_{pe} + \delta_{pi})$$

$$W = 0.7\ [kN/m^2]$$

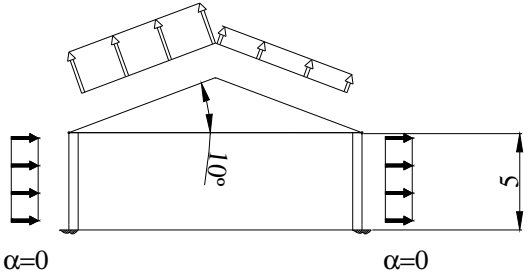
$$W_L = 0.7 \times 5 = 3.5\ [kN/m]$$

$$\delta_{pi} = +0.2$$

$$\delta_{pe} = ?$$

- Efeito das acções variáveis: Acção do vento = W.
  - Determinação do efeito para α=0º e α=90º.

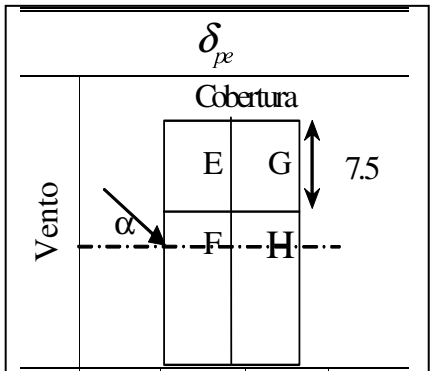
W=1.4x3.5=4.9[kN/m] SW=W=0.6x3.5=2.1[kN/m]



W=0.5x3.5=1.75[kN/m] W=0.4x3.5=1.4[kN/m]

δ_{pe}

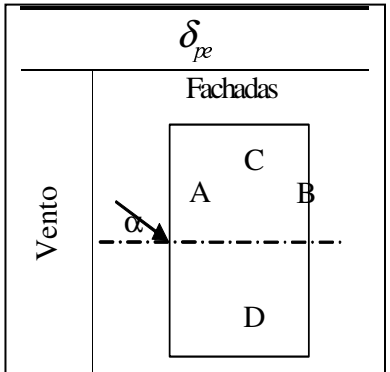
Cobertura



α	EF	GH	EG	FH
0	-1.2	-0.4	-	-
90	-	-	-0.8	-0.6

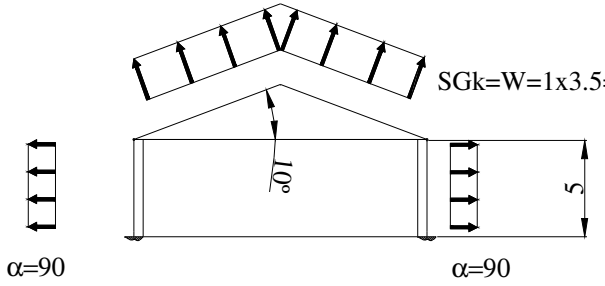
δ_{pe}

Fachadas



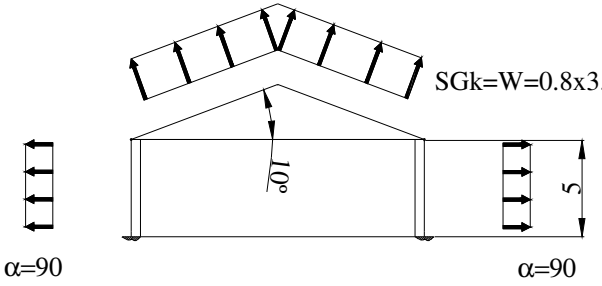
α	A	B	C	D
0	+0.7	-0.2	-0.5	-0.5
90	-0.5	-0.5	+0.7	-0.2

SGk=W=1x3.5=3.5[kN/m]



SQk=W=0.7x3.5=2.45[kN/m] SQk=W=0.7x3.5=2.45[kN/m]

SGk=W=0.8x3.5=2.8[kN/m]

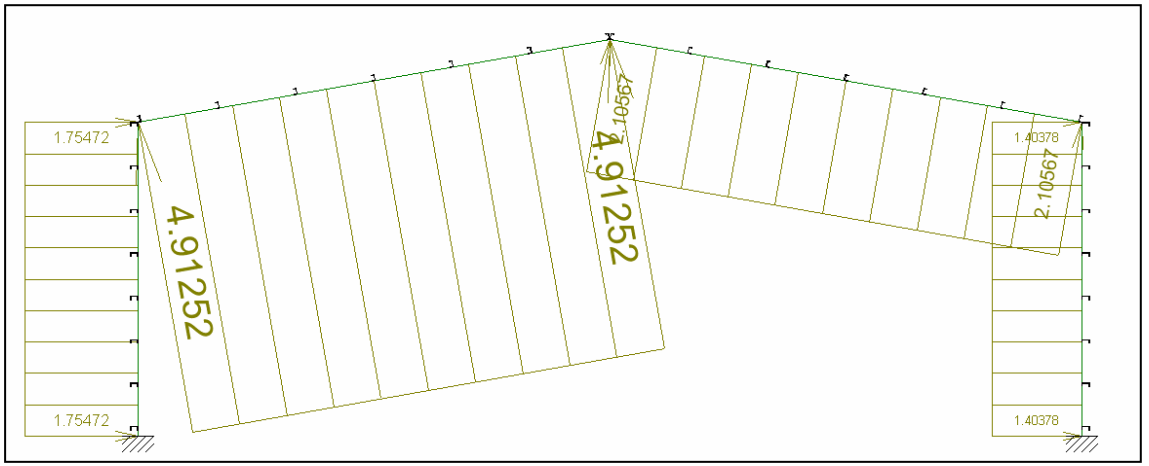


SQk=W=0.7x3.5=2.45[kN/m] SQk=W=0.7x3.5=2.45[kN/m]

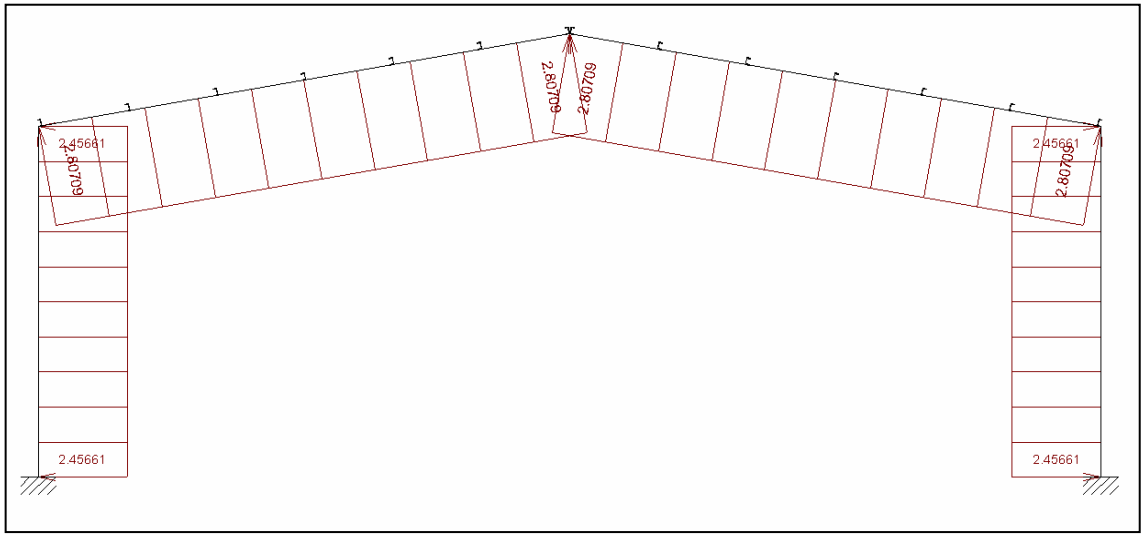
VERIFICAÇÃO DA SEGURANÇA DE UM PÓRTICO

- Efeito das acções variáveis: Acção do vento = W
  - Determinação da direcção crítica (α=0º)

Vento 0º

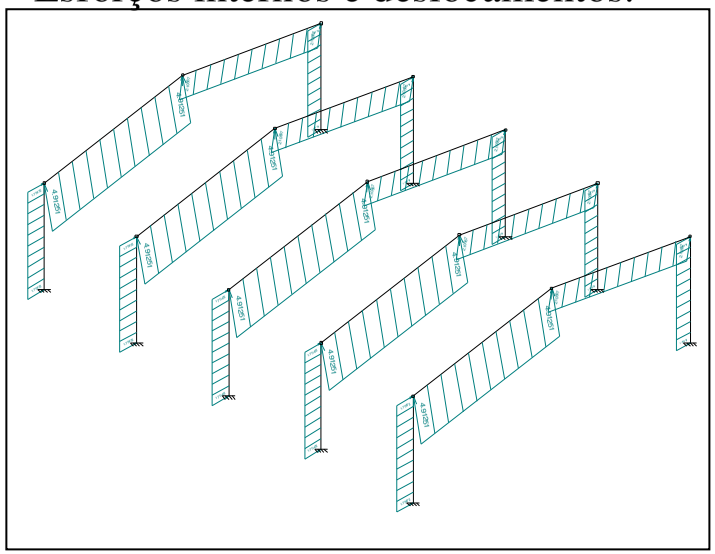


Vento 90º

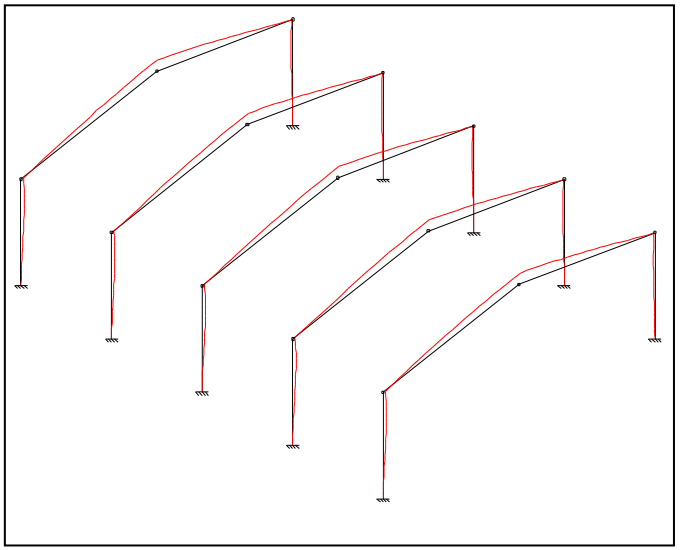


VERIFICAÇÃO DA SEGURANÇA DE UM PÓRTICO

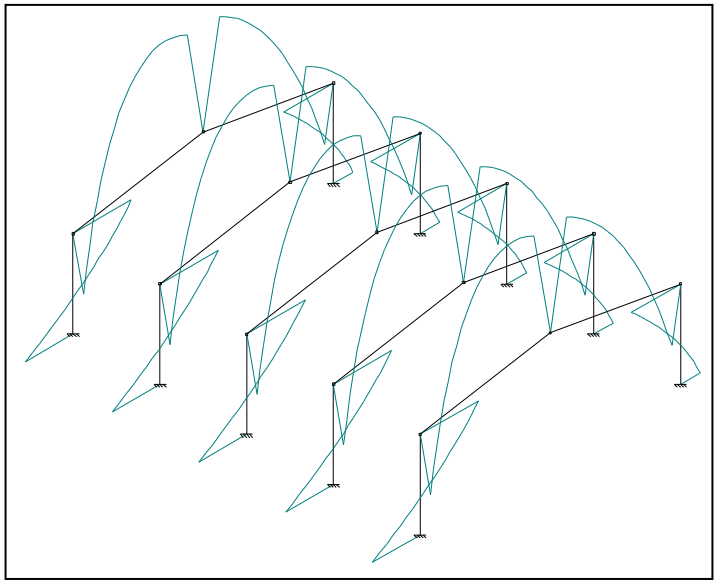
- Efeito das acções variáveis: Acção do vento = W
  - Esforços internos e deslocamentos.



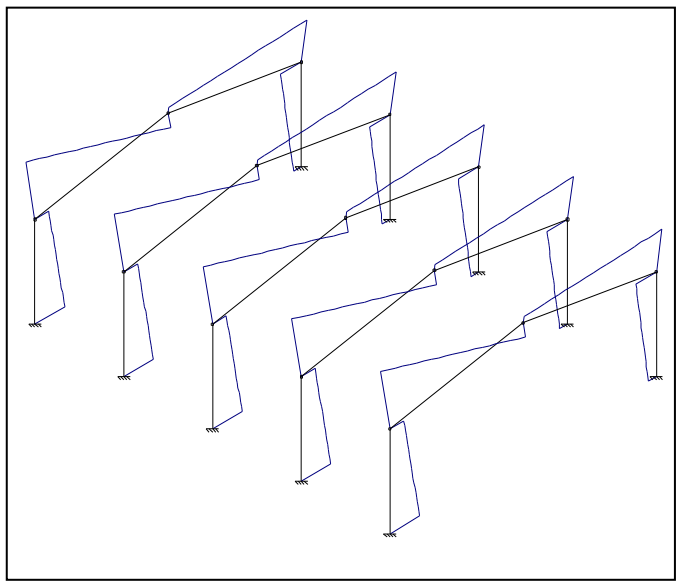
Acções



Deslocamentos



Momento flector

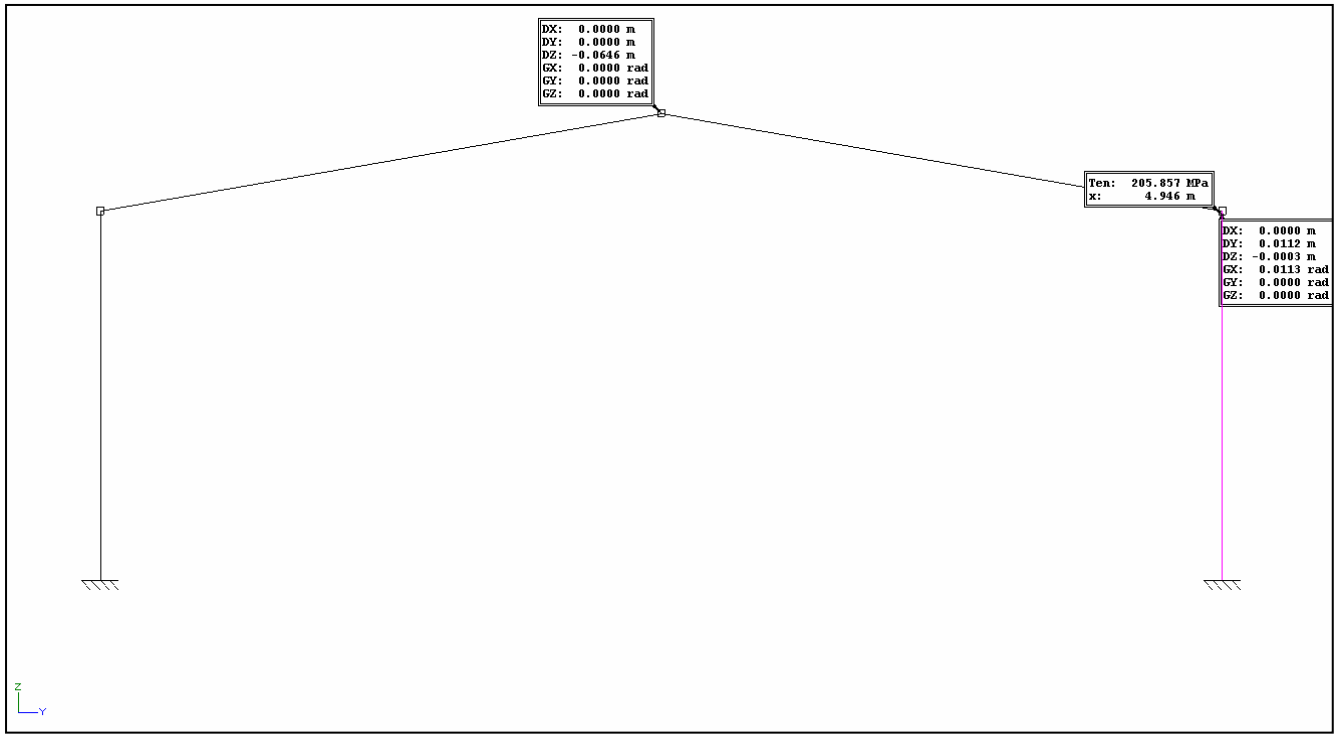


Transverso

VERIFICAÇÃO DA SEGURANÇA DE UM PÓRTICO

- Valores das acções combinadas nas vigas e pilares:
  - Duas hipóteses possíveis a aplicar numa solução porticada (viga coluna).
  - Escolher situação mais crítica para verificação do ELU.

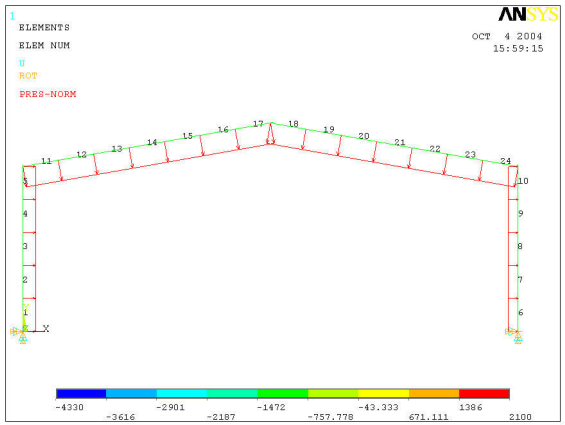
Caso	Acção Variável de base	Elemento	Combinação
1	W	Cobertura (vigas)	$S = 1.0 \times G + 1.5 \times [W + 0 \times Q]$
2	Q	Cobertura (vigas)	$S = 1.5 \times G + 1.5 \times [Q + 0.4 \times (W = 0)]$
3	W	pilares	$S = 1.5 \times G + 1.5 \times [W + (Q = 0)]$



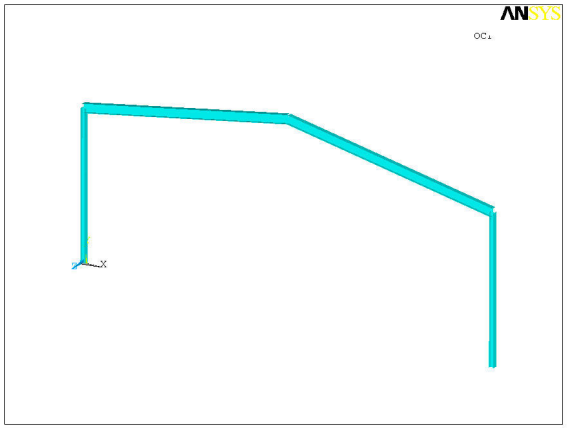
VERIFICAÇÃO DA SEGURANÇA DE UM PÓRTICO

- Métodos avançados de cálculo:
  - Método dos elementos finitos (análise de 1ª ordem).

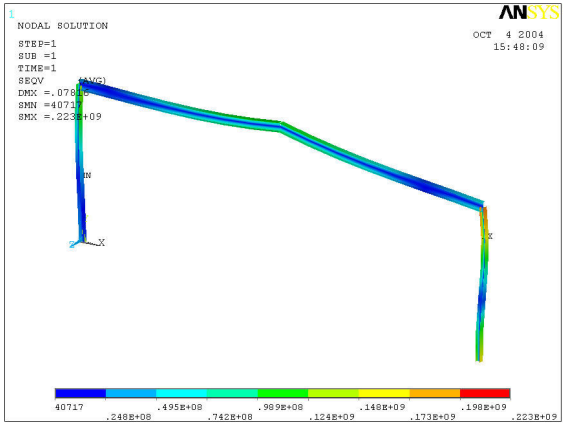
Modelo e condições fronteira.



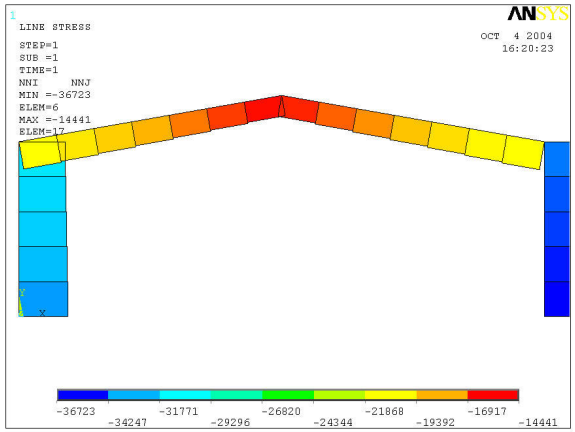
Discretização: Beam 188(ANSYS).



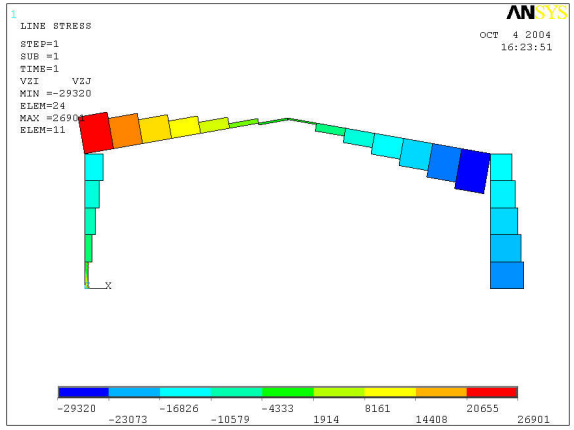
Tensão Equivalente von Mises.



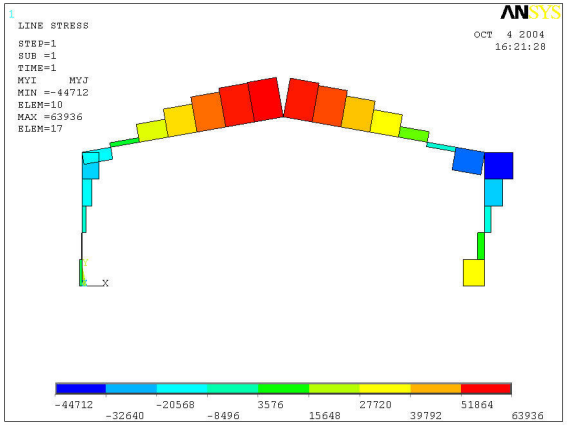
Esforço normal.



Esforço transverso.

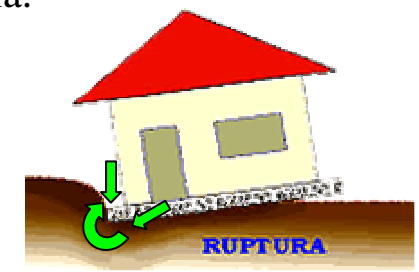


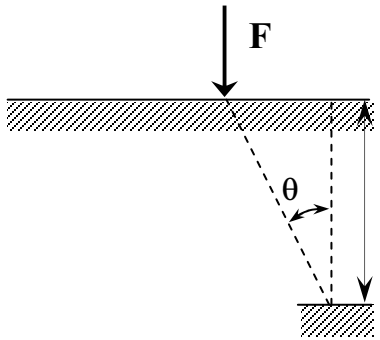
Esforço flector.



FUNDAÇÕES - SOLOS

- Fundações directas: Blocos rígidos (sapatas, pegões) onde os pilares se apoiam, transmitindo as respectivas acções para o solo.
  - Estas acções resumem-se a forças verticais N, forças horizontais Hx e Hy, momentos flectores Mx e My (traduzem-se em excentricidades ex e ey de N) e por vezes momentos de torção T.
  - A tensão induzida por um bloco de fundação numa camada de terreno, pode ser calculada pela teoria de elasticidade, admitindo então que o solo tem comprtamento elástico. A tensão vertical, num ponto de maciço elástico (z,w,teta), provocada pela carga concentrada F, pode ser determinada pela expressão de Boussinesq.
  - A capacidade de carga de um terreno de fundação é limitada pelo assentamento que a estrutura lhe impõe. Assentamento por consolidação (tende a diminuir com o tempo) ou assentamento por rotura (tende a aumentar com o tempo). Assentamento admissível (PT=0.050 [m] ES=0.075 [m]) para estruturas metálicas hiperestáticas correntes.
  - Tensão admissível =0.1 [MPa], solos coerentes de consistência média.





$$\sigma_z = \frac{3F}{2\pi z^2}\cos^5(\theta)$$

  - O assentamento Δh de uma camada de solo com espessura h, causado por um acréscimo de tensão (Δσ) é dado através de:

$$\Delta h = h\,\frac{\Delta\sigma}{1+\varepsilon}\,a_v$$

Parâmetros obtidos experimentalmente em lab. mec. solos.
ε=indice de vazios do terreno
a_v=coeficiente de compressibilidade

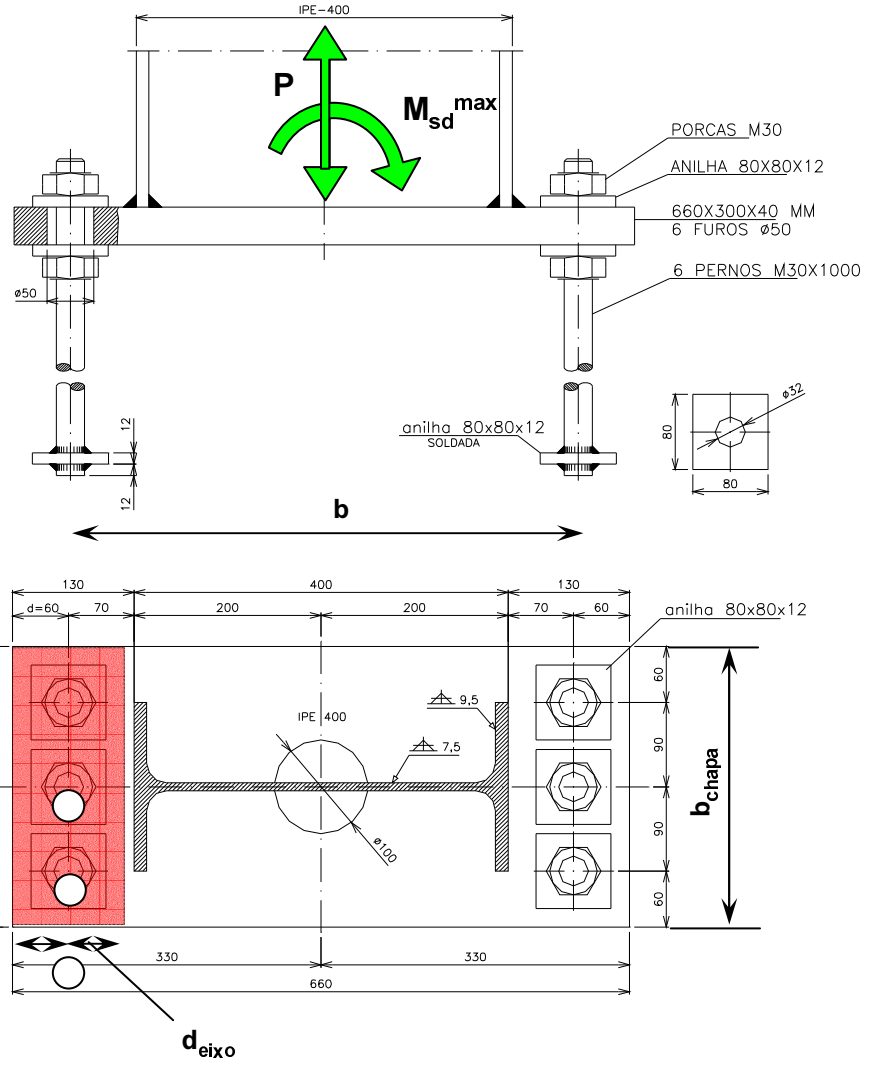
FUNDAÇÕES E SUPORTES

- Suporte: Varões rectos e roscados embebidos em betão armado:
  - Verificar a capacidade resistente longitudinal dos pernos rosados, em função do esforço normal.
  - M_{sd}^{max} corresponde ao momento flector máximo que actua no suporte considerado.
  - "b" representa a distância entre os varões roscados.
  - Axil depende do estado de solicitação dos pernos:
    - Tracção:

      $Axil = P/2$

    - Compressão (habitual):

      $$Axil = P/2 - \left(b_{chapa}.2.d_{eixo} - \frac{n^{o}_{pernos}}{2} A_{perno} \right) f_{cd}$$



fcd = Tensão resistente do morteiro fluido sem retracção, colocado entre a base do suporte e a sapata (16MPa).

$$N_{sd} = Axil + \frac{M_{sd}^{max}}{b}$$

$$\sigma_{Rd} = f_y = 400\ [MPa]$$
$$classe\ 5.8\ (DIN\ 898))$$

- Os pernos roscados devem ser dimensionados ao corte.

FUNDAÇÕES E SUPORTES

- <u>Predimensionamento comprimento dos varões</u>:
  - varões roscados M20 /M30 devem cumprir com ensaios de aderência.
  - Comprimento dos varões:

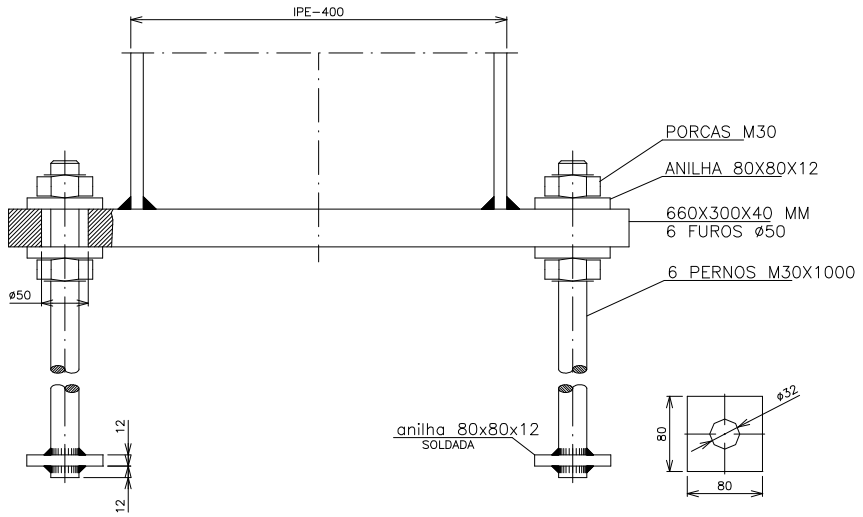
$$l_{\text{var}\,ao} = m\phi^2 \geq \frac{f_{yk}}{200}\phi\,;m = 12$$

M20=> $l_{varão}$=480 [mm]
M30=>$l_{varão}$=1000 [mm]

  - Comprimento de ancoragem efectiva:

$$l_{\text{var}\,ao}^{\;ef} = l_{\text{var}\,ao}K$$

K= factor de correcção por armadura superabundante.



FUNDAÇÕES E SUPORTES

- Suporte: <u>Chapas em aço para ligação pilar com pernos roscados:</u>
  - A espessura da chapa de suporte deve ser determinada em função do dimensionamento à tracção, nas emediações dos pernos traccionados (ver esquema baseado no modelo de viga biencastrada com apoio deslizante). Secção da viga= (b_{chapa}x esp). Nas secções de encastramento devem ser considerados os seguintes esforços:

$$M_{flector} = \frac{CP \times L}{2} \qquad V_{corte} = CP \qquad CP = \left(\frac{M_{Sd}^{\max}}{c}\right) + \left(\frac{P}{2}\right)$$

•Nas secções de encastramento deve ser calculada a tensão equivalente de von Mises:

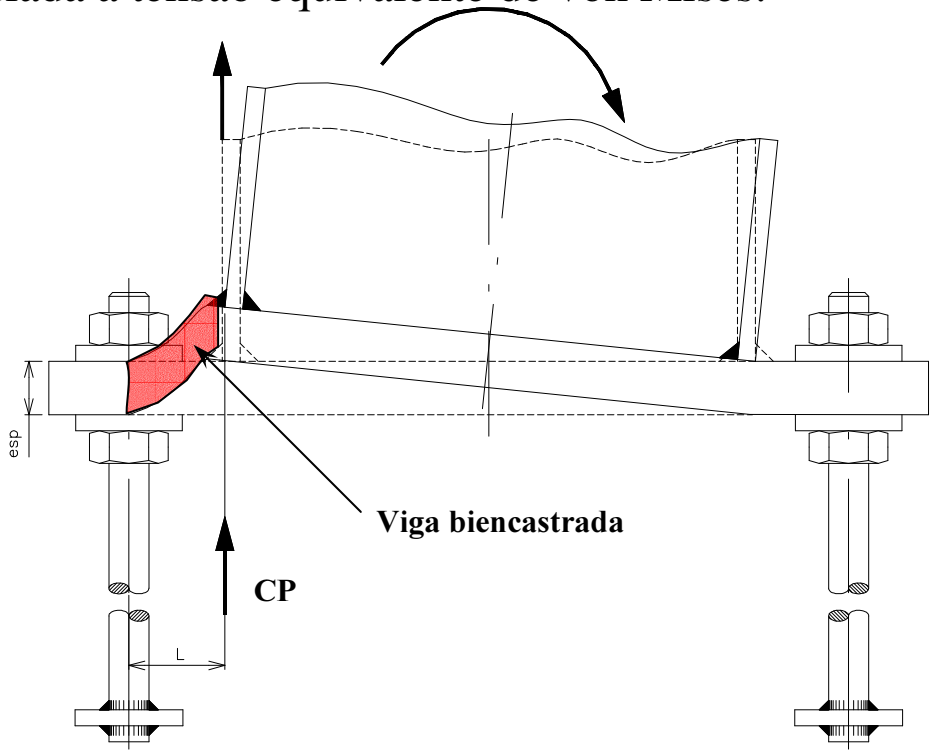
$$\sigma_{Sd} = \sigma_{eq=} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \qquad \sigma = \frac{6M_{sd}^{\max}}{b_{chapa} esp^2}$$

$$\boxed{\sigma_{Rd} = f_y = 275\,[MPa] \quad S275}$$

$$\tau = \frac{V_{corte}}{b_{chapa} esp}$$

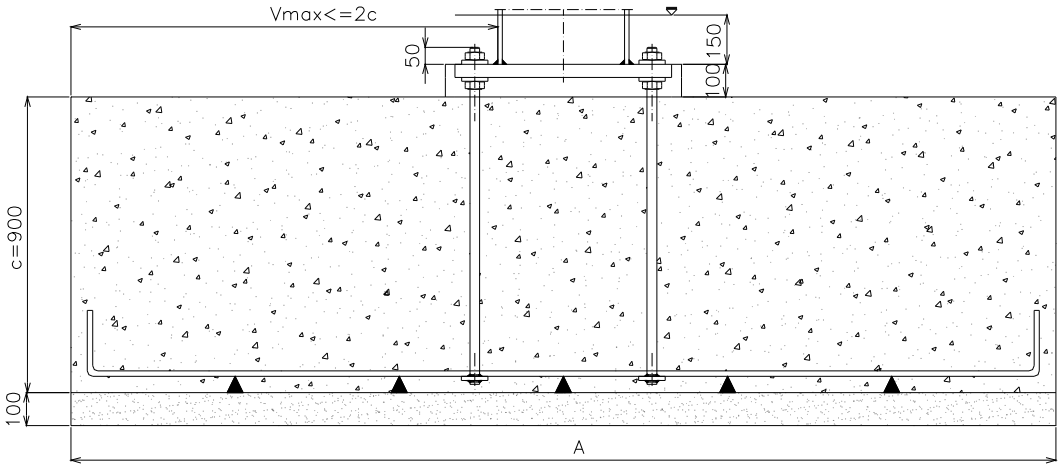
•Ensaios virtuais (numéricos) e reais (laboratório) permitiram verificar o valor das tensões dos modelos da chapa.

•As consições de segurança serão verificadas com este método simplificado.



FUNDAÇÕES E SUPORTES

- Suporte: Sapatas em betão armado:
  - A betonagem deve ser dimensionada para transmitir as cargas da estrutura ao solo, desenvolvendo tensões e deformações admissíveis.
  - A distribuição de pressões sobre o solo pode ser simplificada com uma distribuição linear.
  - Pode ser assunido que o ponto de aplicação das acções se situa na parte superior da chapa de apoio.
  - Foram assunidos os seguintes valores de massa específica: Betão armado com 2.5 t/m^3, enquanto que soleira e enchimento com 2 t/m^3.
  - Material: betão armado.
  - Altura da sapata função do comprimento efectivo do varão (aprox.=900 [mm]).
  - Dimensão A/B para cumprir com as limitações de tensão admissível e deslizamento / rotação.
  - chapa a 150 [mm] da soleira.
  - Sapata a 100 [mm] da chapa.
  - Armadura verificada segundo estado de flexão na sapata (não apresentado).



FUNDAÇÕES E SUPORTES

- Verificação da segurança em relação à rotação da sapata.
  - Calculo de momentos em relaçlão ao ponto "O".

$$NT \times \frac{A}{2} \geq MT \times \gamma_{SV}$$

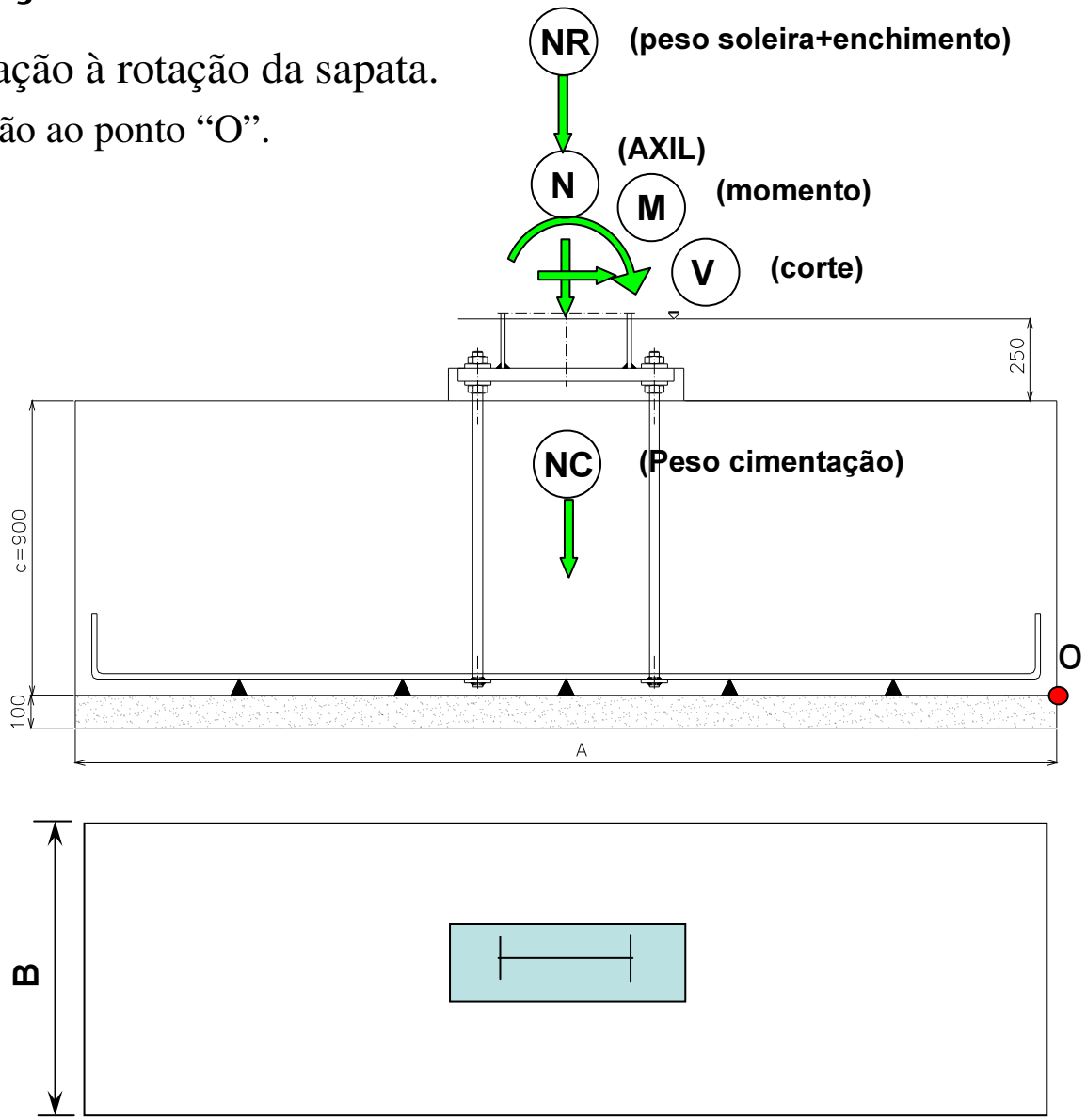
$$NT = N + NC + NR$$

$$NC = (A \times B) \times 0.9 \times 2.5$$

$$NR = (A \times B) \times 0.25 \times 2.0$$

$$MT = (M) + V \times 1.0$$

$\gamma_{SV} = 1.5$ **(Coef. segurança)**



FUNDAÇÕES E SUPORTES

- Verificação da segurança em relação ao deslizamento da sapata.
  - Terreno argiloso.
  - desprezo do efeito do solo nas paredes laterais da sapata.
  - desprezo da variação da coesão com a humidade.

$$NT \times tg(\varphi) \geq V \times \gamma_{Sd}$$

$\gamma_{Sd} = 1.5$ **(Coef. segurança)**

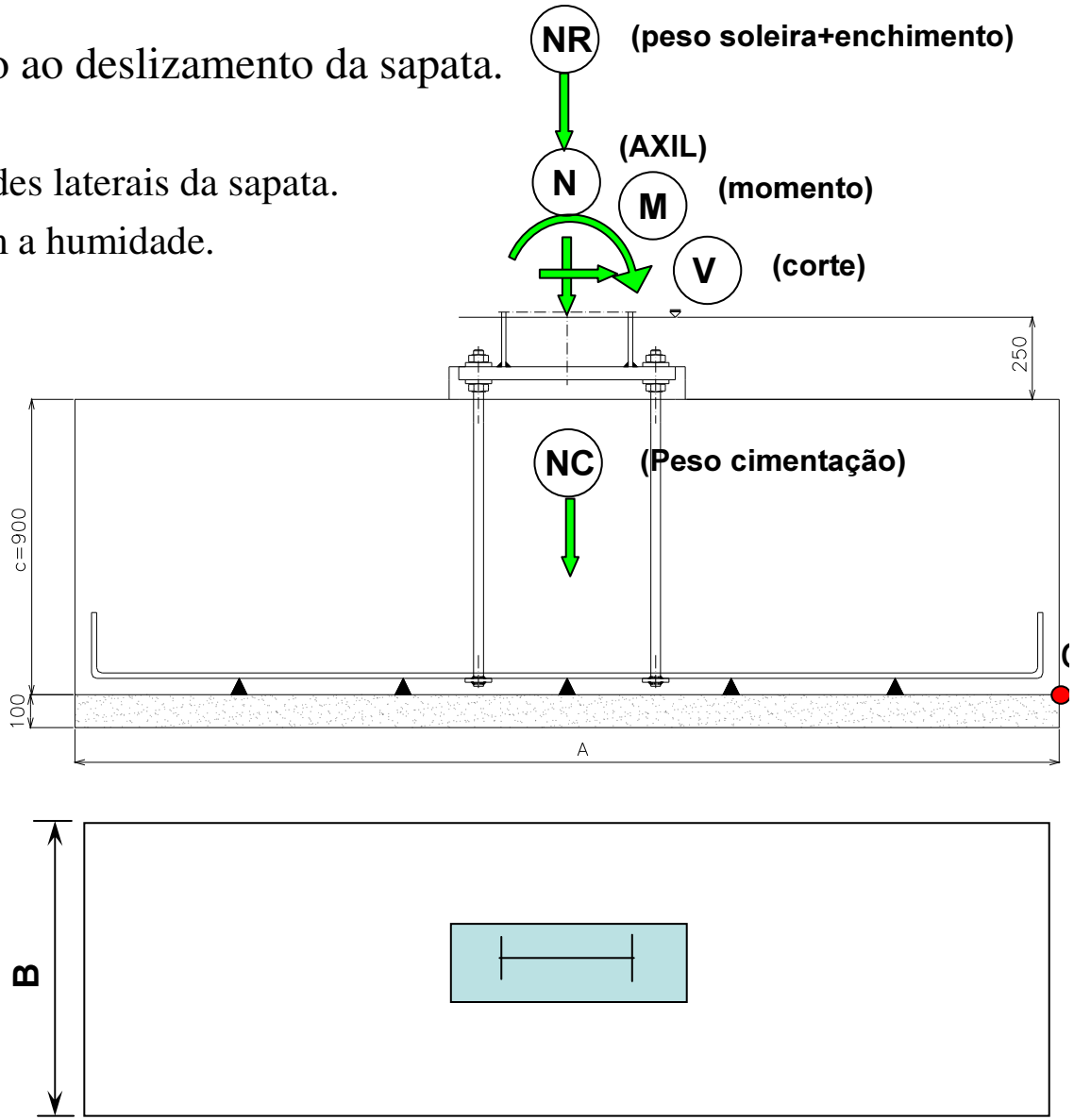
V **(Esforço de corte)**

$NT = N + NC + NR$

$NC = (A \times B) \times 0.9 \times 2.5$

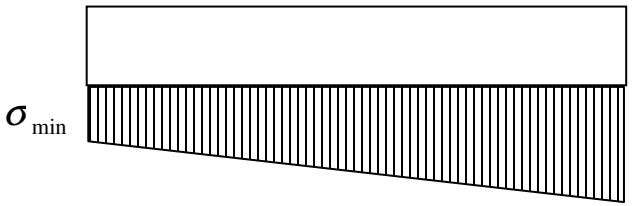
$NR = (A \times B) \times 0.25 \times 2.0$

φ **(ângulo de atrito=20º)**



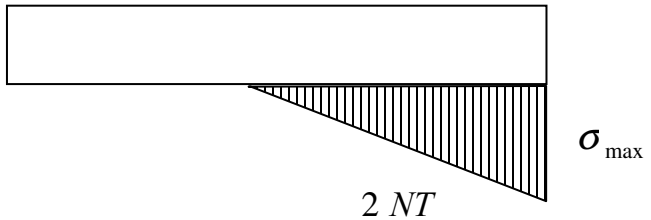
FUNDAÇÕES E SUPORTES

- Verificação da segurança em relação às tensões no solo.
  - tensão solicitante de cálculo no solo deverá ser inferior a 1.25 vezes o valor da tensão admissível.
  - deslocar o sistema de forças para para a cota superior da sapata.
  - Análise da distribuição das tensões na cota inferior da sapata, considerando distribuições trapezoidais ou triangulares.



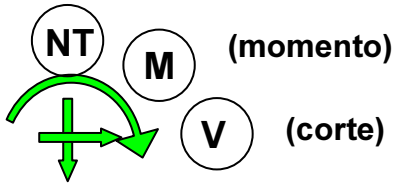
$$\sigma_{Sd} = \sigma_{EXTREMOS} = \frac{NT}{(A \times B)} \pm \frac{6MT}{(A^2 B)}$$

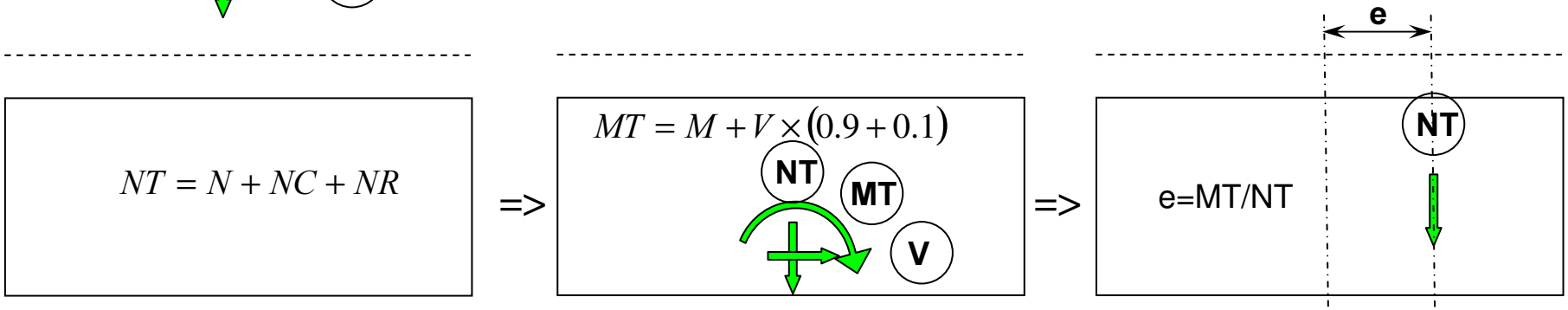
$$\sigma_{Rd} \le \sigma_{Rd} = 1.25\,\sigma_{adm}$$



$$\sigma_{Sd} = \sigma_{máximo} = \frac{2\,NT}{\left(3\left(\frac{A}{2} - e\right) \times B\right)}$$

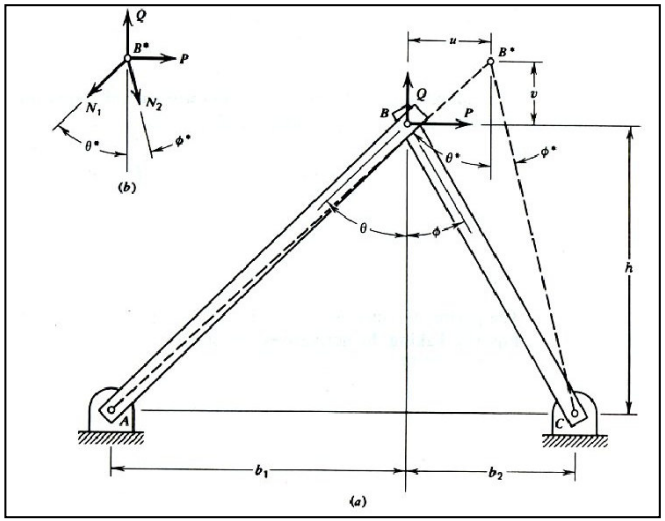
$$\sigma_{Rd} \le \sigma_{Rd} = 1.25\,\sigma_{adm}$$

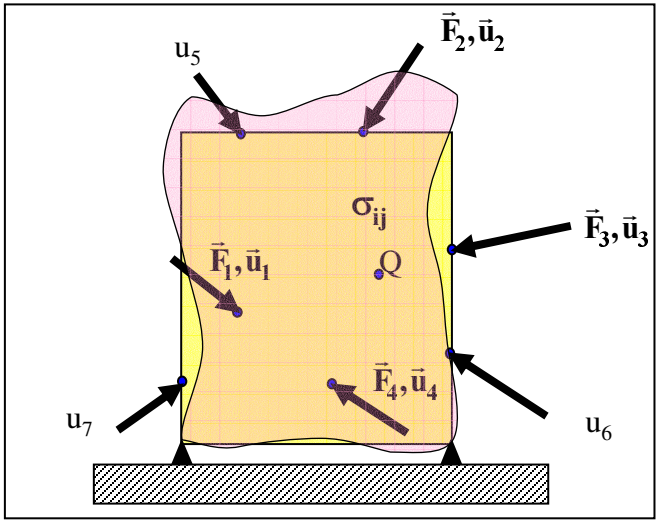




ENERGIA DE DEFORMAÇÃO

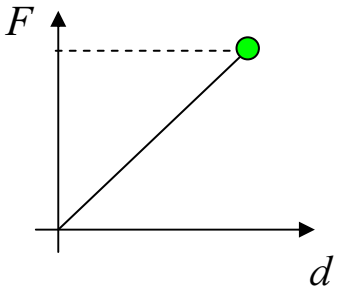
- Âmbito:
  - Cálculo de deslocamentos em elementos lineares e curvas.
  - Determinação de incógnitas em sistemas hiperestáticos simples.
  - Análise elementar da mecânica do impacto.
- Energia de deformação:
  - Na formulação clássica, o equilíbrio de forças é efectuado com cálculo de tensões e deformações.
  - A formulação alternativa prevê métodos baseados no trabalho e energia das forças exteriores e interiores que actuam numa estrutura, originando métodos numéricos de aproximação (MEF).
- Determinação da energia de deformação:
  - Quando um corpo se deforma sob acção de forças exteriores, estas realizam trabalho, armazenado sob a forma de energia.

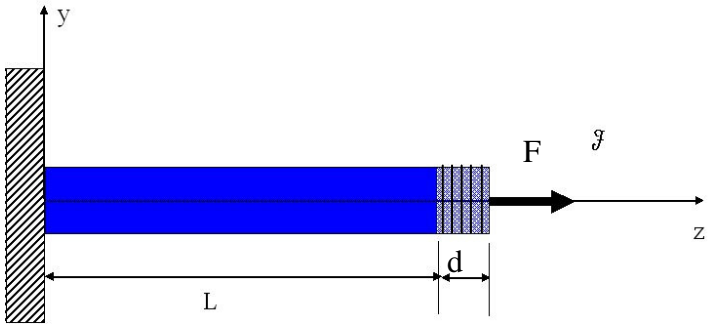




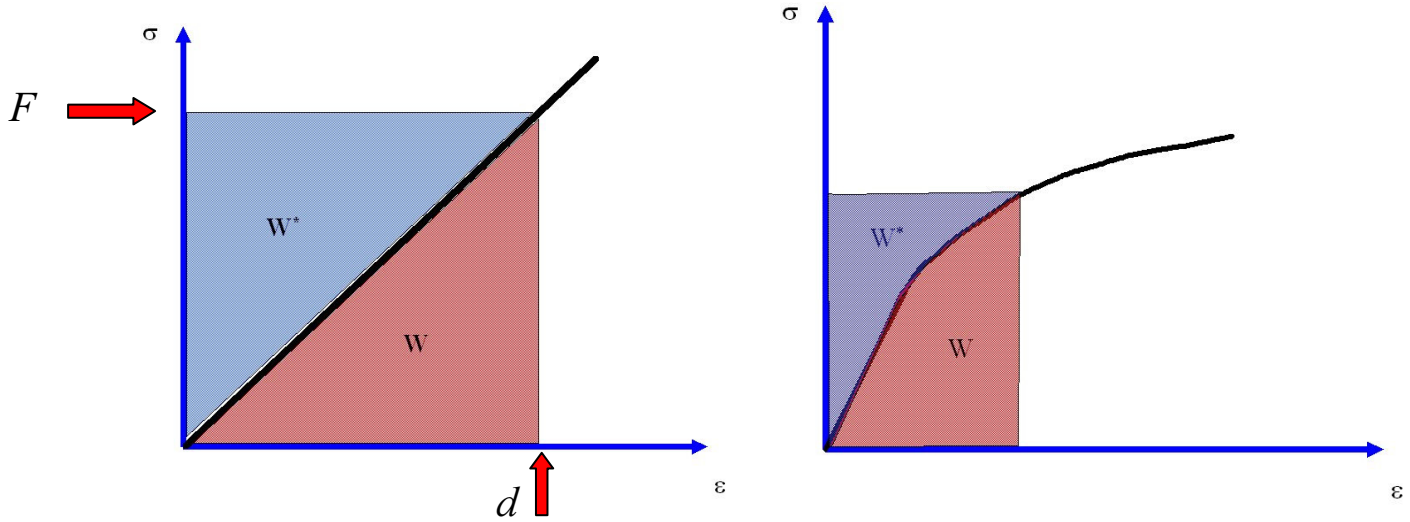
ENERGIA DE DEFORMAÇÃO

- Energia de deformação elástica:
  - O valor da energia de deformação elástica, U, armazenada numa barra de comprimento L quando a carga é incrementada de 0 a F vale:





$$W = U = \frac{1}{2} F\, d$$



Energia de deformação a) material linear elástico, b) material não linear elástico

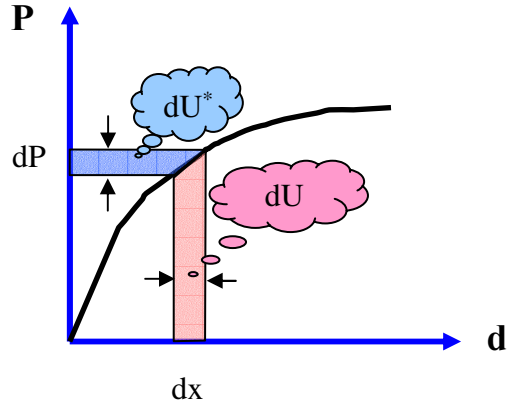
ENERGIA DE DEFORMAÇÃO ESPECÍFICA

- Energia de deformação elástica do elemento de barra:
  - Trabalho elementar:

$$dU = P\,dx$$

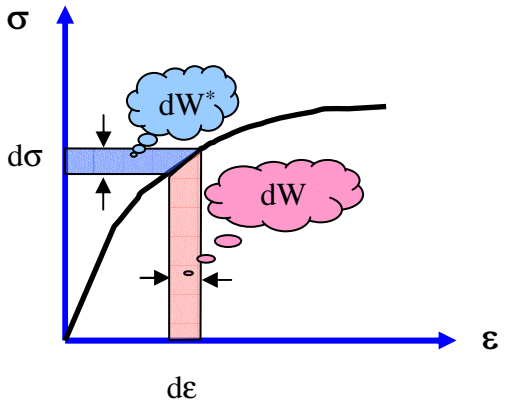
  - Trabalho total:

$$U = \int_0^{x1} P\,dx$$



- Energia específica de deformação:

$$u = \frac{U}{V} = \int_0^{x1} \frac{P}{A}\frac{dx}{L} = \int_0^{\varepsilon 1} \sigma\,d\varepsilon$$



ENERGIA DE DEFORMAÇÃO ELÁSTICA
TENSÕES NORMAIS

- Num elemento estrutural ou componente mecânico com distribuição de tensões não uniforme, o trabalho de deformação específico, u, pode ser defrinido para um elemento de volume dv.

(1) $$u = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta V} = \frac{dU}{dV}$$

(2) $$u = \int_0^{\varepsilon_x} \sigma_x \, d\varepsilon_x = \int_0^{\varepsilon_x} E \, \varepsilon_x \, d\varepsilon_x = \frac{E}{2} \left(\varepsilon_x{}^2 \right) = \frac{1}{2} \frac{\sigma_x^2}{E}$$

- Combinando (1) com (2):

$$\frac{dU}{dV} = \frac{1}{2} \frac{\sigma_x^2}{E} \Leftrightarrow \int dU = \int \frac{1}{2} \frac{\sigma_x^2}{E} \, dV$$

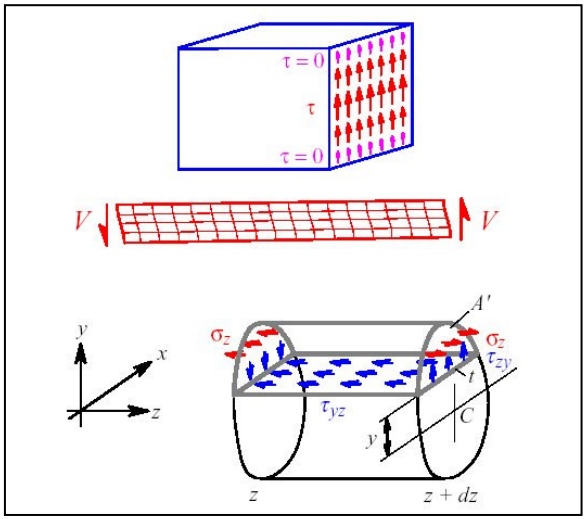
$$\boxed{U = \int \frac{1}{2} \frac{\sigma_x^2}{E} \, dV}$$

ENERGIA DE DEFORMAÇÃO ELÁSTICA
TENSÕES DE CORTE

- Num elemento estrutural ou componente mecânico com distribuição de tensões não uniforme, o trabalho de deformação específico, u, pode ser defrinido para um elemento de volume dv.

(1) $$u = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta V} = \frac{dU}{dV}$$

(2) $$u = \int_0^{\gamma_{xy}} \tau_{xy}\, d\gamma_{xy} = \int_0^{\gamma_{xy}} G\, \gamma_{xy}\, d\gamma_{xy} = \frac{G}{2}\left(\gamma_{xy}^2\right) = \frac{1}{2}\frac{\tau_{xy}^2}{G}$$



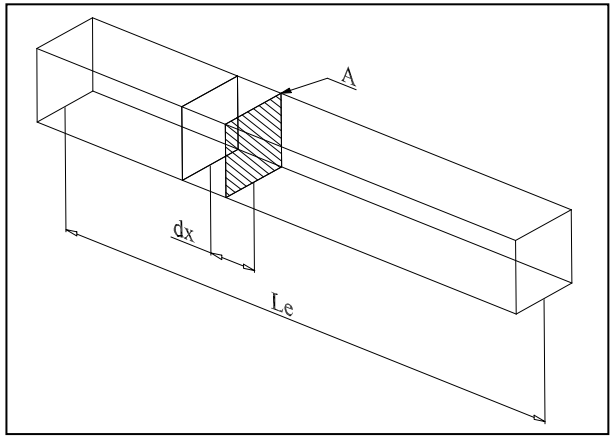
- Combinando (1) com (2):

$$\frac{dU}{dV} = \frac{1}{2}\frac{\tau_{xy}^2}{G} \Leftrightarrow \int dU = \int \frac{1}{2}\frac{\tau_{xy}^2}{G}\, dV$$

$$U = \int \frac{1}{2}\frac{\tau_{xy}^2}{G}\, dV$$

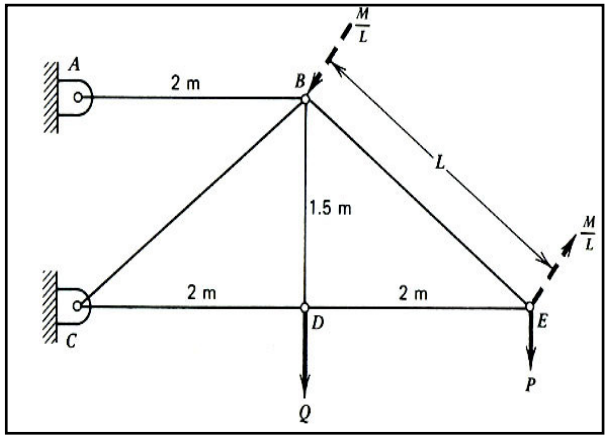
ENERGIA DE DEFORMAÇÃO ELÁSTICA
ESFORÇO NORMAL

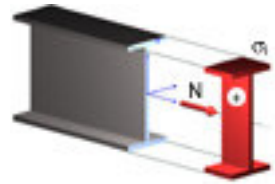
- Considerando um segmento de comprimento dx do elemento estrutural, com área da secção recta A, e sujeito a um esforço normal N, a tensão normal deverá ser determinada através de $\sigma X = N/A$ e a deformação axial $\varepsilon x = N/(EA)$



$$U = \int \frac{1}{2}\frac{\sigma_x^2}{E}\,dV = \int_v \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{N}{A}\right)^2}{E}\,dv = \iiint_v \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{N}{A}\right)^2}{E}\,dA\,dx = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{AN^2}{EA^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{N^2}{EA}\,dx$$

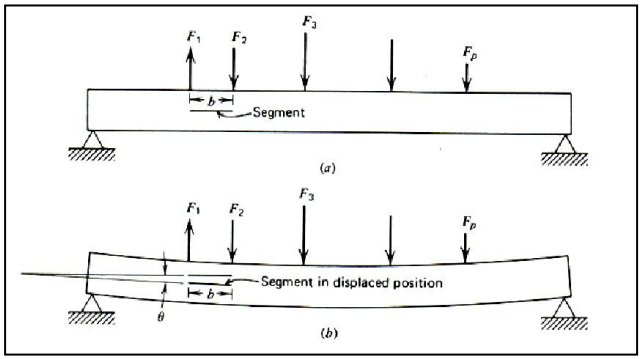
$$U = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{N^2}{EA}\,dx$$





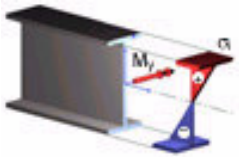
ENERGIA DE DEFORMAÇÃO ELÁSTICA
ESFORÇO MOMENTO FLECTOR

- Para as fibras localizadas na cota y, a tensão normal será σX= M y/Iz e a deformação axial associada εx=My/(EIz)



$$U = \int \frac{1}{2}\frac{\sigma_x^2}{E}\,dV = \int_v \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{My}{I_z}\right)^2}{E}\,dv = \iiint_v \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{M}{I_z}\right)^2 y^2}{E}\,dA\,dx = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{M^2}{EI_z}\,dx$$

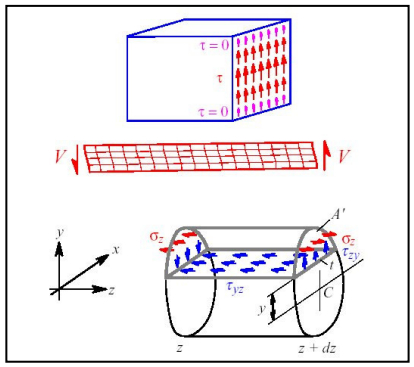
$$U = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{M^2}{EI_z}\,dx$$



ENERGIA DE DEFORMAÇÃO ELÁSTICA
ESFORÇO TRANSVERSO

- Para um elemento estrutural submetido a um estado de corte e flexão.

$$U = U_\sigma + U_\tau = \int \frac{1}{2}\frac{\sigma_x^2}{E}\,dV + \int \frac{1}{2}\frac{\tau_{xy}^2}{G}\,dV$$

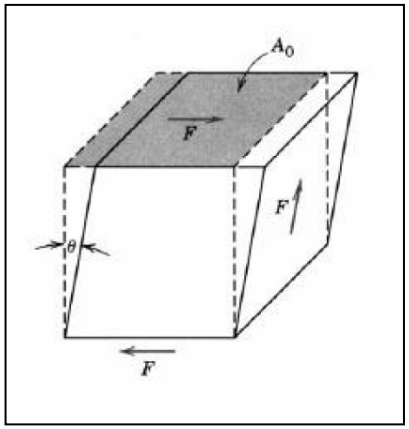


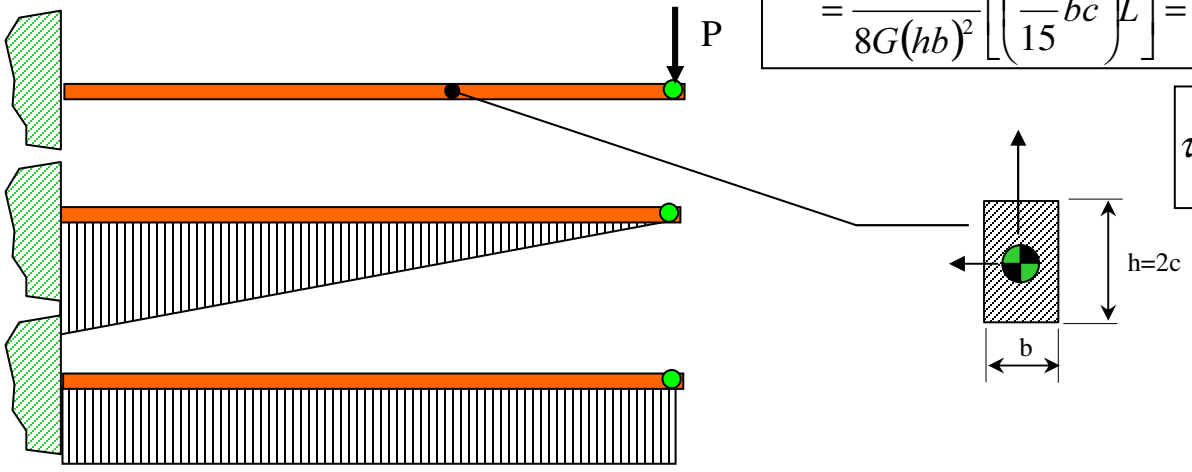
$$U_\sigma = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{M^2}{EI_z}dx = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{(P\,x)^2}{EI_z}dx = \frac{P^2L^3}{6EI_z}$$

$$U_\tau = \frac{1}{2}\int_V \frac{\left[\frac{3}{2}\frac{P}{hb}\left(1-\frac{y^2}{c^2}\right)\right]^2}{G}dV$$

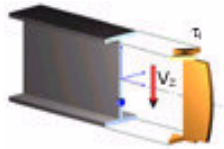
$$= \frac{9P^2}{8G(hb)^2}\int_0^L\int_{-c}^{+c}\left(1-2\frac{y^2}{c^2}+\frac{y^4}{c^4}\right)b\,dy\,dx$$

$$= \frac{9P^2}{8G(hb)^2}\left[\left(\frac{16}{15}bc\right)L\right] = \frac{3}{5}\frac{P^2L}{GA}$$

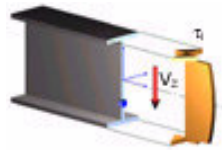




$$\tau_{xy} = \frac{Q\,V}{I\,b} = \frac{3}{2}\frac{V}{A}\left(1-\frac{y^2}{c^2}\right) = \frac{3}{2}\frac{P}{bh}\left(1-\frac{y^2}{c^2}\right)$$

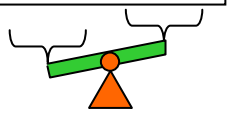


ENERGIA DE DEFORMAÇÃO ELÁSTICA
ESFORÇO TRANSVERSO



- Para um elemento estrutural submetido a um estado de corte e flexão.

$$U = U_\sigma + U_\tau = \frac{P^2 L^3}{6EI_z} + \frac{3P^2 L}{5GA}$$

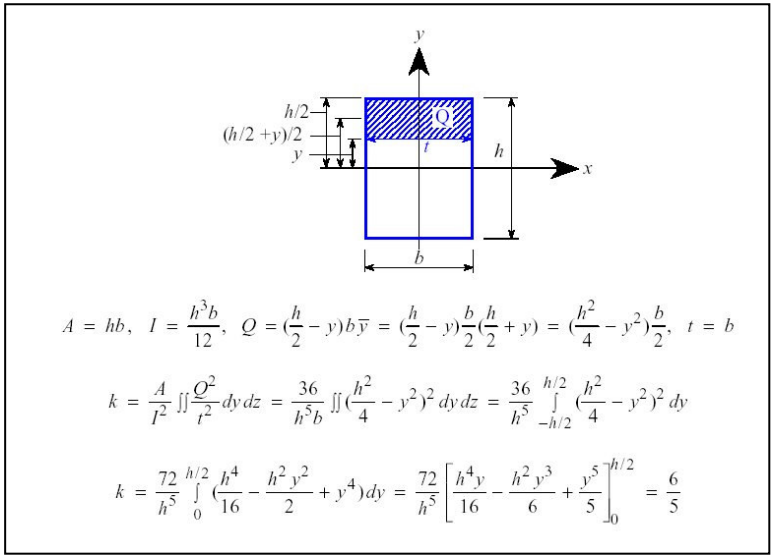


$$\tau_{xy} = \frac{Q\,V}{I\,b} = \frac{3}{2}\frac{V}{A}\left(1-\frac{y^2}{c^2}\right) = \frac{3}{2}\frac{P}{bh}\left(1-\frac{y^2}{c^2}\right)$$

- Relativamente ao valor da energia correspondente à tensão de corte:

$$U_\tau = \frac{1}{2}\int_V \frac{[\tau_{xy}]^2}{G}\,dV$$

$$= \int_0^L \frac{V^2}{2GI_z^2}\,dx \int_A \frac{Q^2}{b^2}\,dA$$



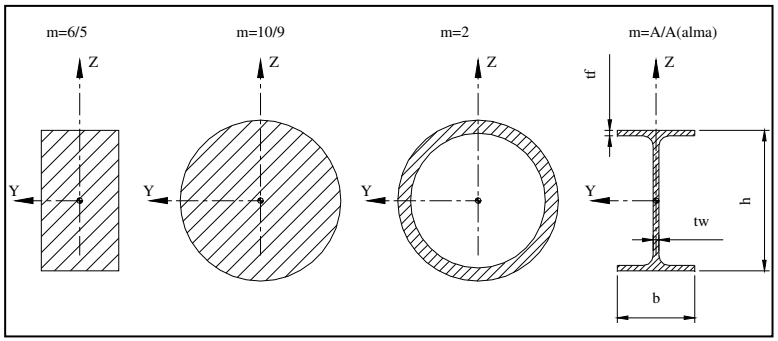
$$A = hb,\quad I = \frac{h^3 b}{12},\quad Q = (\frac{h}{2}-y)b\bar{y} = (\frac{h}{2}-y)\frac{b}{2}(\frac{h}{2}+y) = (\frac{h^2}{4}-y^2)\frac{b}{2},\quad t = b$$

$$k = \frac{A}{I^2}\iint \frac{Q^2}{t^2}dy\,dz = \frac{36}{h^5 b}\iint(\frac{h^2}{4}-y^2)^2\,dy\,dz = \frac{36}{h^5}\int_{-h/2}^{h/2}(\frac{h^2}{4}-y^2)^2\,dy$$

$$k = \frac{72}{h^5}\int_0^{h/2}(\frac{h^4}{16}-\frac{h^2 y^2}{2}+y^4)dy = \frac{72}{h^5}\left[\frac{h^4 y}{16}-\frac{h^2 y^3}{6}+\frac{y^5}{5}\right]_0^{h/2} = \frac{6}{5}$$

- Definindo a quantidade “m”:

$$m = \frac{A}{I_z}\int_A \frac{Q^2}{b^2}\,dA$$



- A energia valerá:

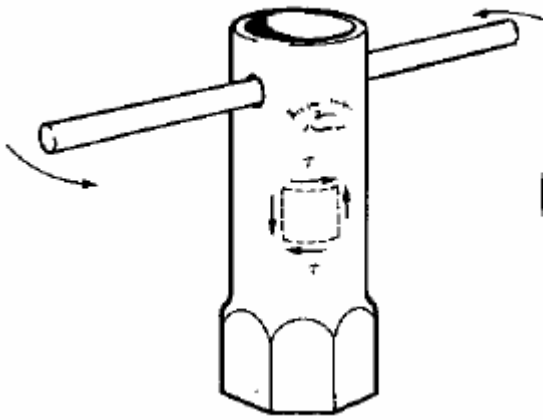
$$U_\tau = \int_0^L \frac{V^2}{2GI_z^2}\,dx\,\frac{mI_z^2}{A} = \int_0^L \frac{m}{A}\frac{V^2}{2G}\,dx = \int_0^L \frac{V^2}{2GA_R}\,dx$$

$$A_R = \frac{A}{m}$$

ENERGIA DE DEFORMAÇÃO ELÁSTICA
ESFORÇO MOMENTO TORSOR

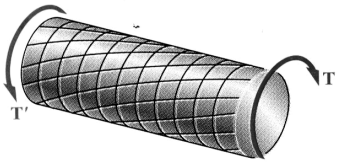
- Para um elemento estrutural submetido a um estado de torção puro

$$U = U_\tau = \int_V \frac{1}{2}\frac{\tau_{xy}^2}{G}\,dV$$



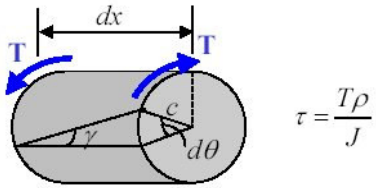
- O campo de tensões:

$$\tau_{xy} = \frac{M_t\ \rho}{I_p} =$$

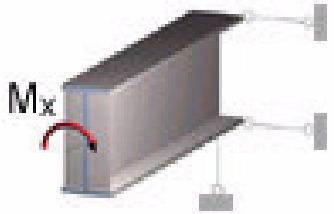


- A energia valerá:

$$U = U_\tau = \int_V \frac{1}{2}\frac{\tau_{xy}^2}{G}\,dV = \int_L \int_A \frac{1}{2}\frac{\left[M_t^2\ \rho^2\right]}{GI_p^2}\,dA\,dx = \int_L \frac{M_t^2}{2GI_p}\,dx$$

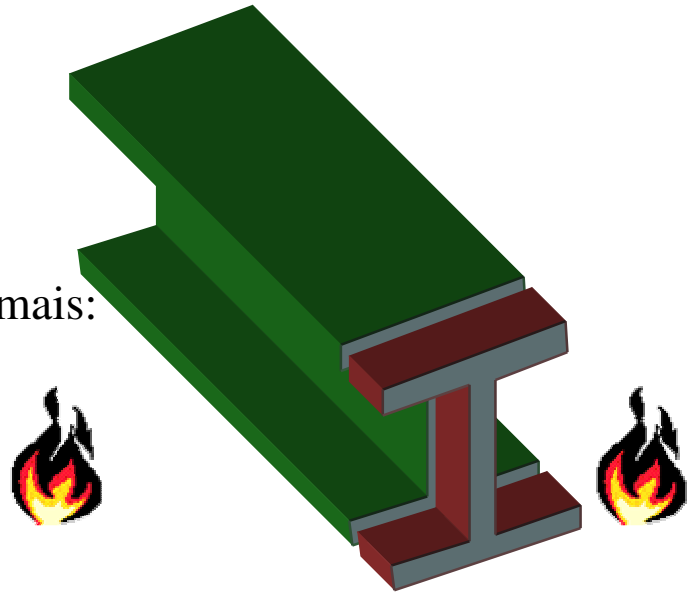


$$\tau = \frac{T\rho}{J}$$



ENERGIA DE DEFORMAÇÃO ELÁSTICA
VARIAÇÃO DE TEMPERATURA UNIFORME

- Para um elemento submetido a um aumento de temperatura uniforme, será de prever o aparecimento de esforços normais.



- Deformações e tensões relacionadas com esforços normais:

$$\varepsilon xx = \alpha \Delta T \qquad \sigma xx = E\varepsilon xx = E\alpha \Delta T$$

- Energia de deformação

$$U = \frac{1}{2}\iiint_{v} E(\alpha \Delta T)^2 \, dV = \frac{1}{2}\int_{L} EA(\alpha \Delta T)^2 \, dx$$

ENERGIA DE DEFORMAÇÃO ELÁSTICA
VARIAÇÃO DE TEMPERATURA DIFERENCIAL

- Para um elemento submetido a um aumento de temperatura na face superior, ΔTs, e um aumento de temperatura diferenciada, na face inferior, ΔTi, será de prever o aparecimento de esforços normais e de flexão.
- Deformações e tensões relacionadas com esforços normais:

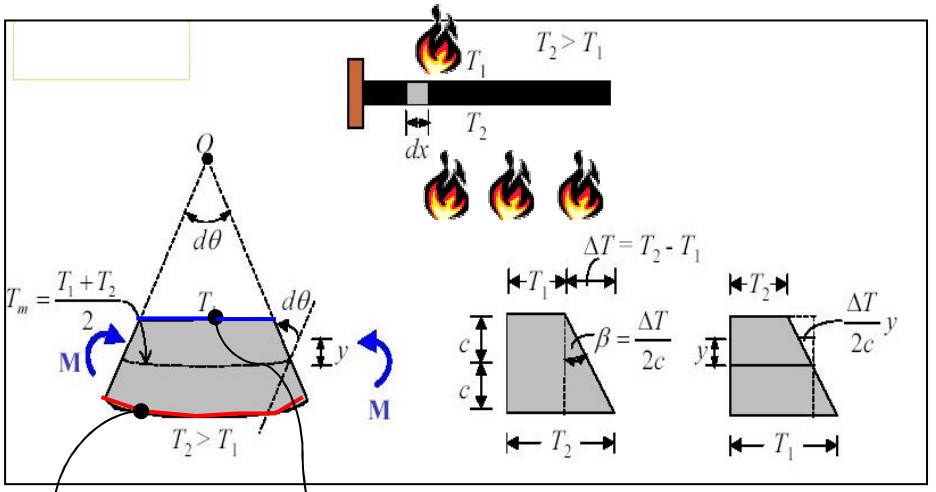
$$\varepsilon_N = \frac{\alpha}{2}(\Delta Ti + \Delta Ts) \qquad \sigma_N = E\frac{\alpha}{2}(\Delta Ti + \Delta Ts)$$

- Rotações induzidas por esforços de flexão:

$$\frac{\theta}{dx} = \frac{\alpha}{h}(\Delta Ti - \Delta Ts) = \frac{M}{EI}$$

- Energia de deformação

$$U = \frac{1}{2}\int_L EA(\frac{\alpha}{2}(\Delta Ti + \Delta Ts))^2 dL + \frac{1}{2}\int_L EI(\frac{\alpha}{h}(\Delta Ti - \Delta Ts))^2 dL$$



$$\rho\, d\theta = dx(1+\alpha\Delta T_S) = dx(1+\alpha\Delta T_1)$$

$$(\rho+h)\, d\theta = dx(1+\alpha\Delta T_i) = dx(1+\Delta T_2)$$

$$-h\theta = dx(1+\alpha\Delta T_S) - dx(1+\alpha\Delta T_i)$$

$$-\theta = \frac{dx}{h}(\alpha\Delta T_S - \alpha\Delta T_i)$$

$$\frac{\theta}{dx} = \frac{\alpha}{h}(\Delta T_i - \Delta T_s)$$

$$\frac{\theta}{dx} = \frac{M}{EI_z}$$

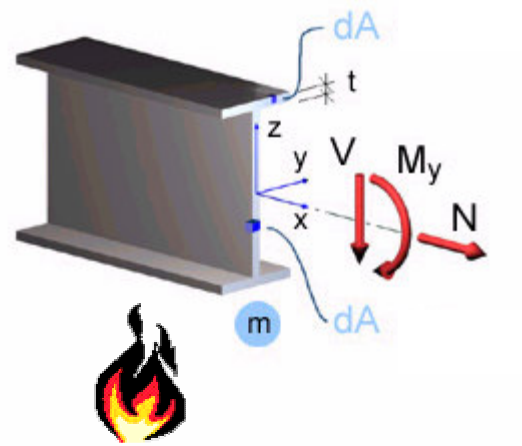
$$\boxed{\frac{1}{\rho} \cong \frac{M}{EI_z}}$$

$$\boxed{\rho\theta = dx \Leftrightarrow \frac{\theta}{dx} = \frac{1}{\rho}}$$

ENERGIA DE DEFORMAÇÃO ELÁSTICA
CASO GERAL

- Energia elástica de deformação (casos planos):

$$U = \frac{1}{2}\int_L \frac{N^2}{EA}dx + \frac{1}{2}\int_L \frac{M^2}{EI_z}dx + \frac{1}{2}\int_L \frac{V^2}{GA_R}dx + \frac{1}{2}\int_L \frac{M_t^{\,2}}{GI_p}dx + \frac{1}{2}\int_L EA(\alpha\Delta T)^2 dx +$$
$$+ \frac{1}{2}\int_L EA(\frac{\alpha}{2}(\Delta Ti + \Delta Ts))^2 dx + \frac{1}{2}\int_L EI(\frac{\alpha}{h}(\Delta Ti - \Delta Ts))^2 dx$$

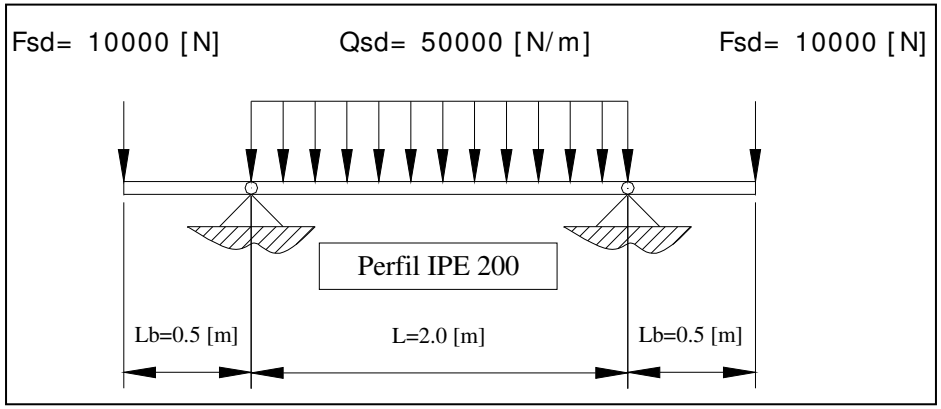


- Energia elástica de deformação (casos tridimensionais):

$$U = \frac{1}{2}\int_L \frac{N^2}{EA}dx + \frac{1}{2}\int_L \frac{M_y^{\,2}}{EI_y}dx + \frac{1}{2}\int_L \frac{M_z^{\,2}}{EI_z}dx + \frac{1}{2}\int_L \frac{V_y^{\,2}}{GA_R}dx + \frac{1}{2}\int_L \frac{V_z^{\,2}}{GA_R}dx + \frac{1}{2}\int_L \frac{M_t^{\,2}}{GI_p}dx + \frac{1}{2}\int_L EA(\alpha\Delta T)^2 dx +$$
$$+ \frac{1}{2}\int_L EA(\frac{\alpha}{2}(\Delta Ti + \Delta Ts))^2 dx + \frac{1}{2}\int_L EI(\frac{\alpha}{h}(\Delta Ti - \Delta Ts))^2 dx$$

EXERCÍCIO TEMÁTICO – ENERGIA DE DEFORMAÇÃO

- Determine a energia de deformação elástica do elemento estrutural quando submetido ao carregamento que se representa na figura, constituído em material S235 com um módulo de elasticidade igual a 2.1x1011 e um coeficiente de poisson igual a 0.3.



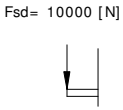
- Energia de deformação deste elemento estrutural:

$$U = \int_L \frac{V^2}{2GA_r}dx + \int_L \frac{M^2}{2EI}dx$$

$$A_r = d \times t_w = 0.000894\left(m^2\right)$$

$$I_y = 23130 \times 10^{-8}\left[m^4\right]$$

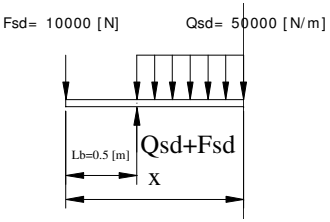
- Esforços internos:



$$0 < x < 0.5[m]$$

$$M = -F_{Sd} \times x = -10000 \times x[Nm]$$

$$V = F_{Sd} = 10000[N]$$



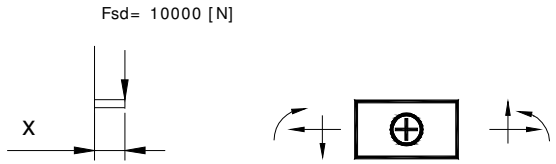
$$0.5 < x < 2.5[m]$$

$$M = Q_{Sd}(x - 0.5) - F_{Sd} \times 0{,}5 - Q_{Sd} \times \frac{(x-0.5)^2}{2}[Nm]$$

$$V = Q_{Sd}(x - 1.5)[N]$$

EXERCÍCIO TEMÁTICO – ENERGIA DE DEFORMAÇÃO

- Esforços internos (continuação):



$0 < x < 0.5[m]$

$$M = -F_{Sd} \times x[Nm]$$
$$V = -F_{Sd}[N]$$

- Energia de deformação deste elemento estrutural:

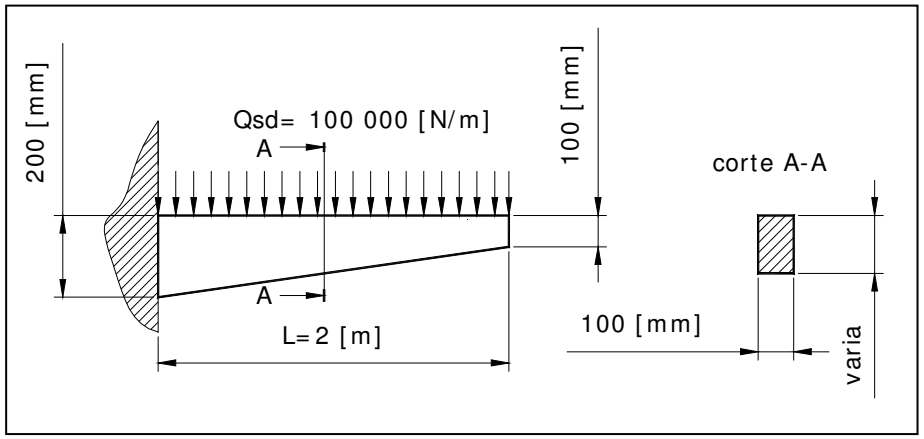
$$U = \int_L \frac{V^2}{2GA_r}dx + \int_L \frac{M^2}{2EI}dx$$

$$U = \int_0^{0.5} \frac{F_{Sd}{}^2}{2GA_r}dx + \int_0^{0.5} \frac{(-F_{Sd} \times x)^2}{2EI}dx + \int_{0.5}^{2.5} \frac{(Q_{Sd}(x-1.5))^2}{2GA_r}dx + \int_{0.5}^{2.5} \frac{(Q_{Sd}(x-0.5)(5/4-x/2)-F_{Sd} \times 0.5)^2}{2EI}dx +$$
$$+ \int_0^{0.5} \frac{(-F_{Sd})^2}{2GA_r}dx + \int_0^{0.5} \frac{(-F_{Sd} \times x)^2}{2EI}dx$$

$$U = 16{,}26 \quad [J]$$

ENERGIA DE DEFORMAÇÃO ELÁSTICA DE UMA VIGA ENCASTRADA

- Determine a energia de deformação elástica do elemento estrutural quando submetido ao carregamento que se representa na figura 2, constituído em material S235 com um módulo de elasticidade igual a E=2.1x1011. Considere apenas a contribuição do momento flector.



- Energia de deformação deste elemento estrutural:

$$U = \int_L \frac{M^2}{2EI} dx$$

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{0.1 \times h^3}{12} = \frac{0.1 \times \left(0.1 + \frac{0.1 \times x}{2}\right)}{12}$$

- Esforço interno (momento flector):

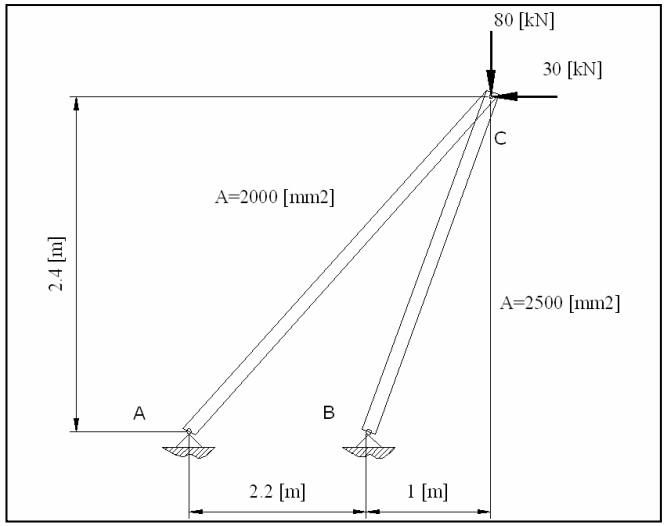
$$M = -100000 \frac{x^2}{2}$$

- Energia de deformação deste elemento estrutural:

$$U = \int_L \frac{M^2}{2EI} dx = \int_0^2 \frac{\left(50000 x^2\right)}{2 \times 2.1 \times 10^{11} \times \frac{0.1}{12} \left(0.1 + \frac{0.1 \times x}{2}\right)^3} dx = 0.00778 [J]$$

ENERGIA DE DEFORMAÇÃO ESTRUTURAS RETICULADAS

- Determine a energia de deformação elástica da estrutura, constituída por elementos estruturais tipo barra, quando submetido ao carregamento que se representa na figura 2, em material S235, com um módulo de elasticidade igual a 2.1x1011 [N/m2] e com as secções representadas.

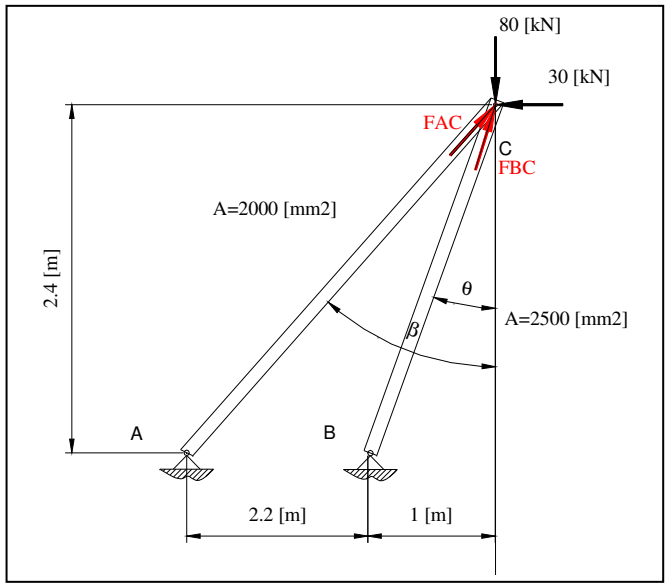


- Energia de deformação deste elemento estrutural:

$$U = U_N = U_N^1 + U_N^2$$

- Esforço interno (normal):

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} F_{AC} = -6129\,[N] \\ F_{BC} = 90658\,[N] \end{cases}$$

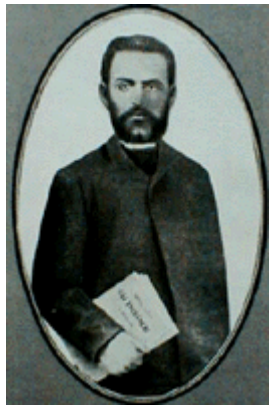


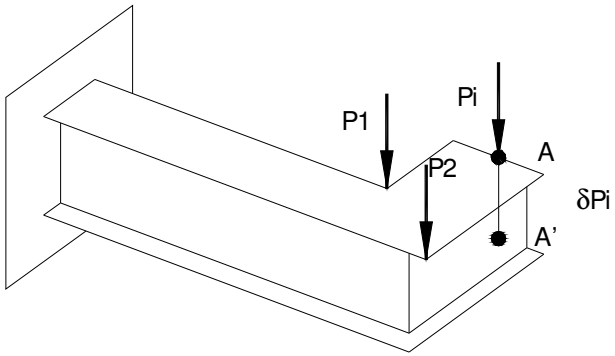
- Energia de deformação deste elemento estrutural:

$$U = \int_L \frac{N_{AC}^{\ 2}}{2EA} dL + \int_L \frac{N_{BC}^{\ 2}}{2EA} dL = 0.175 + 20.35 = 20.53\,[J]$$

2º TEOREMA DE CASTIGLIANO (1873)

- A derivada parcial da energia de deformação, de um sistema linear no domínio elástico, em relação a qualquer força generalizada que actua nesse sistema, é igual ao deslocamento generalizado resultante, na direcção dessa força generalizada.





- Energia elástica de deformação correspondente a um sistema de forças generalizadas:

$$U = f(P_1, P_2, .., P_i \, .. P_n, R)$$

- Impondo um acréscimo de força dpi a uma das cargas do sistema, verifica-se um acréscimo da energia de deformação.

$$U + dU = U + \frac{\partial U}{\partial P_i} dP_i$$

2º TEOREMA DE CASTIGLIANO (1873)

- Ou seja:

$$\textbf{(1)} \qquad U_i + dU_i = U_i + \frac{\partial U_i}{\partial P_i} dP_i$$

- Esta energia não pode depender da ordem de aplicação das cargas, pelo que, aplicando dPi em primeiro lugar, o trabalho das forças exteriores pode ser desprezado. Na sequência, aplicando o resto das forças P1, P2, etc., o trabalho realizado pela carga dPi, vale δi dPi :

$$\textbf{(2)} \qquad U_i + dU_i = U_i + \delta_i dP_i$$

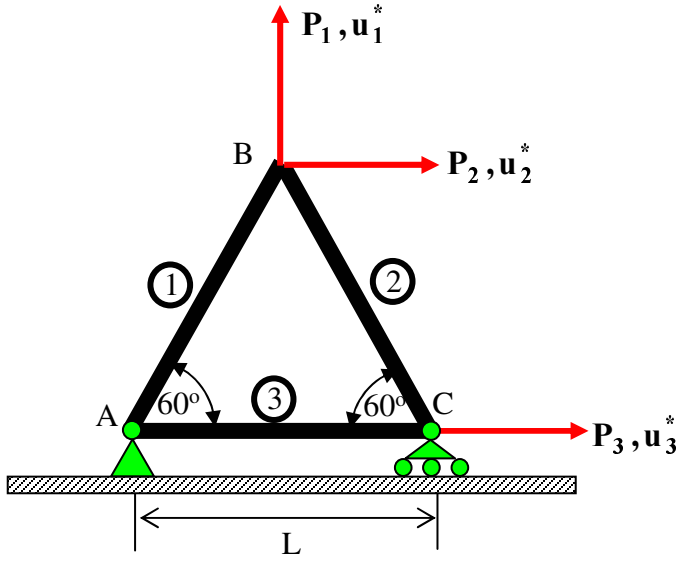
- Combinando (1) com (2):

$$\boxed{\frac{\partial U_i}{\partial P_i} = \delta_i}$$

- O teorema de Castigliano apresentado requer a existência de um sistema linerar elástico.
- Generalização do teorema para sistemas não lineares elásticos também existem e estão disponíveis em :
  - T. Au, Elementary Structural Mechanics, (Prentice Hall, 1963).

EXERCÍCIO TEMÁTICO SOBRE 2º TEOREMA

- Determinar o valor dos deslocamentos resultantes da aplicação do sistema de forças, nas direcções representadas.



- Determinação dos esforços internos nos elementos de barra

$$F_1 = \frac{P_1^*}{2} u_1^* + P_2^*$$

$$F_2 = \frac{P_1^*}{2} u_1^* - P_2^*$$

$$F_3 = P_3^* + \frac{1}{2} P_2^* - \frac{1}{2\sqrt{3}} P_1^*$$

- Determinação da energia de deformação:

$$\mathbf{U}^* = \frac{\mathbf{L}}{\mathbf{2AE}} \left(F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 \right)$$

- Determinação dos deslocamentos:

$$\boxed{u_k = \frac{\partial \mathbf{U}^*}{\partial P_K^*}} \qquad u_1 = \frac{\partial \mathbf{U}^*}{\partial P_1^*} \qquad u_2 = \frac{\partial \mathbf{U}^*}{\partial P_2^*} \qquad u_3 = \frac{\partial \mathbf{U}^*}{\partial P_3^*}$$

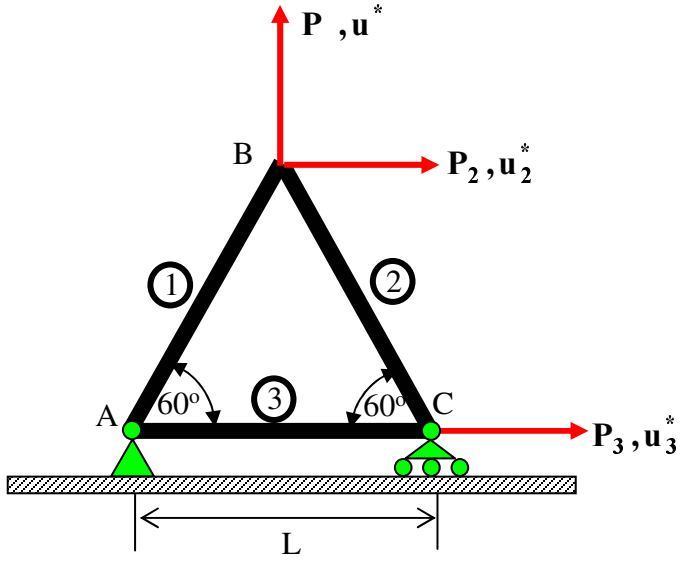
EXERCÍCIO TEMÁTICO SOBRE 2º TEOREMA

- Resultado:

$$u_1 = \frac{\partial U^*}{\partial P_1^*} = \frac{L}{2AE}\left(\frac{3}{2}P_1^* - \frac{2}{\sqrt{3}}P_2^* - \frac{1}{\sqrt{3}}P_3^*\right)$$

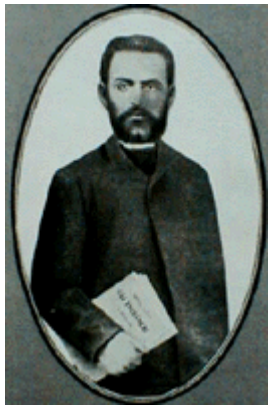
$$u_2 = \frac{\partial U^*}{\partial P_2^*} = \frac{L}{2AE}\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}P_1^* + \frac{9}{2}P_2^* + P_3^*\right)$$

$$u_3 = \frac{\partial U^*}{\partial P_3^*} = \frac{L}{2AE}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}P_1^* + P_2^* + 2P_3^*\right)$$



1º TEOREMA DE CASTIGLIANO (1873)

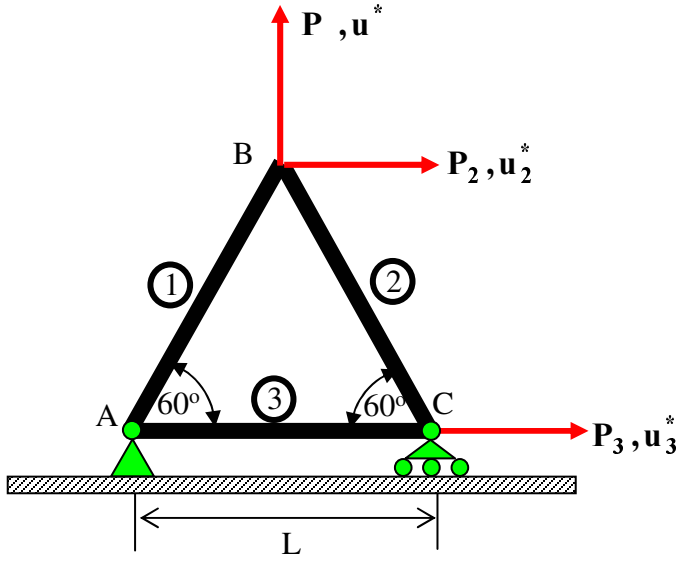
- A derivada parcial da energia de deformação, de um sistema linear no domínio elástico, em relação a qualquer deslocmaneto generalizado que actua nesse sistema, é igual ao valor da força generalizada resultante, obtida na direcção desse deslocmanto generalizado.



$$\frac{\partial U_i}{\partial d_i} = P_i$$

EXERCÍCIO TEMÁTICO SOBRE 1º TEOREMA

- Determinar o valor das forças que produzem os deslocamentos representados, nas direcções de cada um dos deslocamentos.



- Determinação das deformações de cada uma das barras, em função dos deslocamentos.

$$e_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}u_1^* + \frac{1}{2}u_2^*$$

$$e_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}u_1^* - \frac{1}{2}u_2^* + \frac{1}{2}u_3^*$$

$$e_3 = u_3^*$$

- Determinação da energia de deformação:

$$\mathbf{U} = \frac{\mathbf{AE}}{\mathbf{2L}}\left(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2\right)$$

- Determinação das forças:

$$\mathbf{P}_K = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{u}^*_K} \qquad \mathbf{P}_1 = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{u}^*_1} \qquad \mathbf{P}_2 = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{u}^*_2} \qquad \mathbf{P}_3 = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{u}^*_3}$$

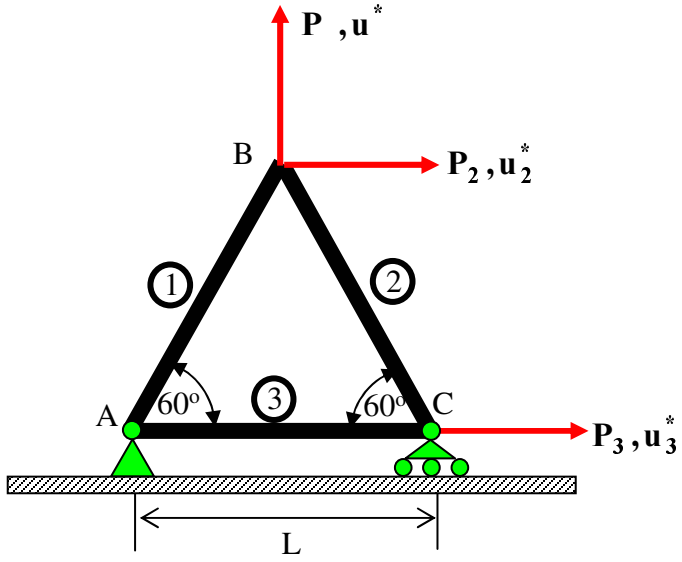
EXERCÍCIO TEMÁTICO SOBRE 1º TEOREMA

- Resultado:

$$P_1 = \frac{\partial U}{\partial u_1^*} = \frac{AE}{2L}\left(3\,u_1^* + \frac{\sqrt{3}}{2}\,u_3^*\right)$$

$$P_2 = \frac{\partial U}{\partial u_2^*} = \frac{AE}{2L}\left(u_2^* - \frac{1}{2}\,u_3^*\right)$$

$$P_3 = \frac{\partial U}{\partial u_3^*} = \frac{AE}{2L}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,u_1^* - \frac{1}{2}\,u_2^* + \frac{5}{2}\,u_3^*\right)$$



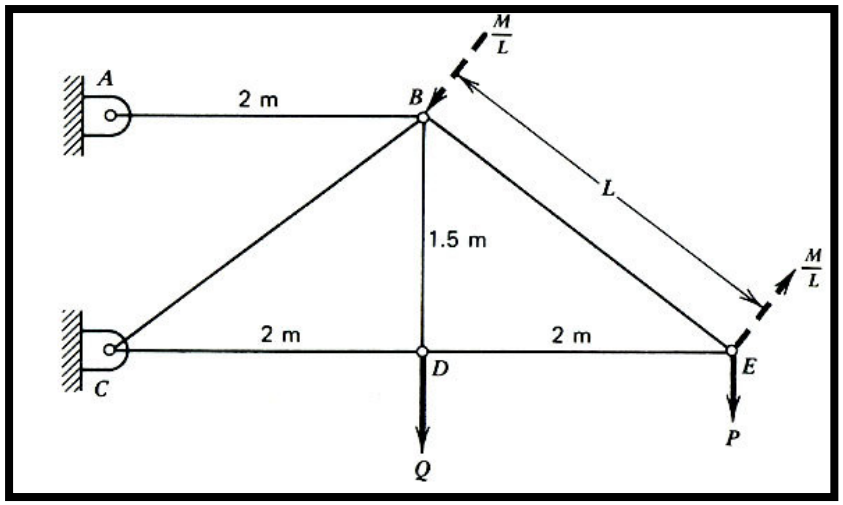
2º TEOREMA DE CASTIGLIANO APLICADO A ESTRUTURAS RETICULADAS

- Sabendo que:

$$U = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{N^2}{EA}\,dx$$

- Por aplicação do segundo teorema:

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{2N}{EA}\frac{\partial N}{\partial P}\,dx = \int_0^L \frac{N}{EA}\frac{\partial N}{\partial P}\,dx$$



- Metodologia:
  - Colocar carga P, no local e direcção que se pretende medir o deslocamento.
  - Determinar os esforços internos em função de P e restante systema generalizado de forças
  - Aplicação do 2º teorema de Castigliano.

2º TEOREMA DE CASTIGLIANO APLICADO A ESTRUTURAS CONTÍNUAS

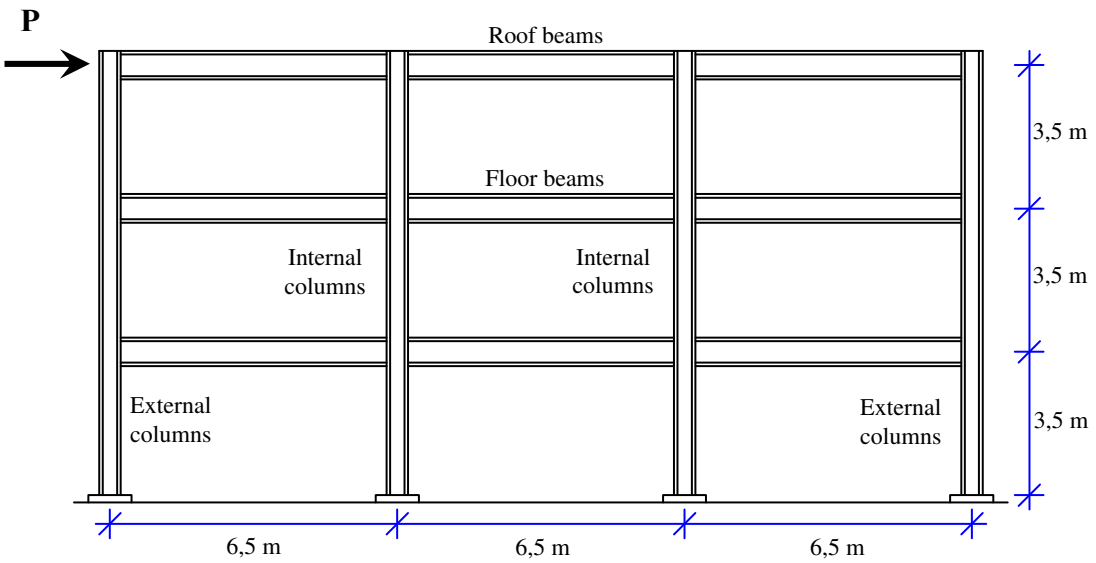
- Sabendo que:

$$U = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{M^2}{EI}\,dx$$

- Por aplicação do segundo teorema:

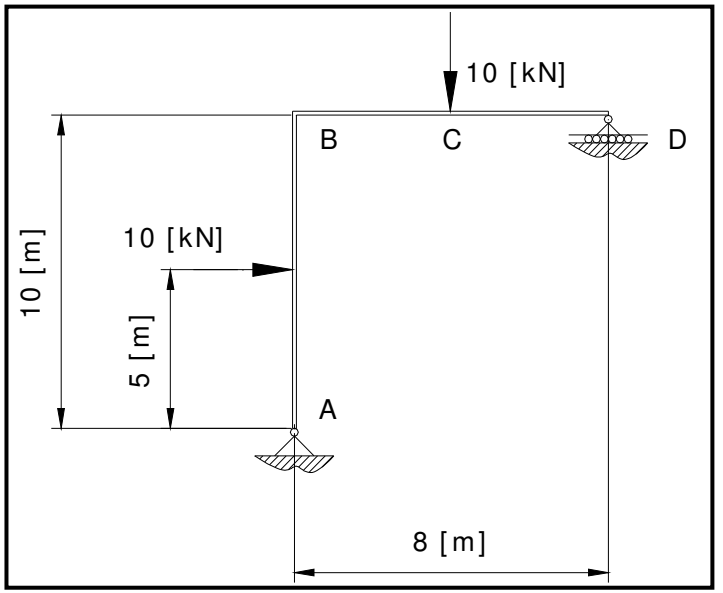
$$\delta = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{2M}{EI}\frac{\partial M}{\partial P}\,dx = \int_0^L \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial P}\,dx$$

- Metodologia:
  - Colocar carga P, no local e direcção que se pretende medir o deslocamento.
  - Determinar os esforços internos em função de P e restante systema generalizado de forças
  - Aplicação do 2º teorema de Castigliano.



EXERCÍCIO TEMÁTICO 1

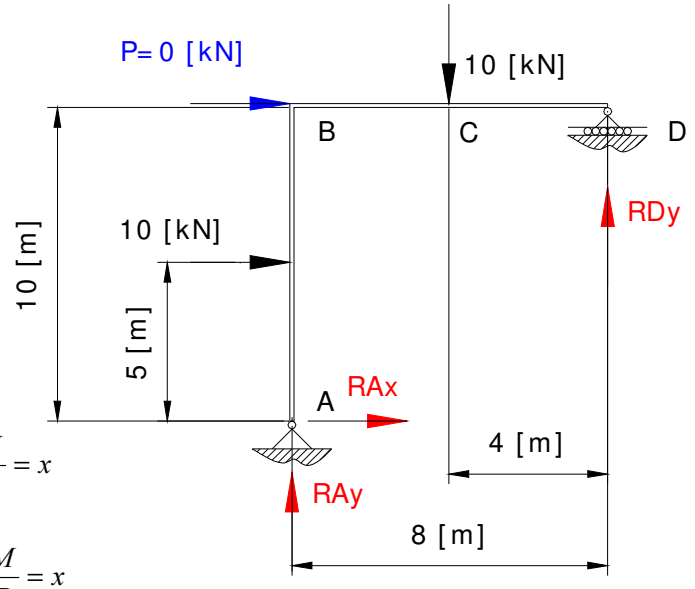
- A figura representa uma estrutura plana contínua, constituída por perfis IPE500 em material S235 com um módulo de elasticidade igual a 2.1×10^{11}.
- Determine o valor do deslocamento horizontal do ponto B, utilizando o teorema de Castigliano e considerando apenas a contribuição do esforço interno momento flector.



EXERCÍCIO TEMÁTICO 1

- Determinação das reacções:

$$R_{AX} = -10000 - P[N]; R_{AY} = 10000 - \frac{90000+10P}{8}[N]; R_{DY} = \frac{90000+10P}{8}[N]$$



- Determinação dos esforços internos:
  - S1: $0 < x < 5[m]$ $M = (10000 + P) \times x[Nm]$ $\frac{\partial M}{\partial P} = x$
  - S2: $5 < x < 10[m]$ $M = P \times x + 50000[Nm]$ $\frac{\partial M}{\partial P} = x$
  - S3: $0 < x < 4[m]$ $M = \left(\frac{90000+10P}{8}\right) \times x[Nm]$ $\frac{\partial M}{\partial P} = \frac{10}{8}x$
  - S4: $4 < x < 8[m]$ $M = -10000 \times (x-4) + \left(\frac{90000+10P}{8}\right) \times x[Nm]$ $\frac{\partial M}{\partial P} = \frac{10}{8}x$

EXERCÍCIO TEMÁTICO 1

- Determinação do deslocamento, utilizando o teorema de Castigliano:

$$\delta_{HB} = \frac{\partial U}{\partial P}\Big|_{P=0}$$

$$\delta_{HB} = \int_0^{10} \frac{M\dfrac{\partial M}{\partial P}}{EI}dx + \int_0^{8} \frac{M\dfrac{\partial M}{\partial P}}{EI}dx$$

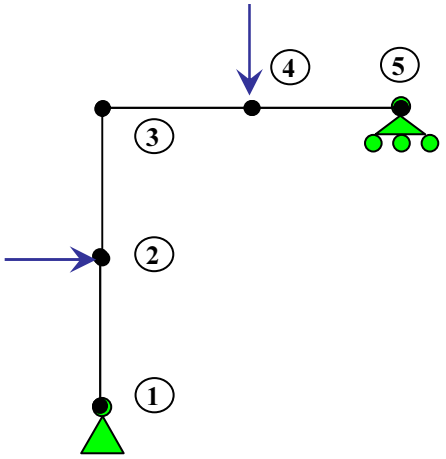
$$\delta_{HB} = \int_0^{5} \frac{10000x^2}{EI}dx + \int_5^{10} \frac{50000x}{EI}dx + \int_0^{4} \frac{90000x^2}{EI}\frac{10}{64}dx + \int_4^{8} \frac{\left[-10000(x-4)+\dfrac{90000}{8}x\right]}{EI}\frac{10}{8}xdx$$

$$\delta_{HB} = .4116446025e-2 + .1852400712e-1 + .2963841139e-2 + .1416057433e-1$$

$$\delta_{HB} = .3976486862e-1[\mathrm{m}]$$

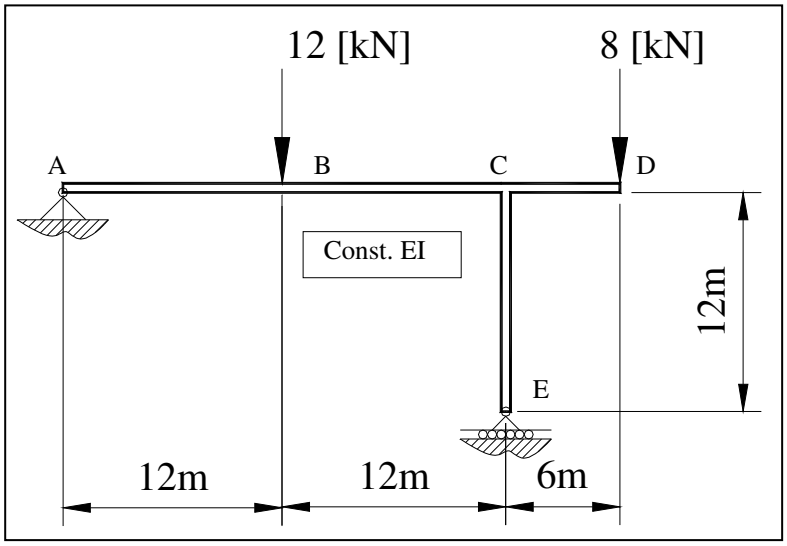
- Comparação com o método dos elementos finitos:

Node #	X Disp	Y Disp	Z Rotation
1	0	0	-0.0049051
2	0.0226621	2.58799e-006	-0.00378706
3	0.0360072	5.17598e-006	-0.00155099
4	0.0360072	-0.00274033	0.000148424
5	0.0360072	0	0.00095341



EXERCÍCIO TEMÁTICO 2

- Na figura que se apresenta está representa uma estrutura plana contínua, constituída por perfis IPE400 em material S235 com um módulo de elasticidade igual a 2.1×10^{11}. As características geométricas encontram-se em anexo. Determine o valor do deslocamento vertical do ponto B, utilizando o teorema de Castigliano e considerando apenas a contribuição do esforço interno momento flector.

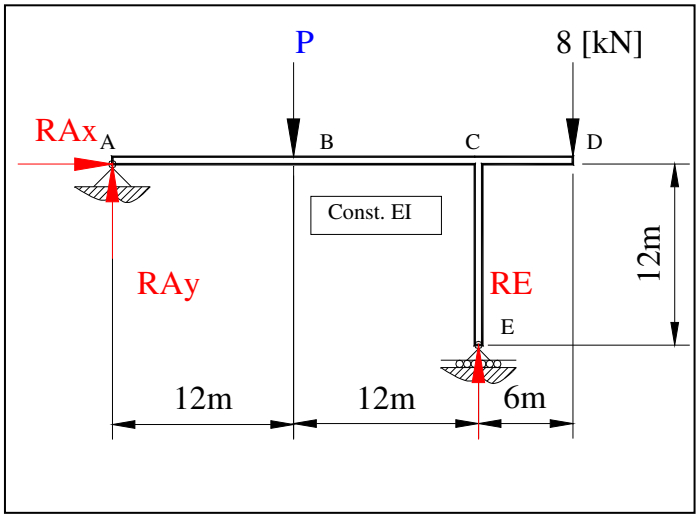


EXERCÍCIO TEMÁTICO 2

- Determinação das reacções:

$$\begin{cases}\sum \vec{F}=\vec{0}\\ \sum \vec{M}=\vec{0}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}RAx=0\\ RAy+RE-P-8000=0\\ -12P+24RE-30*8000=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}RAy=-2000+P/2\\ RE=10000+P/2\\ -\end{cases}$$



- Determinação dos esforços internos:
  - Secção 1: 0<x<12:

$$M=\left(\frac{P}{2}-2000\right)x\Rightarrow\frac{\partial M}{\partial P}\Big|_{P=12000}=\frac{x}{2}$$

  - Secção 2: 12<x<24:

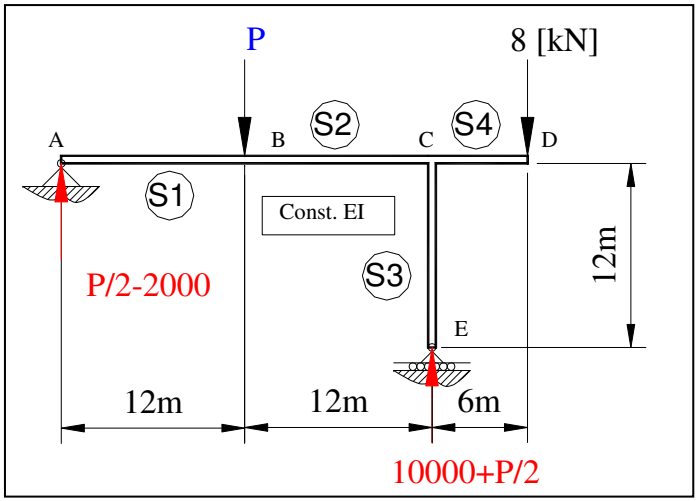
$$M=\left(\frac{P}{2}-2000\right)x-P(x-12)\Rightarrow\frac{\partial M}{\partial P}\Big|_{P=12000}=\frac{x}{2}-x=-\frac{x}{2}$$

  - Secção 3: 0<x<12:

$$M=0\Rightarrow\frac{\partial M}{\partial P}\Big|_{P=12000}=0$$

  - Secção 4: 0<x<6 :

$$M=-8000x\Rightarrow\frac{\partial M}{\partial P}\Big|_{P=12000}=0$$



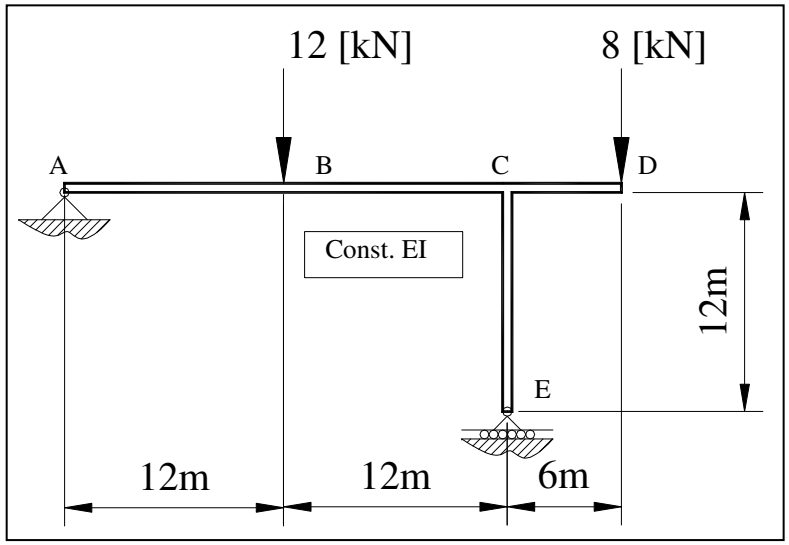
EXERCÍCIO TEMÁTICO 2

- Determinação do deslocamento vertical em B, utilizando o teorema de Castigliano:

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial P}\Big|_P = \int_0^L \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial P}dx \Leftrightarrow$$

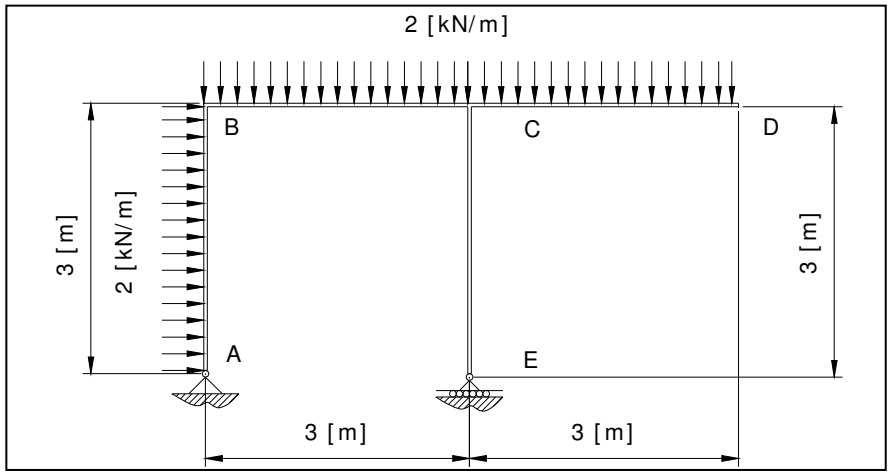
$$\delta = \int_0^{12} \frac{\left[\left(\frac{P}{2} - 2000\right)x\right]\left[\frac{x}{2}\right]}{EI}dx + \int_{12}^{24} \frac{\left[\left(\frac{P}{2} - 2000\right)x - P(x-12)\right]\left[-\frac{x}{2}\right]}{EI}dx \Leftrightarrow$$

$$\delta = 0.0355[m]$$



EXERCÍCIO TEMÁTICO 3

- A figura representa uma estrutura plana contínua, constituída por perfis IPE300 em material S355 com um módulo de elasticidade igual a 2.1×10^{11}[N/m2].
- Determine o valor do deslocamento vertical do ponto D, utilizando o teorema de Castigliano e considerando apenas a contribuição do esforço interno momento flector.

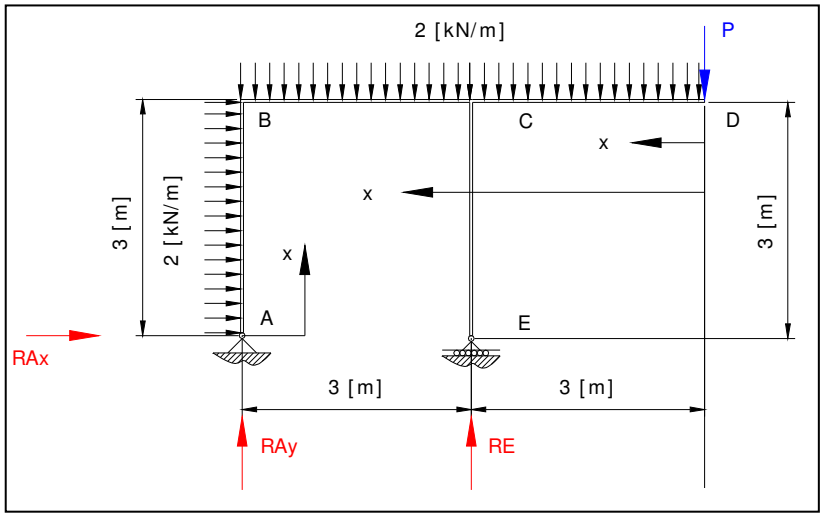


EXERCÍCIO TEMÁTICO 3

- Determinação das reacções, em função da carga fictícia P.

$$\begin{cases} \sum \vec{F} = \vec{0} \\ \sum \vec{M}_A = \vec{0} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} R_{Ax} + 2000 \times 3 = 0 \\ R_{Ay} + R_{Ey} - 2000 \times 6 - P = 0 \\ -(2000 \times 3) \times 1.5 - (2000 \times 6) \times 3 - 6 \times P + 3 \times R_{Ey} = 0 \end{cases}$$



- Determinação dos esforços internos, em função da carga fictícia P.

  - Secção S1: 0<x<3 – troço CD: $M_f = -Px - q\frac{x^2}{2} = -Px - 1000x^2 \Rightarrow \frac{\partial M_f}{\partial P} = -x$

  - Secção S2: 3<x<6 – troço BC: $M_f = -Px - q\frac{x^2}{2} + R_{Ey}(x-3)$

    $M_f = -Px - 1000x^2 + (2P + 15000)(x-3)$

    $\frac{\partial M_f}{\partial P} = +x - 6$

  - Secção S3: 0<x<3 – troço AB: $M_f = 6000 \times x - q\frac{x^2}{2} = 6000x - 1000x^2$ $\quad \frac{\partial M_f}{\partial P} = 0$

EXERCÍCIO TEMÁTICO 3

- Aplicação do teorema de Castigliano:

$$\delta_v = \left.\frac{\partial U}{\partial P}\right|_{P=0} \Leftrightarrow \delta_v = \int_L \left[\frac{M_f \dfrac{\partial M_f}{\partial P}}{EI}\right]_{P=0} dL$$

$$\delta_v = \delta_{v1} + \delta_{v2} + \delta_{v3} = 0.001534 \quad [m]$$

$$\delta_{v1} = \frac{1000}{EI}\int_0^3 x^3 dx = 1.15\times10^{-3}$$

$$\delta_{v2} = \frac{1}{EI}\int_3^6 \left[-1000x^2 + 15000(x-3)\right][x-6]dx$$

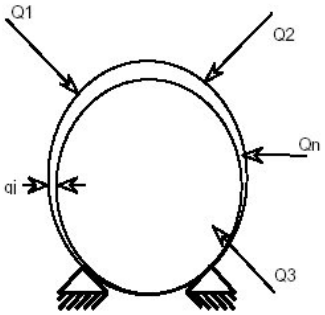
$$\delta_{v2} = 0.0003846$$

$$\delta_{v3} = 0$$

PRINCÍPIO DO TRABALHO VIRTUAL

- Num sistema isolado em que não se verifique a variação de outras formas de energia (térmica, cinética,...) existe uma igualdade entre o trabalho de deformação realizado pelas forças exteriormente aplicadas numa estrutura e a variação de energia elástica que esta estrutura sofre.
- Um trabalho elementar realizado pelas forças exteriores, δWe, provocará uma variação elementar de energia interna elástica, δU.

$$\delta W_E = \delta U \quad \Leftrightarrow \quad \{F\}^T \{\delta D\} = \int_V \{\sigma\}^T \{\delta\varepsilon\} dV$$



$$\delta W_E = \sum_i Q_i \ \delta q_i$$

$$\delta U = \int \langle \sigma \rangle \{\delta\varepsilon\} dV$$

$$\sum_i Q_i \ \delta q_i = \int \sigma_{ij} \ \delta\varepsilon_{ij} \ dV$$

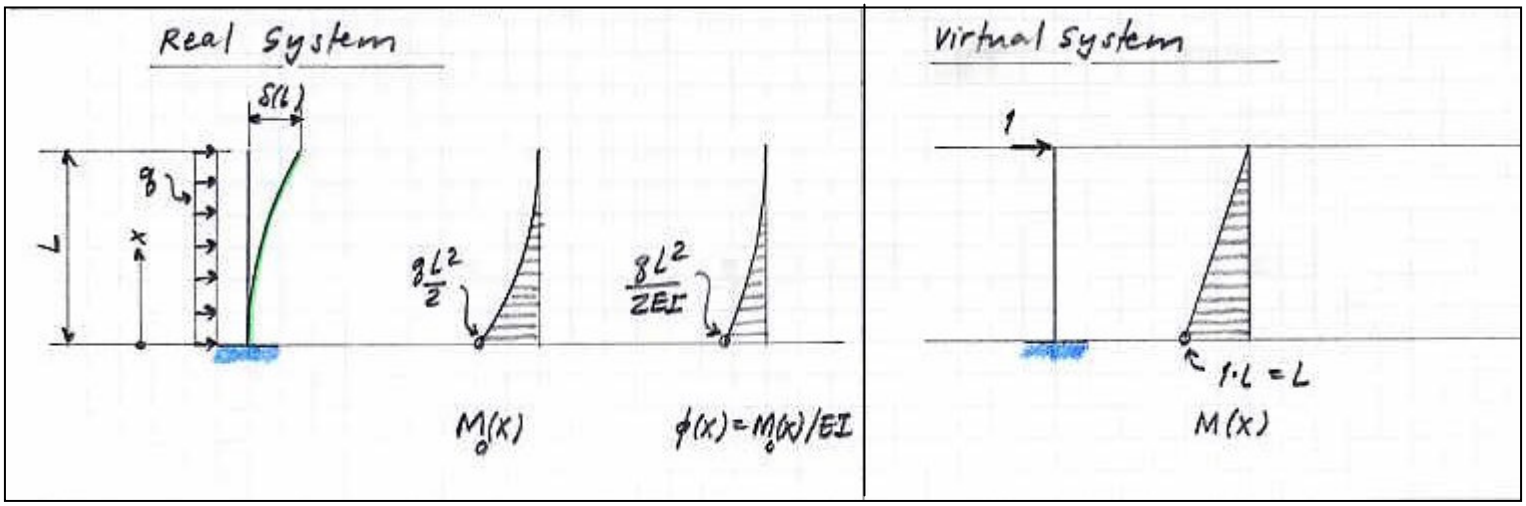
Trabalho das forças reais — Deslocamentos virtuais

Energia das tensões reais — Deformações virtuais

- Aplicações:
  - Calcular deslocamentos: TFU
  - Calcular forças: TDU

TFU – TEOREMA DA FORÇA VIRTUAL UNITÁRIA

- Admita dois sistemas de forças em equilíbrio, aplicados ao mesmo sistema material.



  - 1º Sistema = real: $\{F\} \Rightarrow \{D\}, \{\sigma\}, \{\varepsilon\}$

  - 2º Sistema= virtual: $\{F_u\} \Rightarrow \{D_u\}, \{\sigma_u\}, \{\varepsilon_u\}$

- A aplicação da condição de equilíbrio ao 2º sistema, no âmbito do PTV, permite a utilização do campo de deslocamentos arbitrário (campo gerado pelo 1º sistema).

$$\{F_u\}^T\{D\} = \int_V \{\sigma_u\}^T\{\varepsilon\}dV \longrightarrow \langle 1\rangle\{D\} = \int_V \{\sigma_u\}^T\{\varepsilon\}dV$$

- A escolha de um 2º sistema adequado permite determinar o deslocamento em qualquer ponto da estrutura, em qualquer direcção.

TFU – TEOREMA DA FORÇA VIRTUAL UNITÁRIA

- Impondo no sistema um campo de força generalizada virtual, possibilita a determinação de um deslocamento generalizado na mesma direcção.

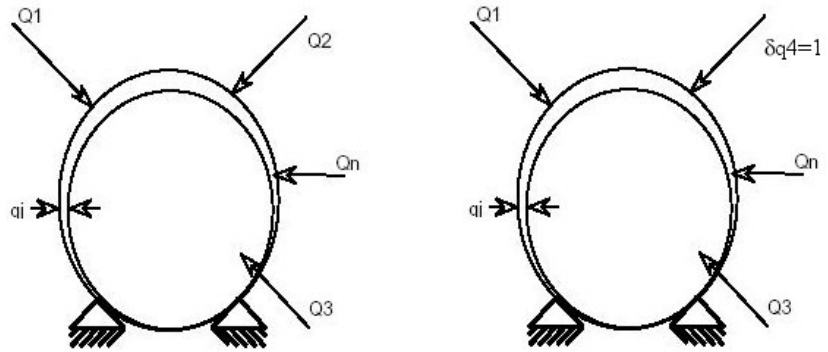
$$\langle 1 \rangle \{D\} = \int_V \{\sigma_u\}^T \{\varepsilon\} dV$$

ESFORÇO	TENSÃO VIRTUAL	DEFORMAÇÃO REAL
Normal	$\sigma^* = N^* / A$	$\varepsilon = N / EA$
Flector	$\sigma^* = M^* y / I_{zz}$	$\varepsilon = My / EI_{zz}$
Transverso	$\tau^* \approx V / Ar$	$\gamma \approx V / GAr$
Torsor	$\tau^* = Mt^* r / I_p$	$\gamma = Mt\, r / GI_p$
Aquecimento uniforme	$\sigma^* = N^* / A$	$\varepsilon = \alpha\, \Delta T$
Aquecimento diferencial	$\sigma^* = N^* / A + M^* y / I_{zz}$	$\varepsilon = \alpha/2\,(\Delta T_i - \Delta T_s) + \alpha/h\,(\Delta T_i - \Delta T_s) y$

$$1 \times d = \int_L \frac{NN^*}{EA} dx + \int_L \frac{MM^*}{EI} dx + \int_L \frac{VV^*}{GAr} dx + \int_L \frac{Mt\, Mt^*}{GI_p} dx + \int_L N^* \alpha \Delta T dx + \int_L N^* \frac{\alpha}{2} (\Delta T_i - \Delta T_s) dx + \frac{M^* \alpha}{I_{zz} h} (\Delta T_i - \Delta T_s) dx$$

TDU – TEOREMA DO DESLOCAMENTRO VIRTUAL UNITÁRIO

- Admita dois sistemas de forças em equilíbrio, aplicados ao mesmo sistema material.

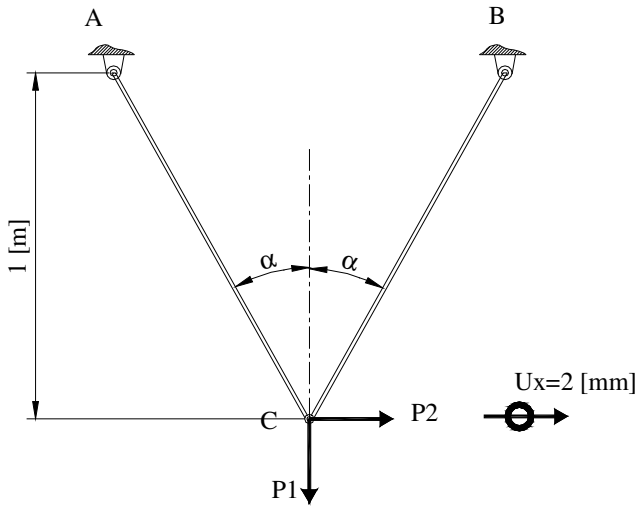


- A aplicação deste teorema permite determinar as forças necessárias para manter o equilíbrio do sistema real, numa determinada posição de equilíbrio, conhecidas as tensões reais instaladas.

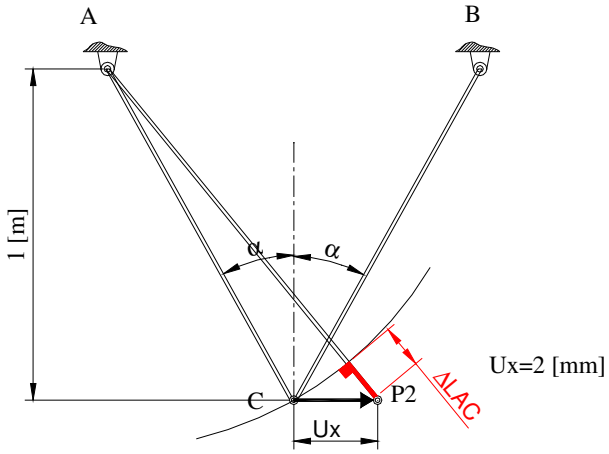
$$\{F\}^T\{D_u\} = \int_V \{\sigma\}^T\{\varepsilon_u\}dV \longrightarrow \langle F\rangle\{1\} = \int_V \{\sigma\}^T\{\varepsilon_u\}dV$$

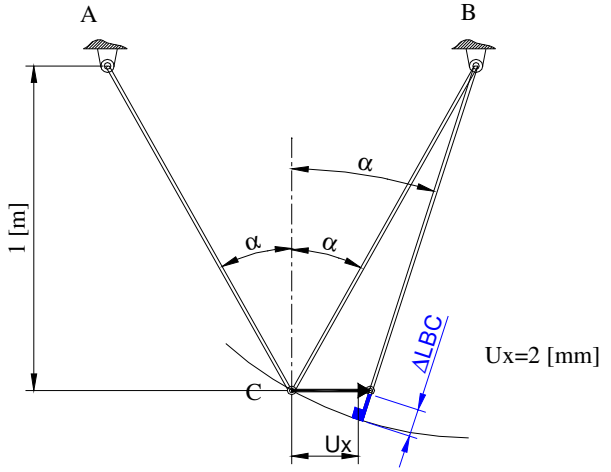
EXERCÍCIO TEMÁTICO TDU

- Determine as forças P1 e P2 da estrutura articulada apresentada, sabendo que na situação de equilíbrio resulta um deslocamento horizontal Ux=2 [mm], para α=30º. Considere ainda E=200 [GPa] e o diâmetro da barra igual a 10 [mm].



- Determinar as tensões reais instaladas.





$$\varepsilon_{AC} = \frac{\Delta L_{AC}}{L_{AC}} = \frac{Ux.\cos(60)}{\frac{1}{\cos(30)}} = Ux.\frac{\sqrt{3}}{4} \qquad \sigma_{AC} = E\varepsilon_{AC} = EUx.\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\varepsilon_{BC} = \frac{\Delta L_{BC}}{L_{BC}} = \frac{-Ux.\sin(30)}{\frac{1}{\cos(30)}} = -Ux.\frac{\sqrt{3}}{4} \qquad \sigma_{BC} = E\varepsilon_{BC} = -EUx.\frac{\sqrt{3}}{4}$$

EXERCÍCIO TEMÁTICO TDU

- Considerando o sistema virtual de deslocamento, determina-se o campo de deformações virtual associado.

$$\varepsilon^*_{AC} = \frac{\Delta L_{AC}}{L_{AC}} = \frac{1.\cos(60)}{\frac{1}{\cos(30)}} = 1.\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\varepsilon^*_{C} = \frac{\Delta L_{C}}{L_{C}} = \frac{-1.\sin(30)}{\frac{1}{\cos(30)}} = -1.\frac{\sqrt{3}}{4}$$

- Por aplicação do teorema TDU:

$$F\ d^* = \int_v \langle\sigma\rangle\{\varepsilon^*\}dv \Leftrightarrow F.1 = \int_L A\langle\sigma_{AC}\rangle\{\varepsilon^*_{AC}\}dx + \int_L A\langle\sigma_{BC}\rangle\{\varepsilon^*_{BC}\}dx$$

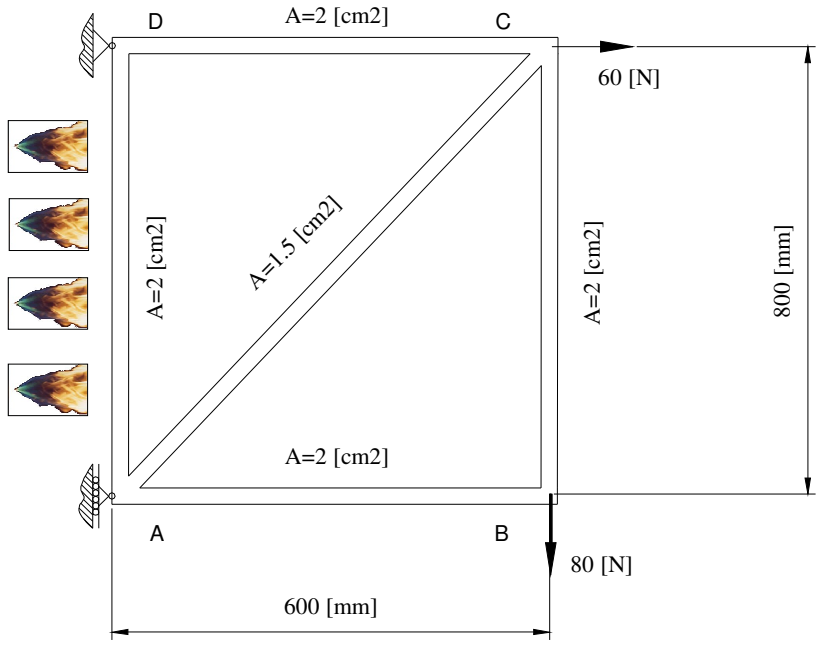
$$P2 = EUx\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\left(A\frac{2}{\sqrt{3}}\right) + (-EUx)\frac{\sqrt{3}}{4}\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\left(A\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

$$P2 = EUxA\frac{12}{16\sqrt{3}}$$

$$P2 = 13{,}6\ [kN]$$

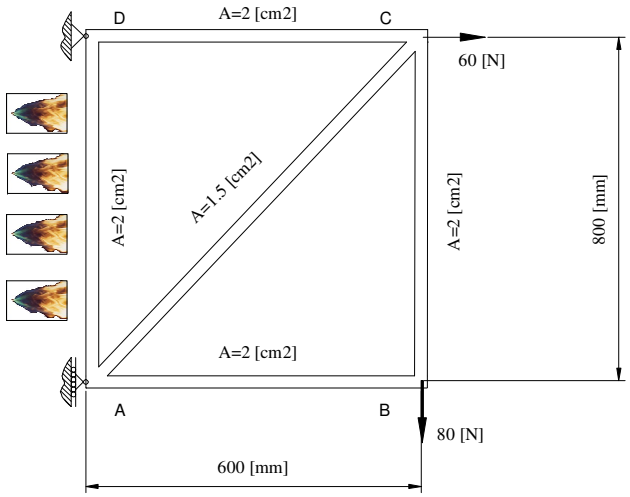
EXERCÍCIO TEMÁTICO TFU

- Determine o deslocamento vertical em C, durante um aquecimento da barra AD, sujeita a uma variação de temperatura de 120 (ºC). O coeficiente de expansão térmica é de 0,6x10-5 ($ºC^{-1}$) e E=29000 (KN/m^2).

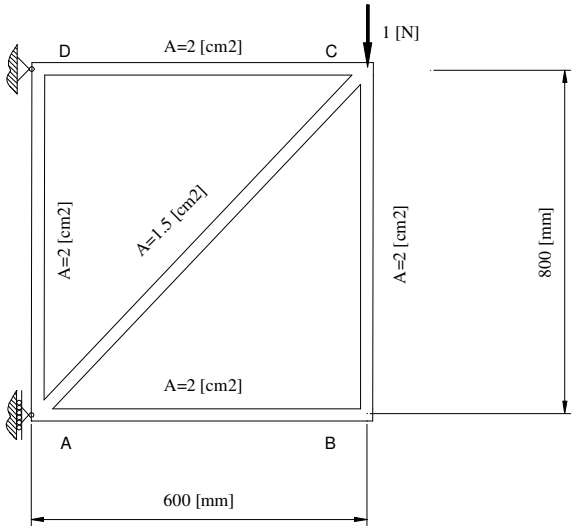


EXERCÍCIO TEMÁTICO TFU

- A aplicação do teorema da carga unitária implica a escolha de um sistema auxiliar

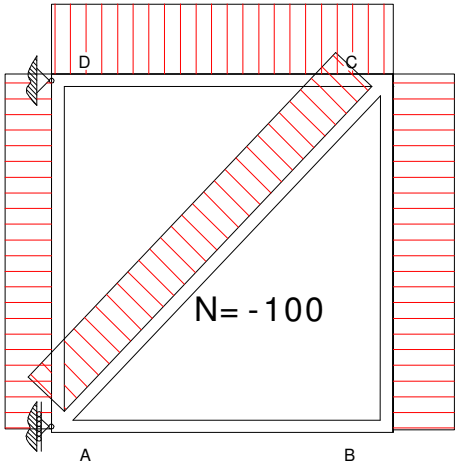


N= 120



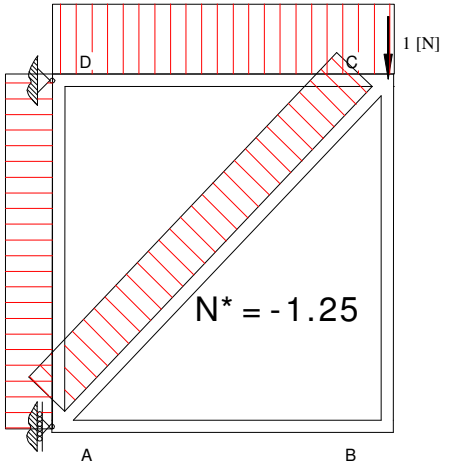
N* = 0.75

N= 80



N= 80

N* = 1



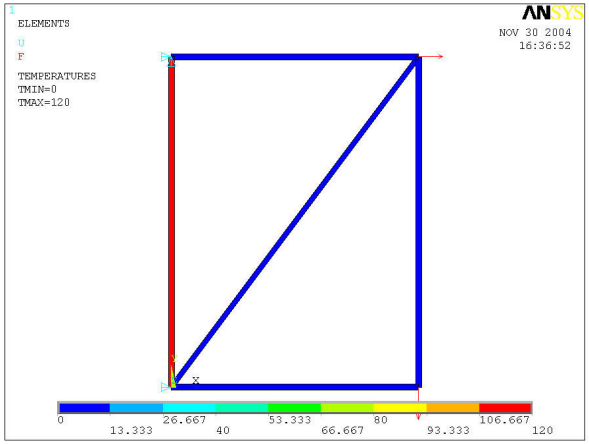
EXERCÍCIO TEMÁTICO TFU

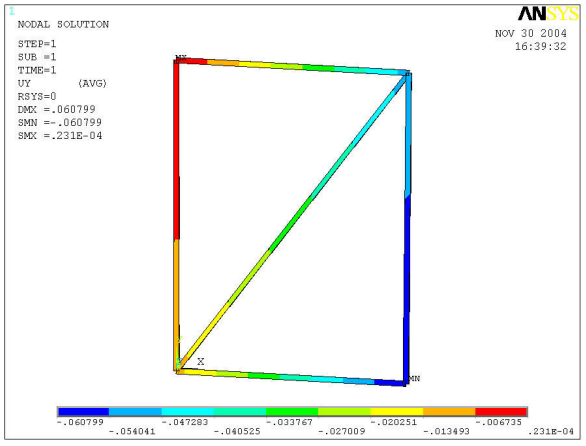
- A aplicação do teorema da carga unitária implica:

$$\langle 1 \rangle \{D\} = \int_V \{\sigma_u\}^T \{\varepsilon\} dV \quad \Leftrightarrow \quad 1 \times d = \int_L \frac{NN^*}{EA} dx + \int_L N^* \alpha \Delta T dx$$

$$\begin{aligned}
1.d_C &= \int_{vol} \langle \sigma \rangle \{\varepsilon\} dV \\
&= \int_{LAC} \frac{N_{AC} N_{AC}^*}{EA_{AC}} dx + \int_{LAD} \frac{N_{AD} N_{AD}^*}{EA_{AD}} dx + \int_{LDC} \frac{N_{DC} N_{DC}^*}{EA_{DC}} dx + \int_{LAD} N_{AD}^* \, \alpha \, \Delta T dx \\
&= \frac{1}{EA_{AC}} [(-100)(-1.25)1] + \frac{1}{EA_{AD}} [(80)(1)0.8] + \frac{1}{EA_{DC}} [(120)(0.75)0.6] + 1 \times \alpha \times 120 \times 0.8 \\
&= 0.04908 + 0.000576 \\
&= 0.049656 \, [m]
\end{aligned}$$

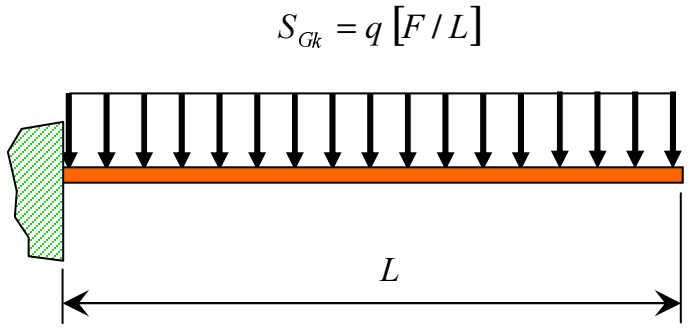
- Comparação numérica com programa ANSYS, elemento de barra LINK :
  - Carregamento térmico.
  - Deslocaqmento vertical





EXERCÍCIO TEMÁTICO TFU

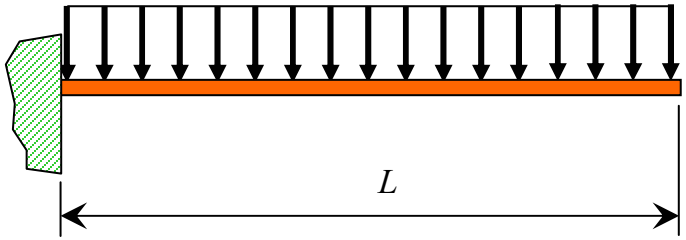
- Para o elemento estrutural representado na figura, com as características físicas E, I, G, Ar, determine o valor do deslocamento vertical do extremo da viga em consola, sob a acção de um carregamento uniformemente distribuído.



EXERCÍCIO TEMÁTICO TFU

- Sistema real vs Sistema virtual:

$S_{Gk} = q\ [F/L]$



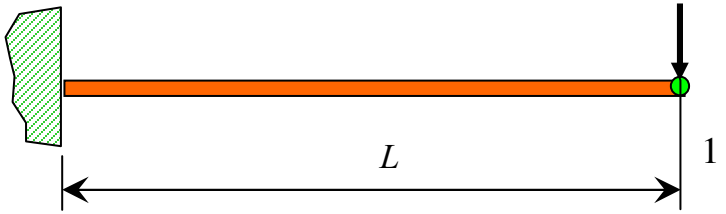
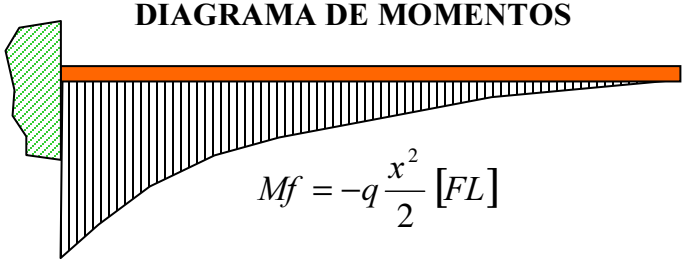
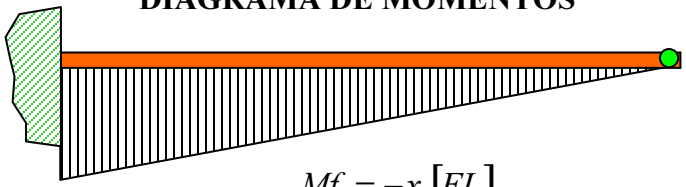


DIAGRAMA DE MOMENTOS



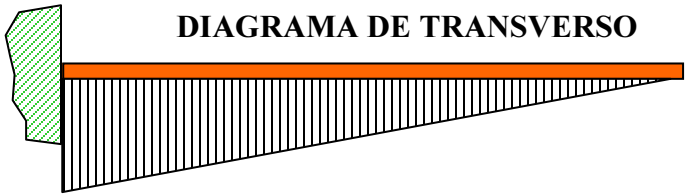
$Mf = -q\frac{x^2}{2}\ [FL]$

DIAGRAMA DE MOMENTOS



$Mf = -x\ [FL]$

DIAGRAMA DE TRANSVERSO



$V = -qx\ [F]$

DIAGRAMA DE TRANSVERSO

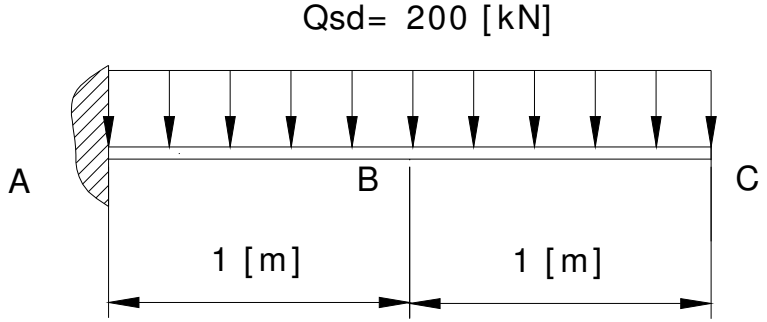
$V = -1\ [F]$

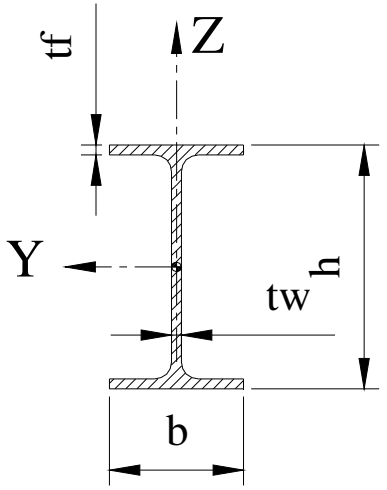
- Aplicação do TFU:

$$\langle 1 \rangle \{D\} = \int_V \{\sigma_u\}^T \{\varepsilon\} dV \quad \Leftrightarrow \quad 1 \times d = \int_L \frac{MM^*}{EI} dx + \int_L \frac{VV^*}{GAr} dx \quad \Leftrightarrow \quad d = \frac{qL^4}{8EI} + \frac{qL^2}{2GA_R}$$

EXERCÍCIO EXAME 2005 (1ª CHAMADA)

- Utilizando o teorema da carga virtual unitária, determine o deslocamento vertical dos pontos B e C, representados na figura, sabendo que se trata de uma viga IPE 300 em aço S235, com as seguintes propriedades de material e de geometria, E=200 [GPa], I=500x106 [mm^4].
  - Note: Considere apenas a contribuição do esforço interno momento flector.

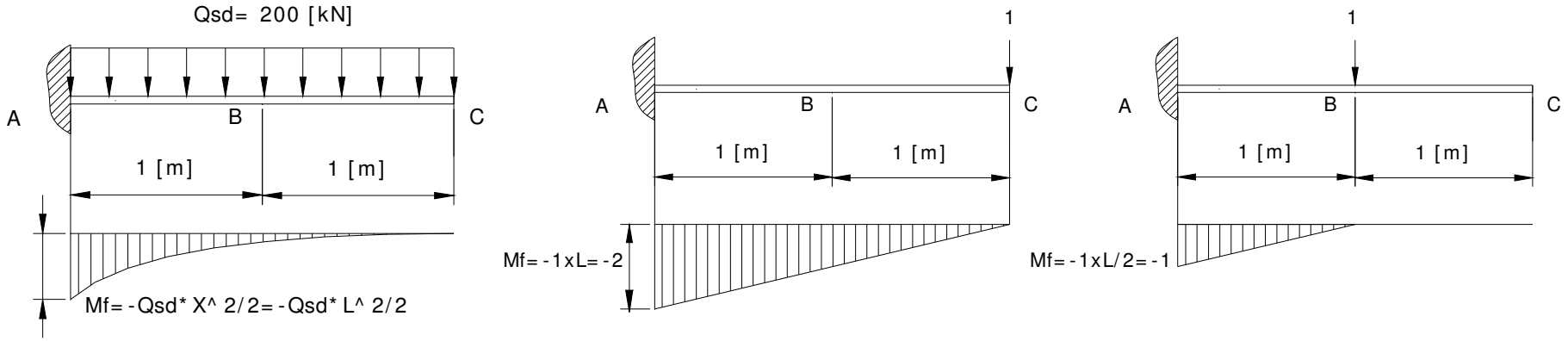




IPE 300

EXERCÍCIO EXAME 2005 (1ª CHAMADA)

- Sistema real vs Sistemas virtuais:



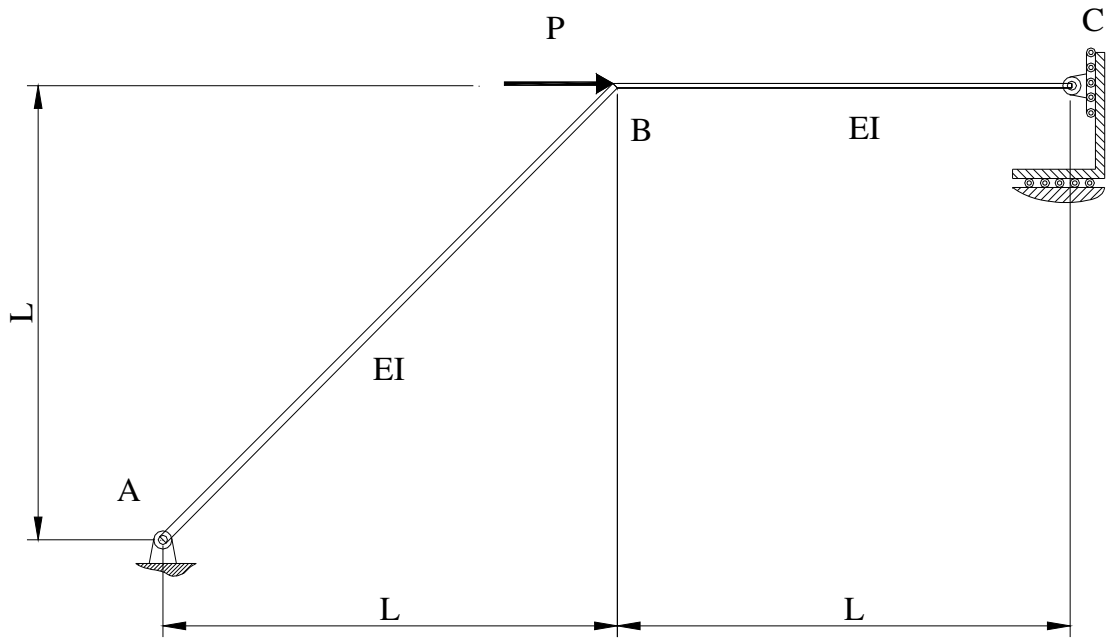
- Aplicação do TFU:

$$1 \times d_C = \int_L \frac{MM^*}{EI} dx = \int_0^L \frac{\left(-Q_{sd} x^2 / 2\right)(-x)}{EI} dx = \frac{2Q_{sd}}{EI} = 0.004\,[m]$$

$$1 \times d_B = \int_L \frac{MM^*}{EI} dx = \int_{L/2}^L \frac{\left(-Q_{sd} x^2 / 2\right)(1-x)}{EI} dx = \frac{17Q_{sd}}{24\,EI} = 0.0014\,[m]$$

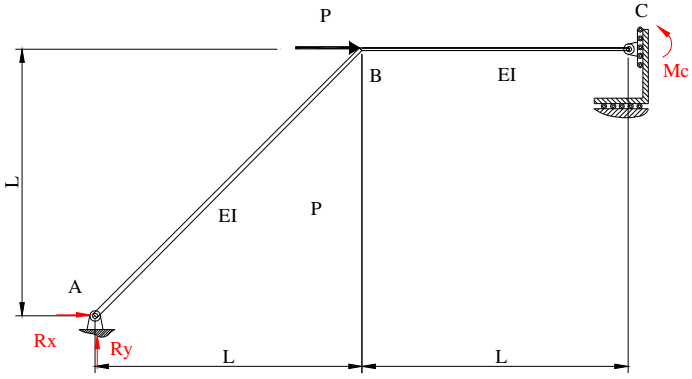
EXERCÍCIO TFU COM APLICAÇÃO MAPLE

- Para a estrutura apresentada na figura seguinte, determine o deslocamento transversal em C utilizando o teorema da carga unitária. Considere ainda as propriedades do material e da secção com valores genéricos: E, I, N, Ar, A.

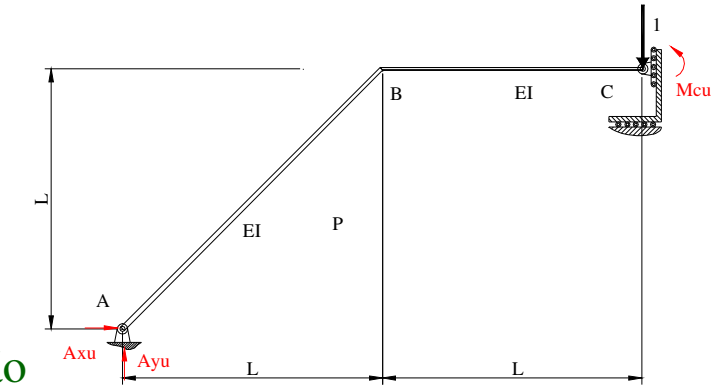


EXERCÍCIO TFU COM APLICAÇÃO MAPLE

- Caracterização dos esforços internos no sistema real:
  - `solve({RX+F=0, RY=0, F*L+MC=0}, {RX,RY,MC});`
  - `MAB:=F*sqrt(2)/2*x;`
  - `VAB:=-F*sqrt(2)/2;`
  - `MBC:=F*L;`
  - `VBC:=0;`
  - `E:=E;`
  - `IZZ:=IZZ;`



- caracterização do sistema virtual de carga unitária:
  - `solve({AXU=0, AYU=1, -1*2*L+MCU=0},{AXU,AYU,MCU});`
  - `MABU:=sqrt(2)/2*x;`
  - `VABU:=-1*sqrt(2)/2;`
  - `MBCU:=1*x+L;`
  - `VBCU:=-1;`



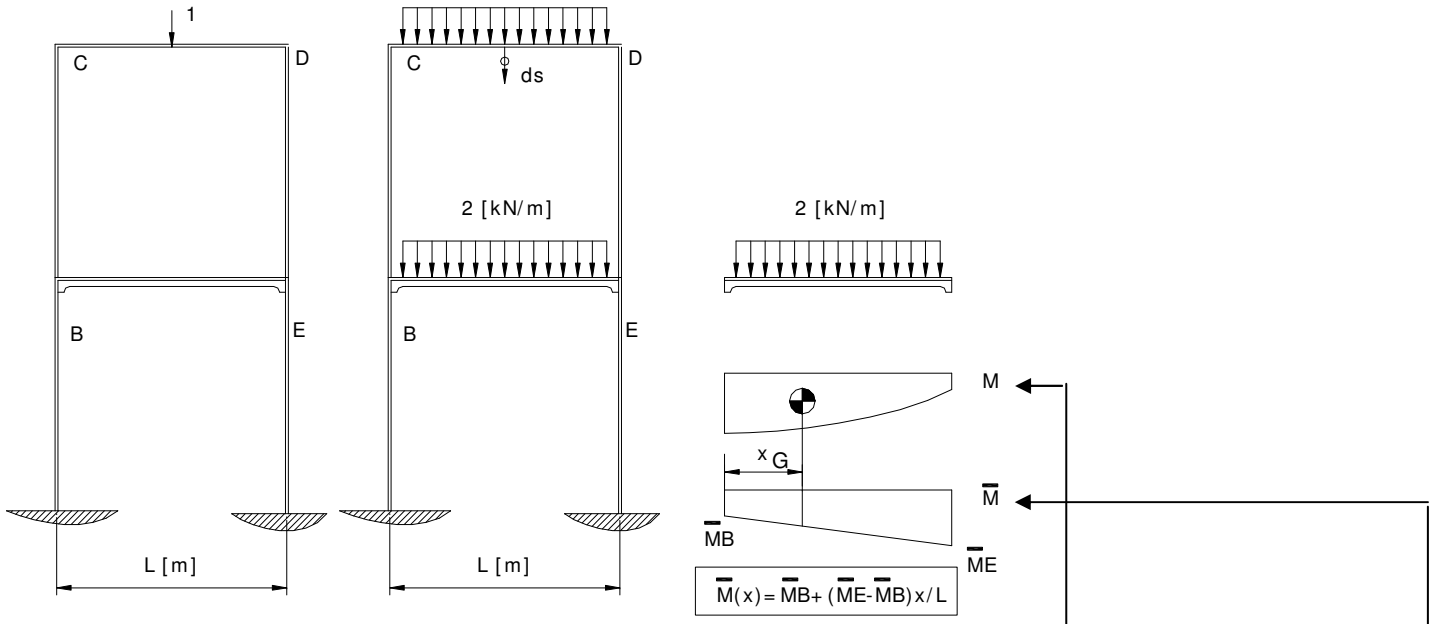
- Aplicando TFU, considerando apenas os esforços de flexão

```
PTVD:=int( MAB*MABU/E/IZZ, x=0..sqrt(2)*L )+int( MBC*MBCU/E/IZZ, x=0..L );
solve({1*YB=PTVD}, {YB});
```

$$\left\{ YB = \frac{F L^3 (2\sqrt{2}+9)}{6 E IZZ} \right\}$$

MÉTODO DE BONFIM BARREIROS

- Âmbito: Necessidade de resolução de integrais do tipo que resulta da aplicação do TFU.
- Característica do método: Uma das funções integrandas deverá ser linear em relação ao comprimento do elemento $f_2(x)=ax+b$.



$$ds = \int \frac{N\bar{N}}{EA} dl + \int \frac{M\bar{M}}{EI} + \ldots \quad \Rightarrow \quad ds = \int f_1(ax+b)dx + \ldots \quad \Rightarrow$$

$$= \int f_1 ax\, dx + \int f_1 b\, dx$$

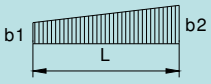
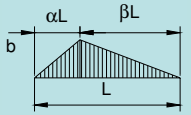
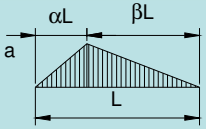
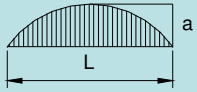
$$ds = a\int f_1 x\, dx + b\int f_1\, dx$$

$$= a\,\Omega X_G + b\,\Omega$$

$$= \Omega \boxed{f_2(aX_G + b)}$$

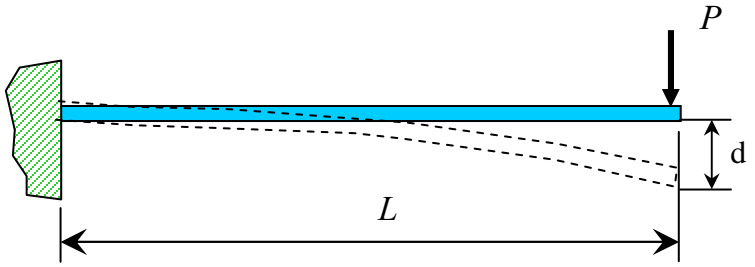
MÉTODO DE BONFIM BARREIROS (MOHR)

- Tabelas de auxílio para aplicação do método.

M_u / M					
	abL	$1/2\,abL$	$1/2\,abL$	$aL/2\,(b1+b2)$	$1/2\,abL$
	$bL/2\,(a1+a2)$	$bL/6\,(a1+2a2)$	$bL/6\,(2a1+a2)$	$L/6\,(2a1b1+a1b2)+$ $L/6\,(2a2b2+a2b1)$	$bL/6\left[\begin{matrix}(1+\beta)a1+\\(1+\alpha)a2\end{matrix}\right]$
	$1/2\,abL$	$abL/6\,(1+\alpha)$	$abL/6\,(1+\beta)$	$aL/6\left[\begin{matrix}(1+\beta)b1+\\(1+\alpha)b2\end{matrix}\right]$	$1/3\,abL$
	$2/3\,abL$	$1/3\,abL$	$1/3\,abL$	$aL/3\,(b1+b2)$	$abL/3\,(1+\alpha\beta)$
	$1/3\,abL$	$1/4\,abL$	$1/12\,abL$	$aL/12\,(b1+3b2)$	$abL/12\,(1+\alpha+\alpha^2)$
	$2/3\,abL$	$5/12\,abL$	$1/4\,abL$	$aL/12\,(3b1+5b2)$	$abL/12\,(5-\beta-\beta^2)$

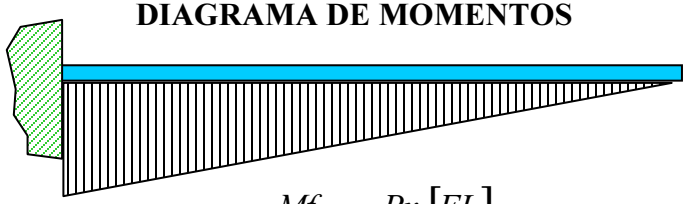
EXERCÍCIO TEMÁTICO 1

- Determine o deslocamento vertical da extremidade da viga representada, considerando apenas o efeito do esforço flector.



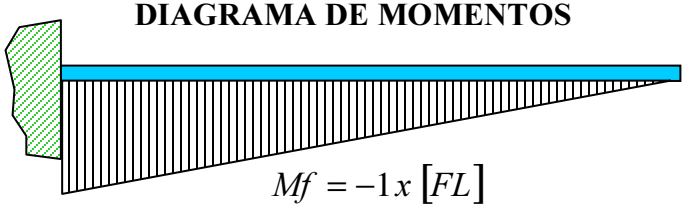
- Sistema real vs Sistema virtual:

DIAGRAMA DE MOMENTOS



$Mf = -Px\ [FL]$

DIAGRAMA DE MOMENTOS

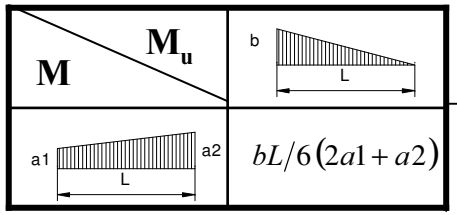


$Mf = -1x\ [FL]$

- Aplicação do TFU:

$$\langle 1 \rangle \{D\} = \int_V \{\sigma_u\}^T \{\varepsilon\} dV \quad \Leftrightarrow \quad 1 \times d = \int_L \frac{MM^*}{EI} dx \quad \Leftrightarrow \quad d = \frac{1}{EI} \frac{PL^3}{3}$$

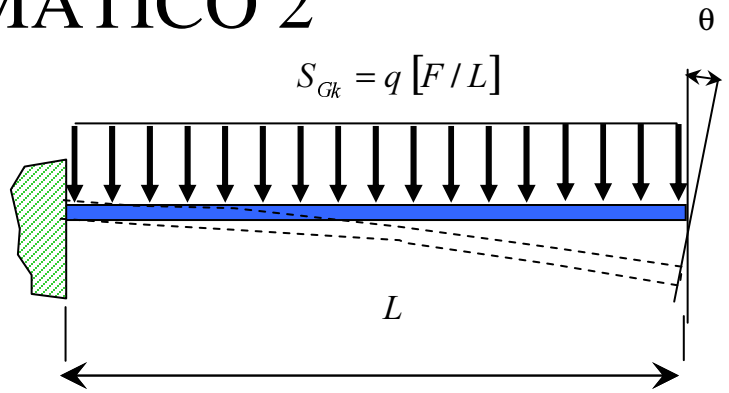
- Aplicação do método Bonfim Barreiros:



L=L; a1=-PL; a2=0; b=-L

EXERCÍCIO TEMÁTICO 2

- Determine a rotação da secção da extremidade livre da viga, para o caso representado na figura, considerando apenas o efeito do esforço flector.



- Sistema real vs Sistema virtual:

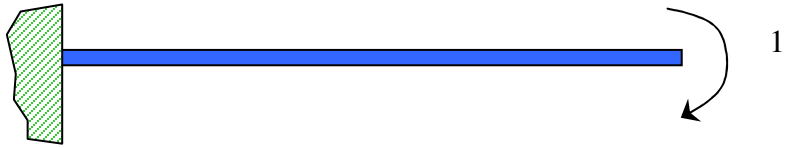
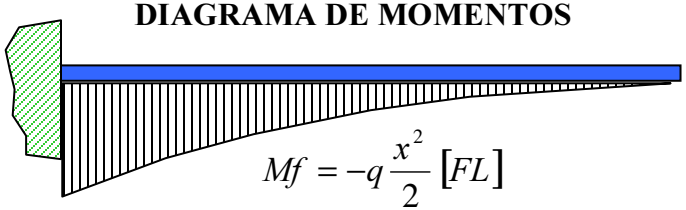
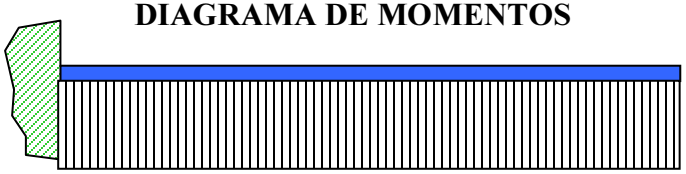


DIAGRAMA DE MOMENTOS



$$Mf = -q\frac{x^2}{2}\ [FL]$$

DIAGRAMA DE MOMENTOS

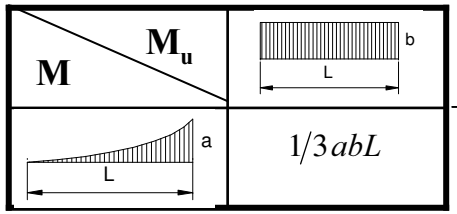


$$Mf = -1\ [FL]$$

- Aplicação do TFU:

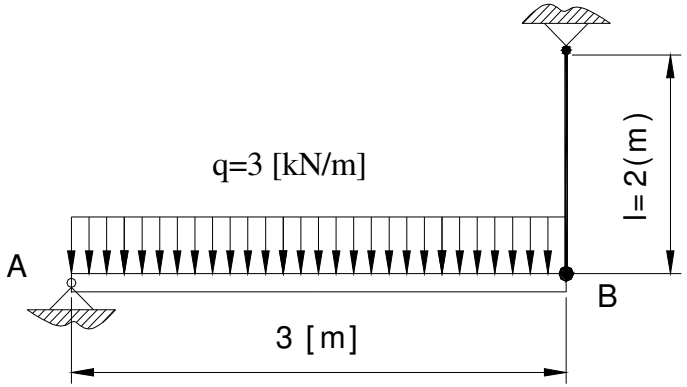
$$\langle 1 \rangle \{D\} = \int_V \{\sigma_u\}^T \{\varepsilon\} dV \quad \Leftrightarrow \quad 1 \times \theta = \int_L \frac{MM^*}{EI} dx \quad \Leftrightarrow \quad \theta = \frac{1}{EI}\frac{1}{3}\frac{-qL^2}{2}(-1)L = \frac{qL^3}{6EI}$$

- Aplicação do método Bonfim Barreiros:

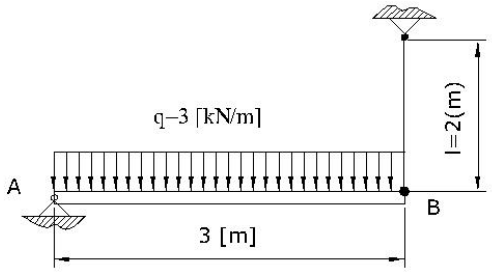


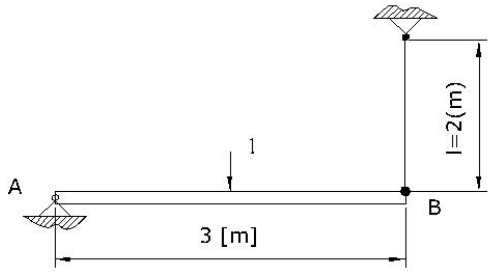
EXERCÍCIO DE APLICAÇÃO

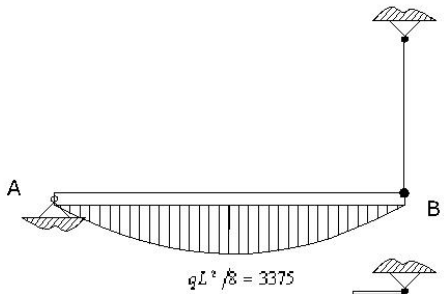
- Determine a flecha a meio vão da viga AB, solicitada com um carregamento distribuído CB representa um cabo em aço com 20 [mm] de diâmetro. E=200GPa, I=1,71x10^{6}mm4

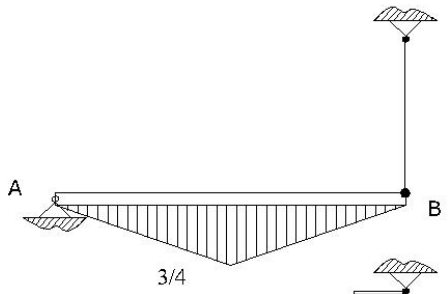


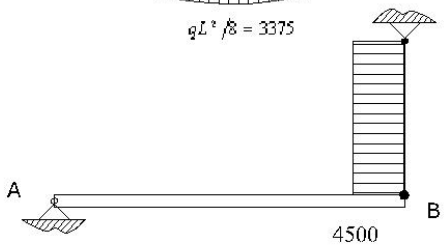
- Sistema real vs Sistema virtual:

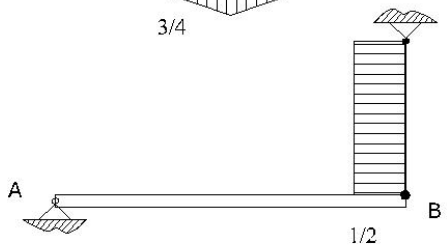












EXERCÍCIO DE APLICAÇÃO

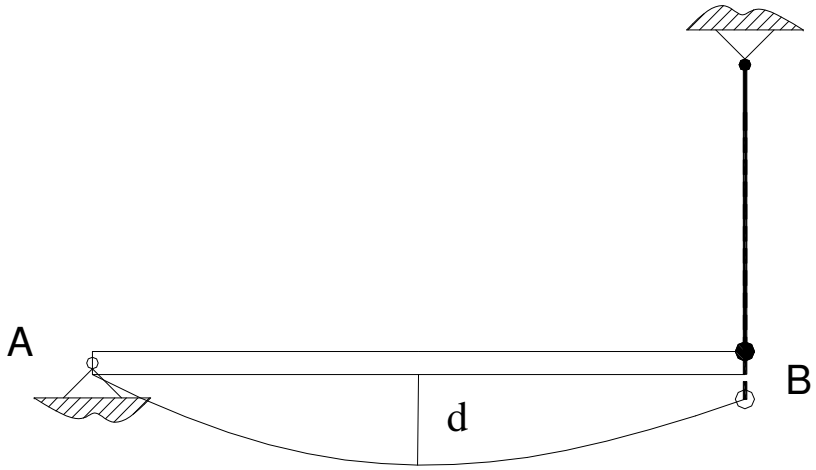
- Aplicação do TFU:

$$\langle 1 \rangle \{D\} = \int_V \{\sigma_u\}^T \{\varepsilon\} dV \quad \Leftrightarrow \quad 1 \times d = \int_L \frac{MM^*}{EI} dx + \int_L \frac{NN^*}{EA} dx$$

- Aplicação do método Bonfim Barreiros:

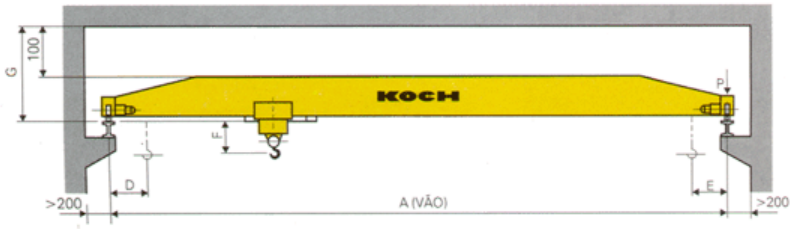
$$d = 2 \times \left[\frac{1}{EI} \left(\frac{5}{12} 3375 \frac{3}{4} 3 \right) \right] + \frac{1}{EA} \left[4500 \frac{1}{2} 3 \right]$$

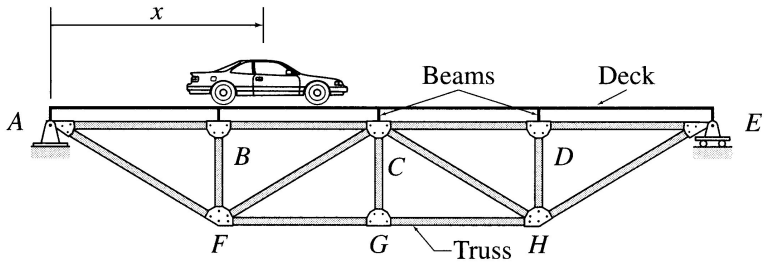
$$d = 1.85 \times 10^{-2} + 1.074 \times 10^{-4} = 0.01868 \, [m]$$

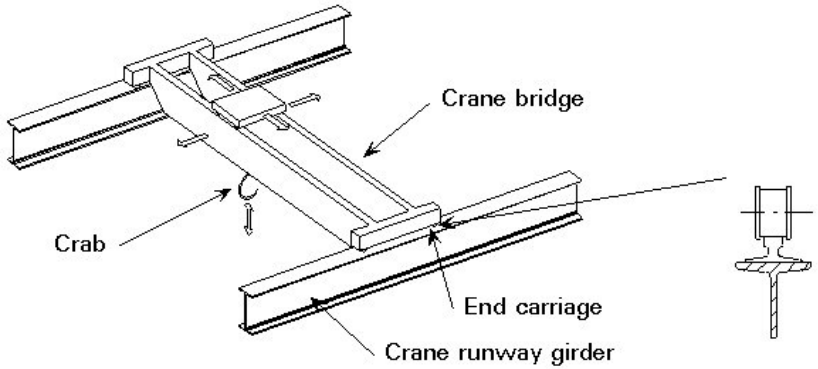


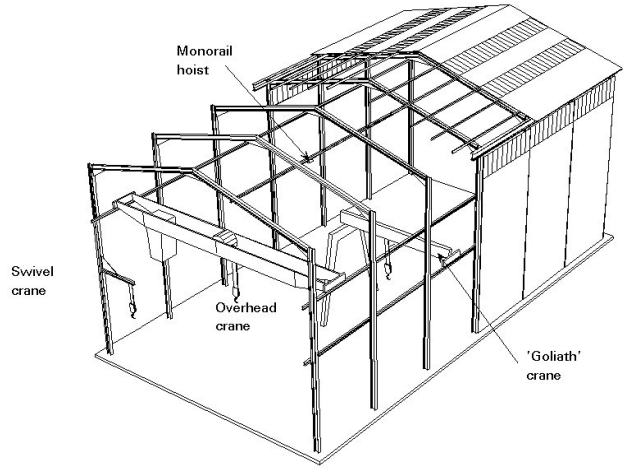
LINHAS DE INFLUÊNCIA

- Âmbito:
  - O cálculo de estruturas sob acção de cargas móveis é consideravelmente simplificado pela utilização do conceito de linhas de influência.
- Definição:
  - Gráfico que exprime a variação de um factor (M, V, reacção,…) quando uma carga unitária se desloca ao longo de uma estrutura ou elemento da mesma.
  - Linha de Influência representa a variação de um dado factor, para uma secção fixa.



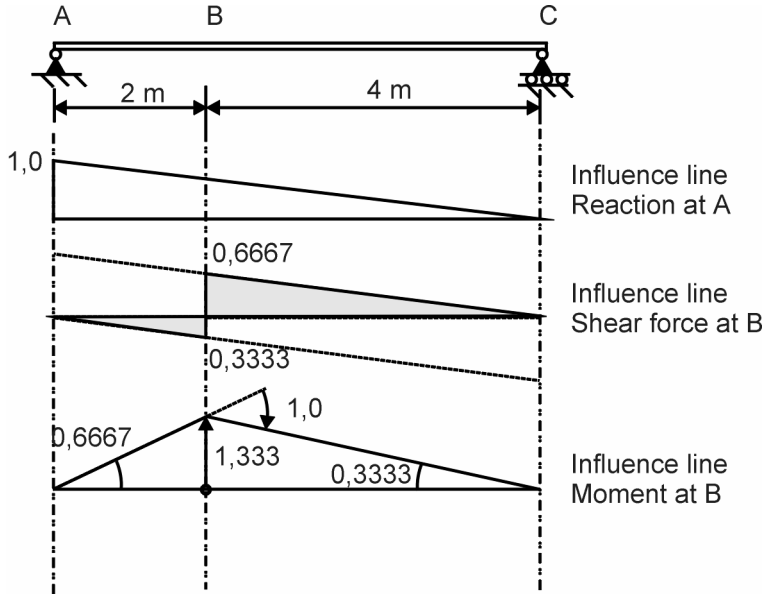


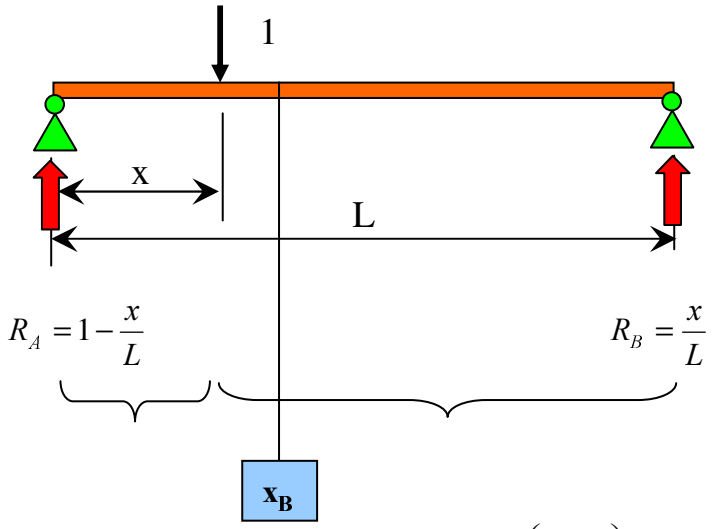




DETERMINAÇÃO DAS LINHAS DE INFLUÊNCIA

- Determine as linas de influência para o valor da reacção em A, para o valor do esforço de corte em B e para o momento em B.





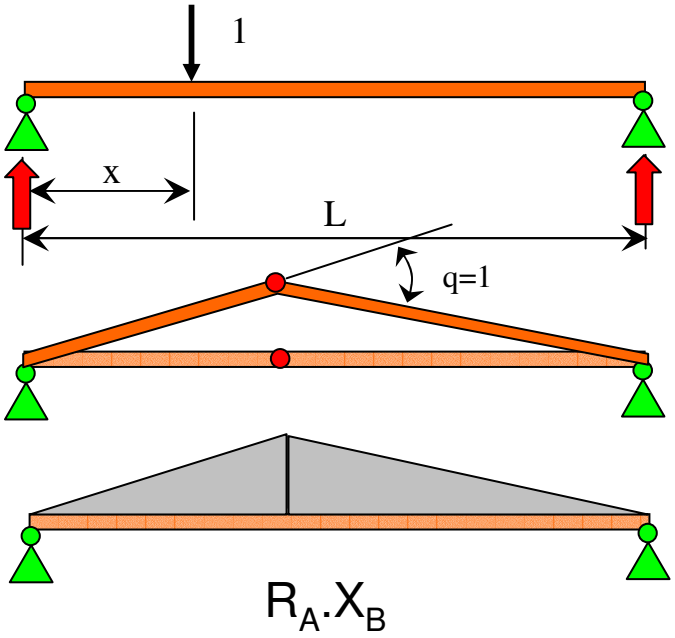
$$V_B = 1 - \left(1 - \frac{x}{L}\right) \qquad V_B = -\left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

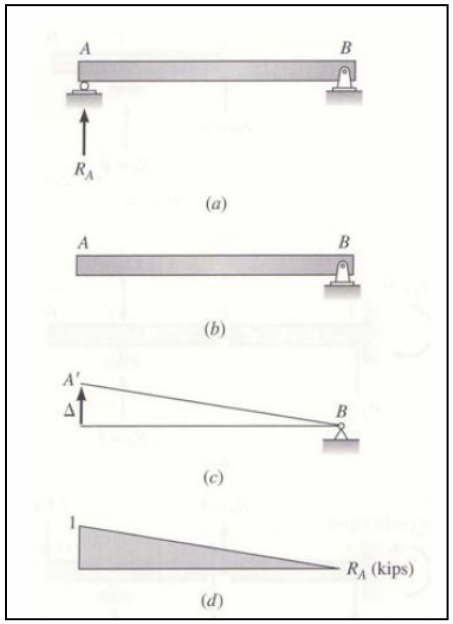
$$M_B = \left(1 - \frac{x}{L}\right) \times 2 - 1(2 - x) \qquad M_B = \left(1 - \frac{x}{L}\right) \times 2$$

$$= x\left(1 - \frac{2}{L}\right)$$

PRINCÍPIO DE MULLER-BRESLAU

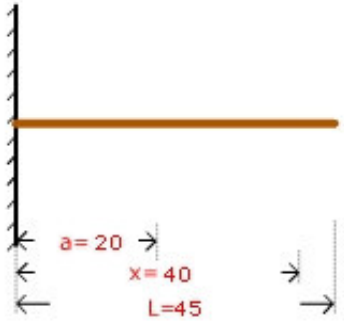
- Princípio:
  - As ordenadas da linha de influência para qualquer "componente" são proporcionais à forma deformada da estrutura ou elemento, produzida pela remoção da capacidade da estrutura ou elemento para suportar essa "componente", aplicando uma componente positiva correspondente à restrição removida que induz a deformação da estrutura.
- Exemplo:
  - Para determinar a linha de influência correspondente ao momento num local particular de uma viga, introduzir uma rótula artificial nesse local, aplicando a componente retirada, e observando a deformada da mesma.



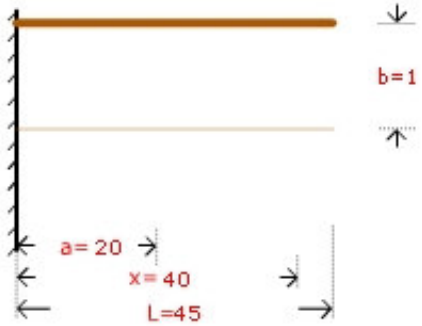


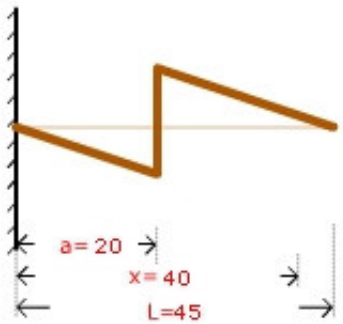
EXERCÍCIO TEMÁTICO 1

- Determine a altura da linha de influência a 40 feet da reacção esquerda, para o valor do esforço de corte localizado a 20 feet do mesmo local.



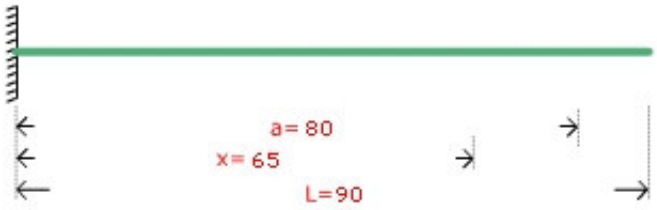
- Resolução:
  - Introdução de uma deformação de corte a 20 feet do apoio esquerdo. Depois de deformada, o apoio esquerdo sobe 1 unidade, de tal forma que a viga já não é compatível com o apoio.
  - A viga deve ser recolocada até atingir o apoio direito, rolando a extremidade direita em torno do apoio esquerdo de 1 unidade.
  - A parte esquerda de "a" deverá rolar 1*20/45 unidade.



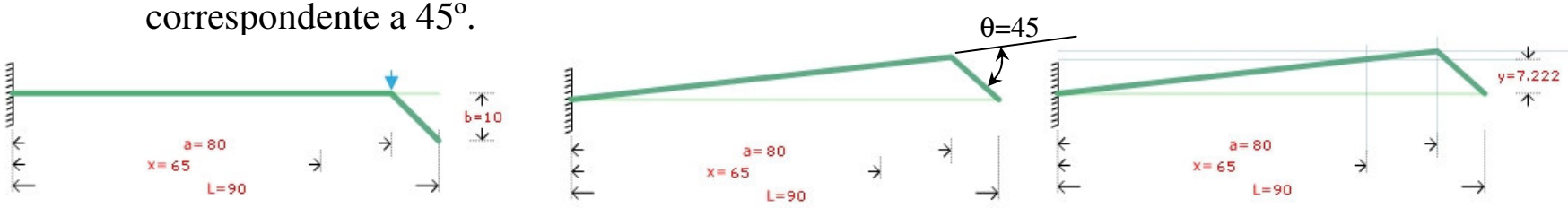


EXERCÍCIO TEMÁTICO 2

- Determine a altura da linha de influência a 65 feet da reacção esquerda, para o valor do momento flector localizado a 80 feet do mesmo local.



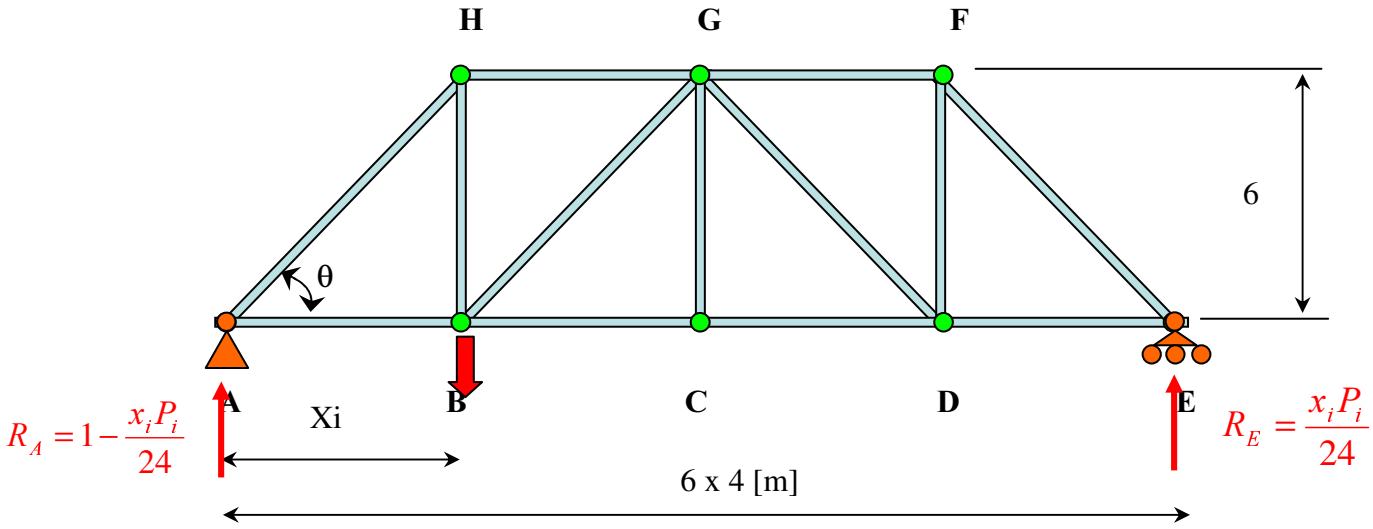
- Resolução:
  - Introdução de uma deformação por distorção unitária a 80 feet do apoio esquerdo, correspondente a 45º.



  - Depois da rotação da viga, a extremidade direita desce 10 feet, não sendo compatível com o apoio.
  - A viga deve ser rodada em torno do apoio esquerdo, de modo a que as duas extremidades estejam nos apoios.O ponto “a” deverá subir apenas 8.889, mantendo a deformada.
  - O valor do momento em “a” deverá ser 8.889*65/80=7.222 unidade.

EXERCÍCIO TEMÁTICO SOBRE TRELIÇAS

- Determine a linha de influência do esforço normal da barra GB da estrutura representada, quando uma carga unitária se movimenta de A para E.

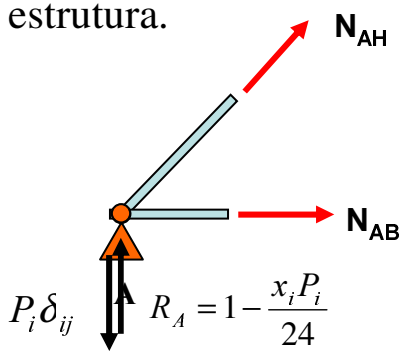


- Determinação das reacções:
  - Posição da carga genérica unitária Pi dada pela coordenada xi=(0,6,12,18,24).

EXERCÍCIO TEMÁTICO SOBRE TRELIÇAS

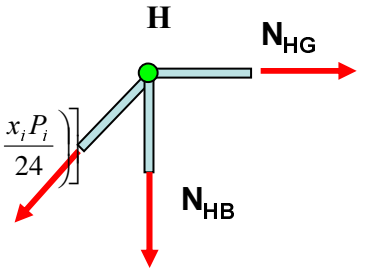
- Determinação dos esforços normais:
  - A posição da carga pode variar na linha de nós do banzo inferior da estrutura.
- Nó A:
  - Carga Pi, presente quando xi=0.
  - Existência de um factor δ_{ij}. Se Pi estiver presente, então $\delta_{ij}=1$

$$N_{AB} = -\frac{1}{tg(\theta)}\left[P_i\delta_{ij} - \left(1-\frac{x_i P_i}{24}\right)\right] \qquad N_{AH} = \frac{1}{\sin(\theta)}\left[P_i\delta_{ij} - \left(1-\frac{x_i P_i}{24}\right)\right]$$



- Nó H:
  - Existência de um factor δ_{ij}. Se Pi estiver presente no nó A, então $\delta_{ij}=1$

$$N_{HB} = -\left[P_i\delta_{ij} - \left(1-\frac{x_i P_i}{24}\right)\right] \qquad N_{HG} = \frac{1}{tg(\theta)}\left[P_i\delta_{ij} - \left(1-\frac{x_i P_i}{24}\right)\right] \qquad \frac{1}{\sin(\theta)}\left[P_i\delta_{ij} - \left(1-\frac{x_i P_i}{24}\right)\right]$$

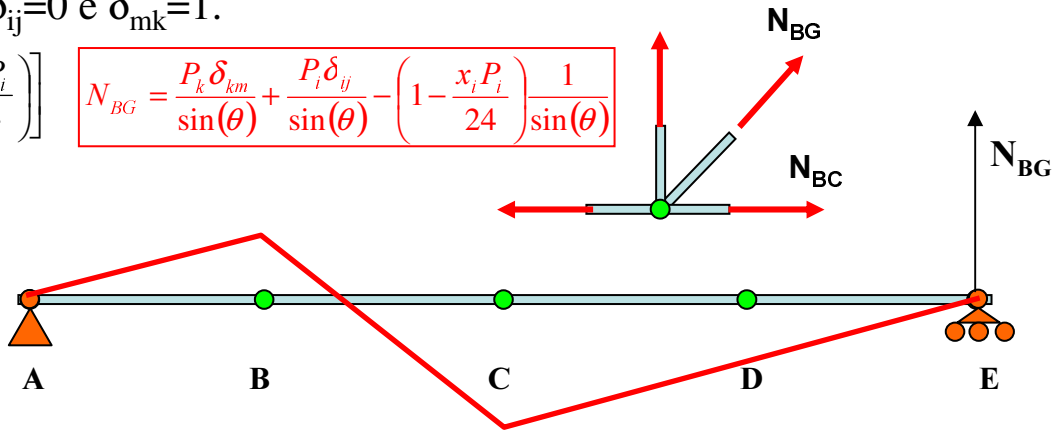


- Nó B:
  - Existência de um factor δ_{ij} e δ_{mk}. Se Pi estiver presente no nó A, então $\delta_{ij}=1$ e $\delta_{mk}=0$. Se Pi estiver presente no nó B, então $\delta_{ij}=0$ e $\delta_{mk}=1$.

$$N_{BC} = -\frac{P_k\delta_{km}}{tg(\theta)} - \frac{P_i\delta_{ij}}{tg(\theta)} + \left(1-\frac{x_i P_i}{24}\right)\frac{1}{tg(\theta)} - \frac{1}{tg(\theta)}\left[P_i\delta_{ij}\left(1-\frac{x_i P_i}{24}\right)\right]$$

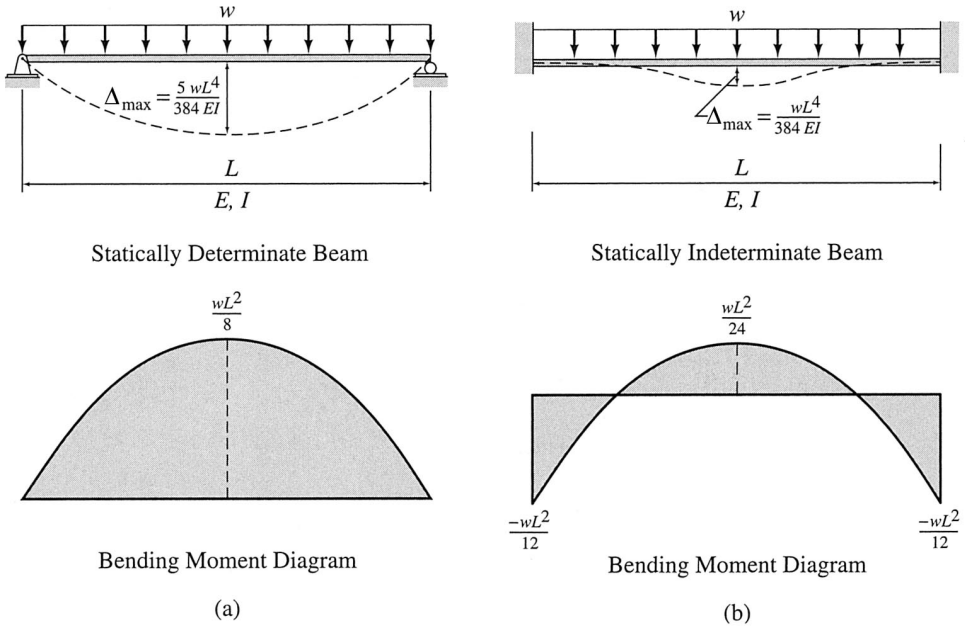
$$N_{BG} = \frac{P_k\delta_{km}}{\sin(\theta)} + \frac{P_i\delta_{ij}}{\sin(\theta)} - \left(1-\frac{x_i P_i}{24}\right)\frac{1}{\sin(\theta)}$$

Xi=	0	6	12	18	24
δij=	1	0	0	0	0
δkm=	0	1	0	0	0
N_{BG}=	**0**	**0.353**	**-0.707**	**0.353**	**0**

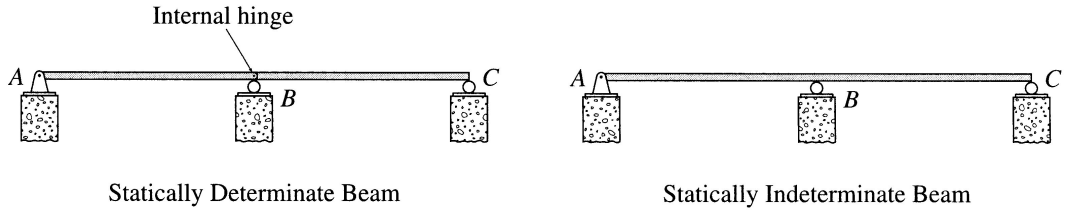


ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS (EH)

- Comparação entre elementos isostáticos e hiperestáticos:

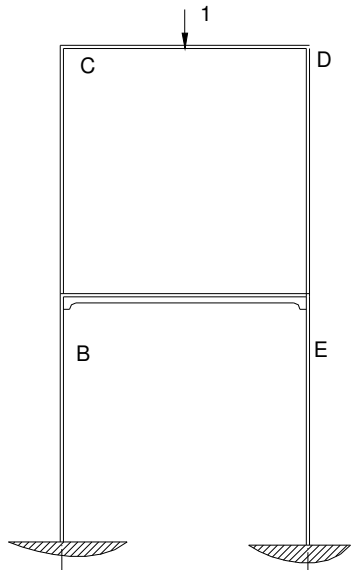


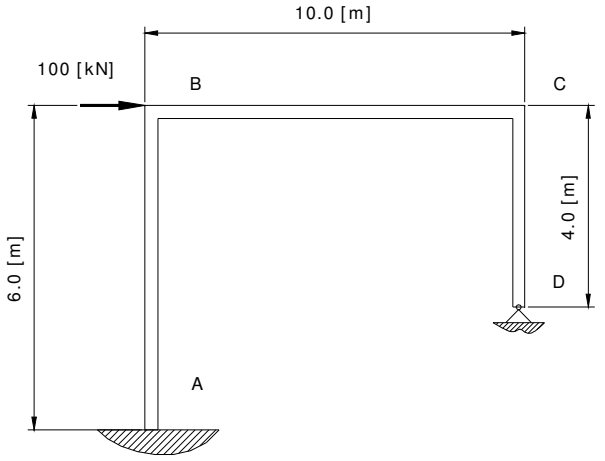
- Comparação entre elementos decontínuos e contínuos:



ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS (EH)

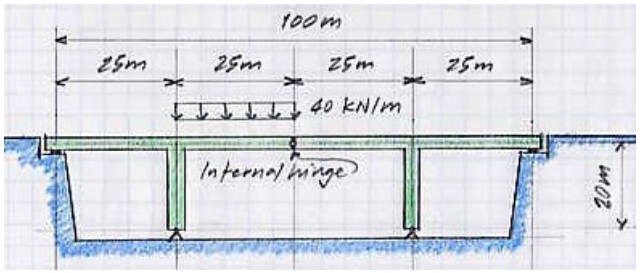
- Estruturas hiperestáticas:
  - Quando o número de equações de equilíbrio estático não permite a determinação das reacções dos apoios ou dos esforços internos.
- Grau de hipergeometricidade ou grau de indeterminação cinemática de uma estrutura:
  - Número de incógnitas deslocamento.
    - Numa estrutura plana treliçada, b=2n-r (2n = número de incógnitas deslocamento na estrutura, enquanto que r=número de ligações ao exterior).
    - Numa estrutura contínua, b=3n-r.
- Âmbito de aplicação:
  - Diminuição do deslocamento máximo admissível de um elemento.
- Verificação:
  - Quando se analisam estruturas hiperestáticas deve-se satisfazer o equilíbrio das forças, a compatibilidade dos deslocamentos e as relações entre as forças e os delocamentos.

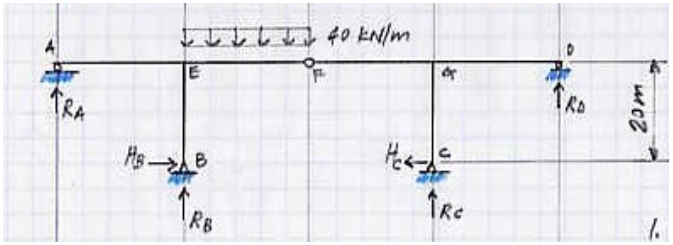


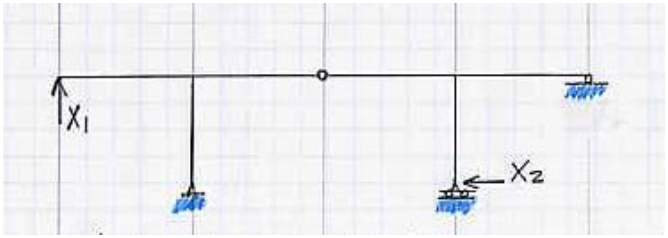


(EH) MÉTODO DAS FORÇAS (Navier 1826)

- O método das forças pode ter duas variantes (método das deformações consistentes e o método iterativo da distribuição do momento).
- Método das deformações consistentes:
  - Passo 1: Coverter a estrutura hiperestática em estrutura isostática (sistema base), libertando a estrutura das forças de constrangimento generalizadas extra necessárias.
  - Passo 2: Determinação dos deslocamentos generalizados nos locais da remoção dos constrangimentos extra ou super abundantes.
  - Passo 3: Aplicação das forças de constrangimento generalizadas extra necessárias na estrutura (valores unitários das forças) para produzir efeito contrario ao Passo 2 (sistemas auxiliares).
  - Passo 4: Aplicação das equações de compatibilidade de deslocamentos generalizados.

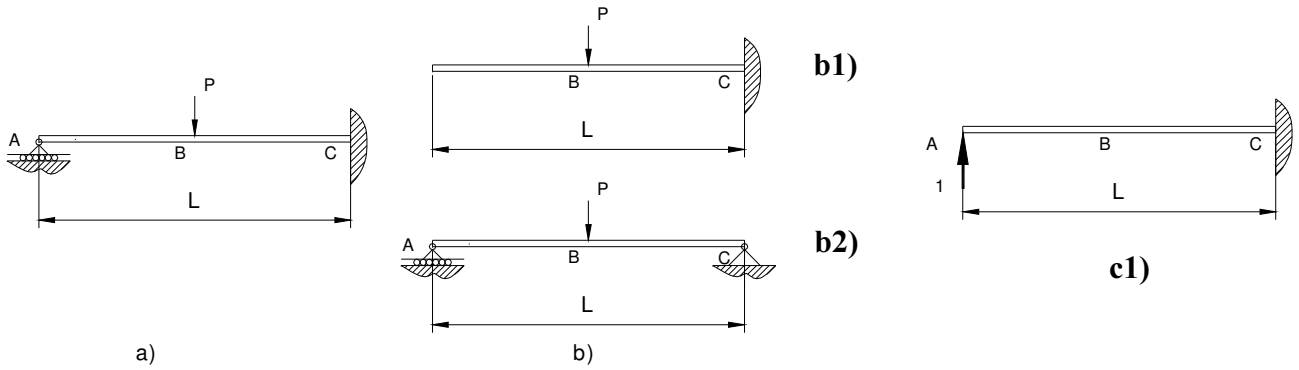






MÉTODO DAS FORÇAS - SISTEMA BASE

- O sistema base não é único, podendo ser qualquer estrutura isostática obtida a partir da hiperestática, por supressão das ligações superabundantes.



- Qualquer que seja o sistema base, a compatibilidade de deslocamentos deverá ser verificada, utilizando o princípio da sobreposição de efeitos para a solução (b1):

$$\delta_A = (\delta_A)_{SB} + (\delta_A)_{SBIH} = 0$$

$(\delta_A)_{SB}$ - deslocamento em A para sistema de base

$(\delta_A)_{SBIH}$ - deslocamento em A para sistema auxiliar (c1), provocado pela incógnita superabundante.

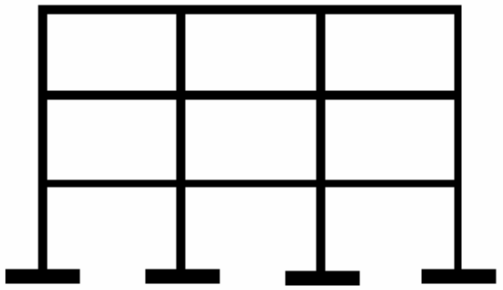
- Equação canónica do método das forças :

$$\boxed{\delta_{10} + \delta_{11} \times R_A = 0}$$

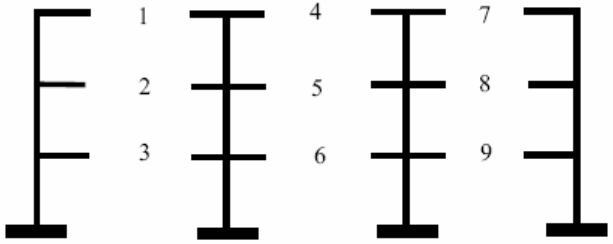
MÉTODO DAS FORÇAS – "N" INCÓGNITAS HIPERESTÁTICAS

- Sistema de equações na forma canónica:

$$\begin{cases} \delta_{10} + \delta_{11}\, x_1 + \delta_{12}\, x_2 + \ldots + \delta_{1n}\, x_n = 0 \\ \ldots \\ \delta_{n0} + \delta_{n1}\, x_1 + \delta_{n2}\, x_2 + \ldots + \delta_{nn}\, x_n = 0 \end{cases}$$



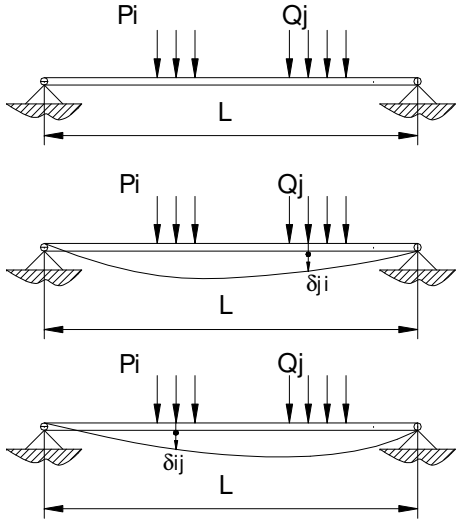
Multi-story multi-bay indeterminate frame.



Nine cuts pointing to 27 degrees of indeterminacy.

TEOREMAS DA RECIPROCIDADE
TEOREMA DE BETTI E DE MAXWELL

- Teoremas que decorrem do teorema dos trabalhos virtuais e que permitem estabelecer uma correspondência entre dois sistemas de carga e de deslocamento.
- Considere-se a estrutura representada na figura seguinte, sob a acção de cargas Pi e Qj, e represente-se por δij o deslocamento do ponto de aplicação da carga i, na direcção e sentido desta, devido à acção da carga j na estrutura.



- A energia de deformação acumulada na estrutura quando esta é carregada só pelo sistema de forças Pi deverá ser calculado por:

$$\frac{1}{2}\sum P_i \delta_{ij} = \frac{1}{2}\int_V \sigma \varepsilon dV$$

TEOREMAS DA RECIPROCIDADE
TEOREMA DE BETTI E DE MAXWELL

- Se, quando da aplicação quasi - estática do sistema de cargas Pi a estrutura já estivesse carregada com as cargas Qj, a energia de deformação total acumulada na estrutura seria dada por:

$$\frac{1}{2}\sum P_i\delta_{ii} + \quad \sum Q_j\delta_{ji} = \frac{1}{2}\int_V \sigma_P\varepsilon_P dV + \sigma_Q\varepsilon_Q dV$$

- Invertendo a ordem da aplicação das cargas.
- **Enunciado do teorema de Betti ou da reciprocidade dos trabalhos:**

$$\sum_i P_i\delta_{ij} = \sum Q_j\delta_{ji}$$

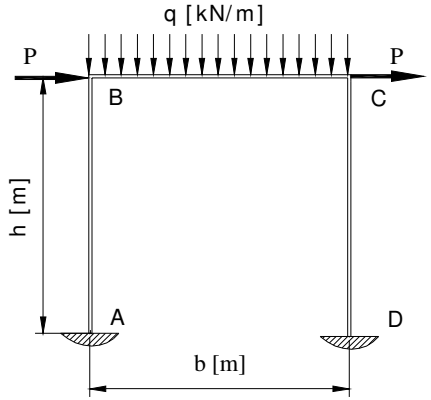
  - Para um corpo elástico em equilíbrio, sob a acção de dois sistemas de forças independentes Pi e Qj, o trabalho virtual das forças Pi na deformação δij produzido pelas forças Qj é igual ao trabalho virtual das forças Qj na deformação δji produzido pelas forças Pi.

- **Enunciado do teorema de Betti – Maxwell:**
  - Considerando que as solicitações Pi e Qj são constituídos por uma carga unitária:

$$\delta_{ij} = \delta_{ji}$$

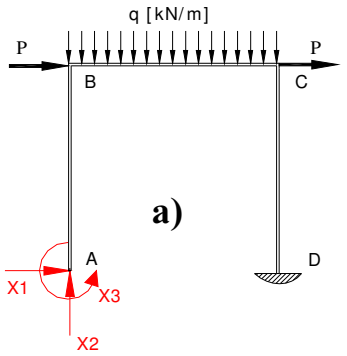
MÉTODO DAS FORÇAS - SISTEMA BASE

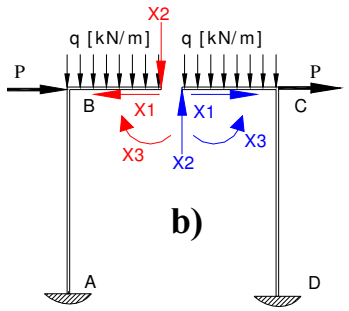
- A escolha do sistema base pode e deve ser efectuada de maneira a reduzir o esforço de cálculo.
- Em estruturas com simetria geométrica poderão ser efectuadas simplificações em função do tipo de sistema base.



- Carregamento distribuído:
  - simétrico
- Carregamento concentrado:
  - assimétrico

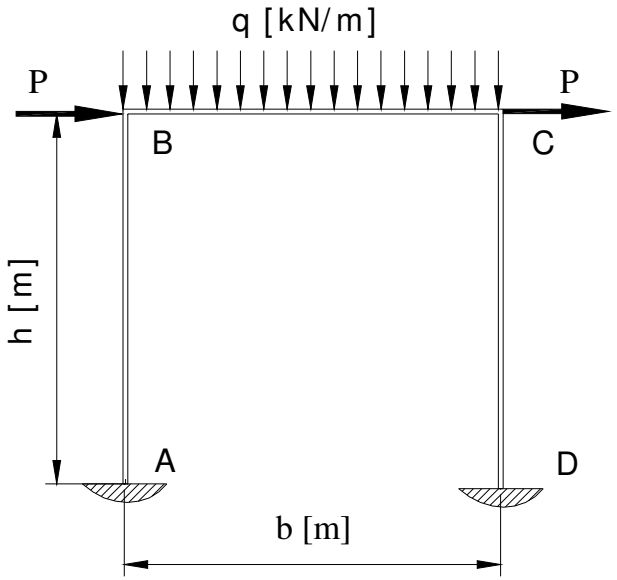
- A escolha de um sistema base adequado simplifica a determinação dos coeficientes das equações canónicas.
- Neste caso convém manter a simetria da geometria no sistema de base, evitando a solução a), conforme representação da figura seguinte



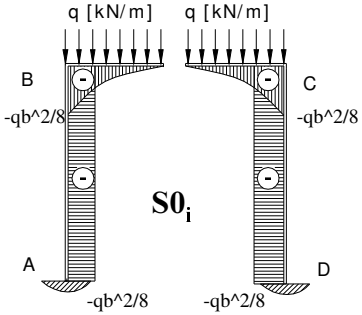


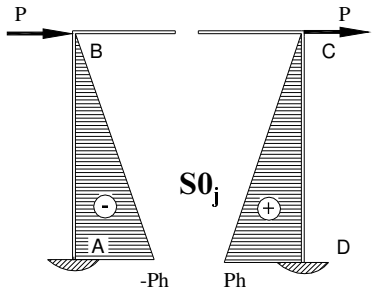
EXERCÍCIO TEMÁTICO 1/2

- Determine o diagrama de momentos flectores para a estrutura porticada representada na figura.

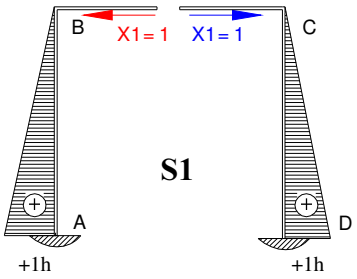


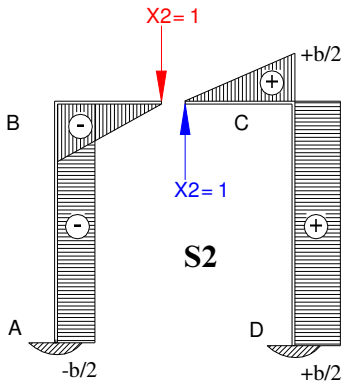
- Escolha de um sistema base:
  - Aproveitar simetrica geométrica.

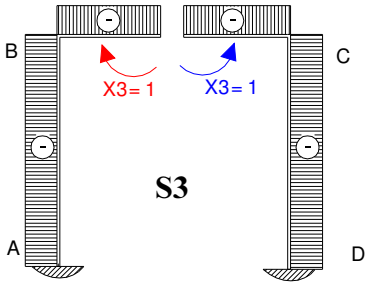


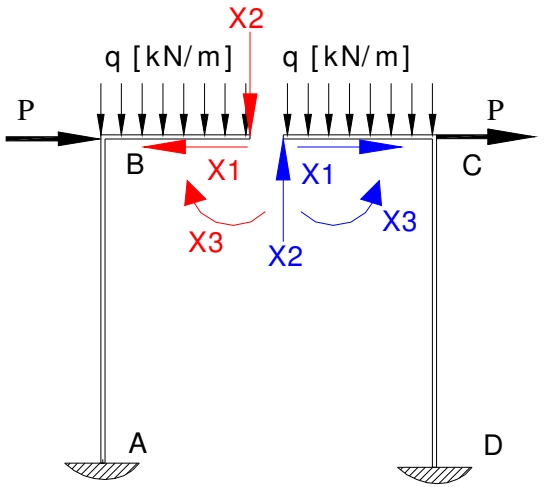


- Três sistemas auxiliares:
  - Um para cada constrangimento superabundante









EXERCÍCIO TEMÁTICO 2/2

- Equações canónicas:

$$\begin{cases} \delta_{10} + \delta_{11}\, x_1 + \delta_{12}\, x_2 + \delta_{13}\, x_3 = 0 \\ \delta_{20} + \delta_{21}\, x_1 + \delta_{22}\, x_2 + \delta_{23}\, x_3 = 0 \\ \delta_{30} + \delta_{31}\, x_1 + \delta_{32}\, x_2 + \delta_{33}\, x_3 = 0 \end{cases}$$

(=0, =0, =0)

- Os coeficientes não nulos valem:

$$EI\ \delta_{10} = \int_L M_1 M_0 dx = -\frac{qb^2h^2}{8} \qquad EI\ \delta_{11} = \int_L M_1 M_1 dx = \frac{2}{3}h^3 \qquad EI\ \delta_{13} = \int_L M_1 M_3 dx = h^2$$

$$EI\ \delta_{20} = \int_L M_2 M_0 dx = \frac{Ph^2b}{2} \qquad EI\ \delta_{22} = \int_L M_2 M_2 dx = \frac{b^3}{12} + \frac{b^2h}{2}$$

$$EI\ \delta_{30} = \int_L M_3 M_0 dx = \frac{qb^2h}{4} + \frac{qb^3h}{24} \qquad EI\ \delta_{33} = \int_L M_3 M_3 dx = b + 2h$$

- A resolução do sistema de equações:

$$X1 = \frac{-qb^2}{8}\frac{(12h + 3b + hb)}{h(h + 2b)}$$

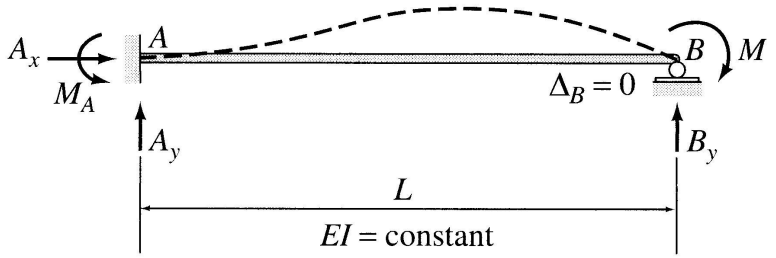
$$X2 = \frac{6Ph^2}{b(b + 6h)}$$

$$X3 = \frac{qb^2h}{24}\frac{(2b + 21)}{(h + 2b)}$$

EXERCÍCIO DE APLICAÇÃO E.H. – M.F. 1/2

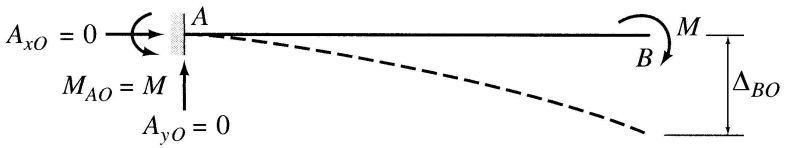
- Para o elemento de viga representado na figura do lado, determine os diagramas de esforços internos.

- Escolha do sistema base e sistema correspondente à incógnita superabundante.



(a) Indeterminate Beam

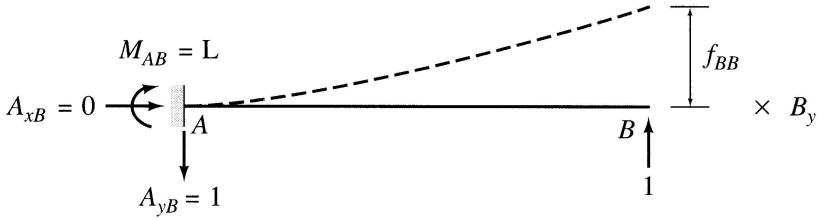
S0



(b) Primary Beam Subjected to External Moment M

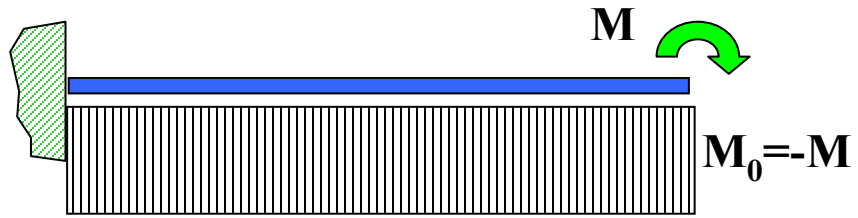
+

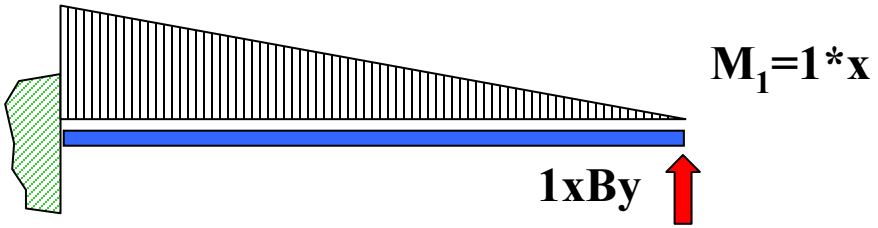
S1

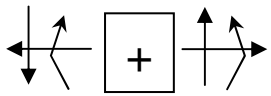


(c) Primary Beam Loaded with Redundant B_y

FIG. 13.3







EXERCÍCIO DE APLICAÇÃO E.H. – M.F. 2/2

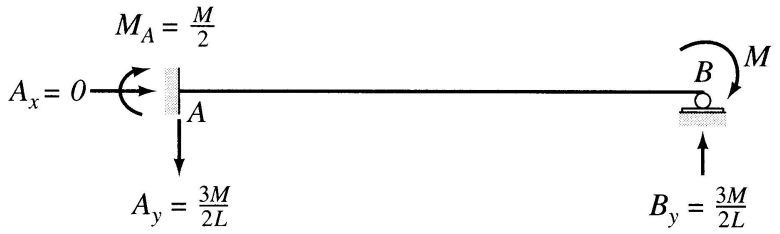
- Determinação dos coeficientes δij:

$$EI\ \delta_{10} = \int_L M_1 M_0 dx = \int_0^L x - M\ dx = -M\frac{L^2}{2}$$

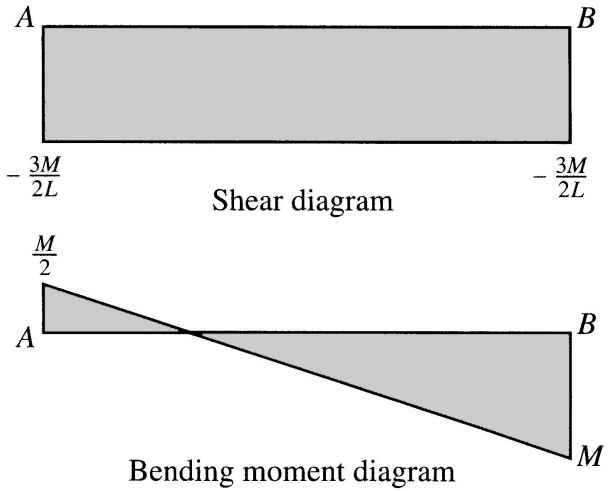
$$EI\ \delta_{11} = \int_L M_1 M_1 dx = \int_0^L x\ x\ dx = \frac{L^3}{3}$$

- Equação canónica:

$$\delta_{10} + \delta_{11} \times B_y = 0 \Leftrightarrow B_y = \frac{3M}{2L}$$



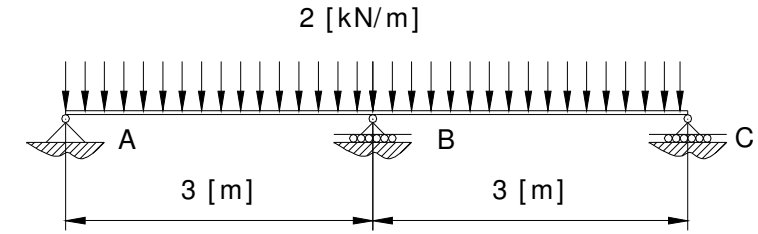
(d) Support Reactions for Indeterminate Beam

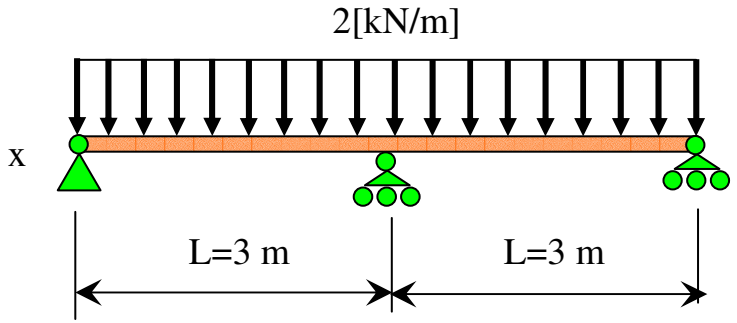


(e) Shear and Bending Moment Diagrams for Indeterminate Beam

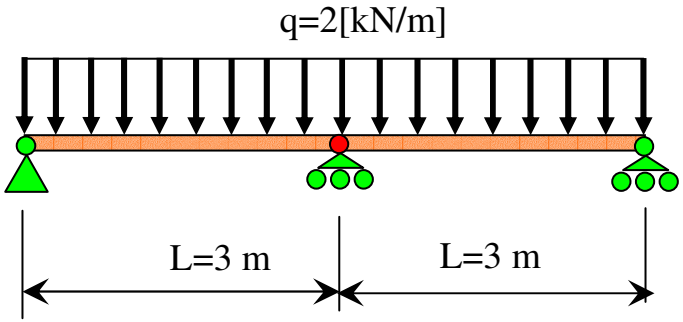
EXERCÍCIO DE APLICAÇÃO 1/2 viga contínua

- A figura representa uma viga contínua aplicada numa cobertura. A viga está submetida a um carregamento distribuído de 2 [kN/m]. Determine o digrama de momentos flectores, considerando apenas o efeito do esforço flector.

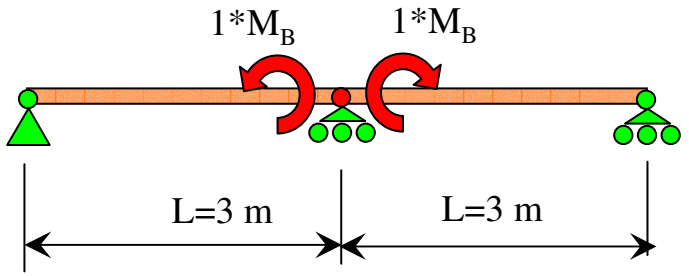




- Sistema base: Interrupção da viga contínua com rótula no apoio B + caregamento real.

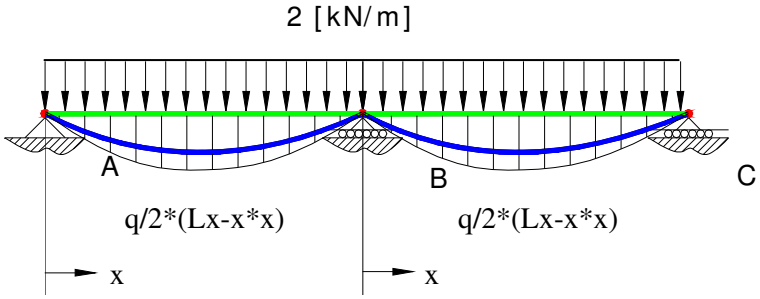


- Sistema hiper 1: Interrupção da viga contínua com rótula no apoio B + caregamento correspondente a incógnita hiperestática.

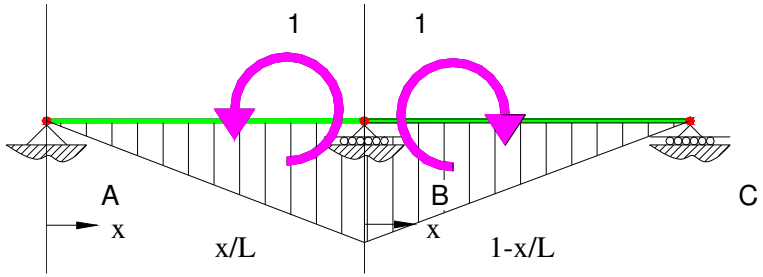


EXERCÍCIO DE APLICAÇÃO 2/2 viga contínua

- Sistema base:
  - Duas vigas simplesmente apoiadas.
  - Reacções em A,B,C.
  - Diagramas de Mf parabólicos.



- Sistema hiper 1:
  - Duas vigas simplesmente apoiadas.
  - Reacções em A,B,C.
  - Diagramas de Mf triangulares.



- Determinação dos coeficientes de flexibilidade: $\delta_{ij} = \int_L \frac{M_i M_j}{EI} dL$

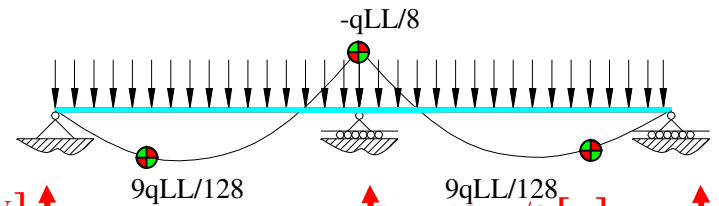
$$\delta_{10} = \int_L \frac{M_1 M_0}{EI} dL = \frac{qL^3}{12EI} \qquad \delta_{11} = \int_L \frac{M_1 M_1}{EI} dL = \frac{2L}{3EI} = \frac{2}{EI}$$

- Equação canónica:

$$\delta_{10} + \delta_{11} x_1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -\frac{qL^2}{8} = -225 \quad [Nm]$$

- Reacções na viga contínua: $R_A = 3qL/8\,[N]$; $R_B^1 = 5qL/8\,[N]$ $\qquad R_C = 3qL/8\,[N]$; $R_B^2 = 5qL/8\,[N]$

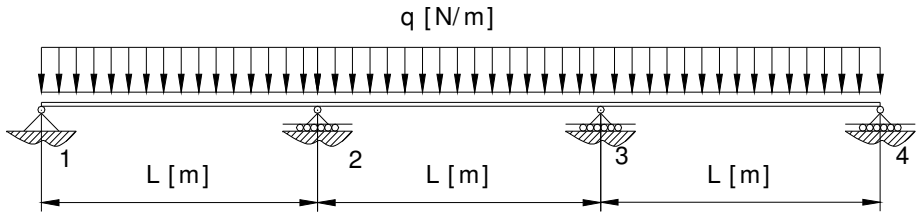
$0 < x < 3 \qquad M_f = q\left[\frac{3}{8}Lx - \frac{x^2}{2}\right]$



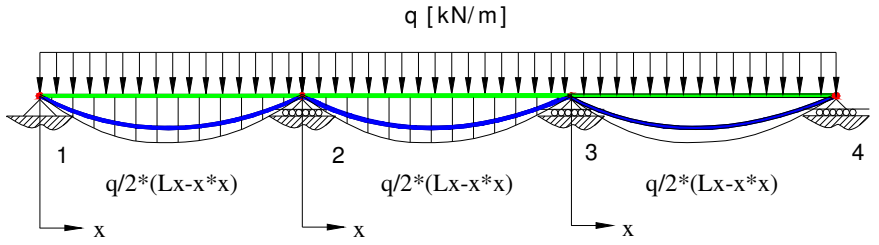
$R_A = 3qL/8\,[N]$ $\qquad R_B = 10qL/8\,[N]$ $\qquad R_C = 3qL/8\,[N]$

VIGA CONTÍNUA DE 3 TRAMOS 1/3

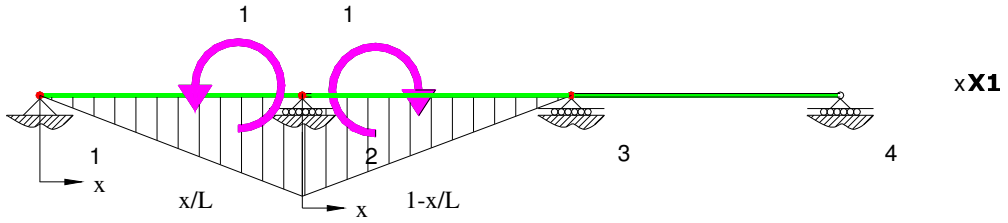
- A figura representa uma viga contínua (hieperestática), produzida em material aço S355, com um módulo de elasticidade igual a E e uma inércia correspondente a I. Determine o diagrama de momentos flectores, utilizando o método das forças.



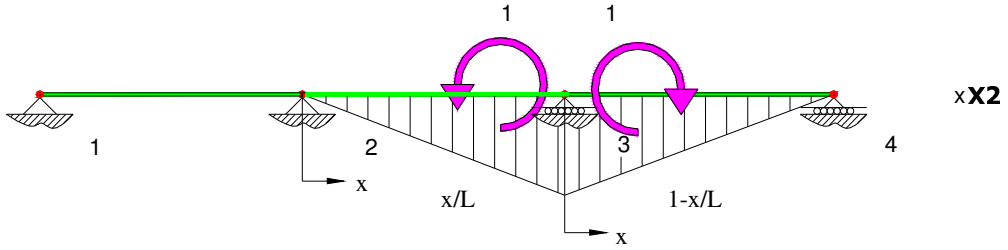
- Sistema base S0: Interrupção da viga contínua com rótula no apoio 2 e 3 + caregamento real.



- Sistema hiper S1: Interrupção da viga contínua com rótula no apoio 2,3 + caregamento correspondente a incógnita hiperestática do nó2.



- Sistema hiper S2: Interrupção da viga contínua com rótula no apoio 2,3 + caregamento correspondente a incógnita hiperestática do nó3.



VIGA CONTÍNUA DE 3 TRAMOS 2/3

- Determinação dos coeficientes de flexibilidade: $\delta_{ij} = \int_L \frac{M_i M_j}{EI} dL$

$$EI\ \delta_{10} = \int_0^L M_1 M_0 dx + \int_0^L M_1 M_0 dx = 2 \times \left(\frac{1}{3} \left(\frac{qL^2}{8} \right) (1) L \right) = \frac{qL^3}{12}$$

$$EI\ \delta_{11} = \int_0^L M_1 M_1 dx + \int_0^L M_1 M_1 dx = 2 \times \left(\frac{L}{6} (2 \times 1) \right) = \frac{2L}{3}$$

$$EI\ \delta_{12} = \int_0^L M_1 M_2 dx = \left(\frac{L}{2} (1/3) \right) = \frac{L}{6}$$

$$EI\ \delta_{20} = \int_0^L M_2 M_0 dx + \int_0^L M_2 M_0 dx = 2 \times \left(\frac{1}{3} \left(\frac{qL^2}{8} \right) (1) L \right) = \frac{qL^3}{12}$$

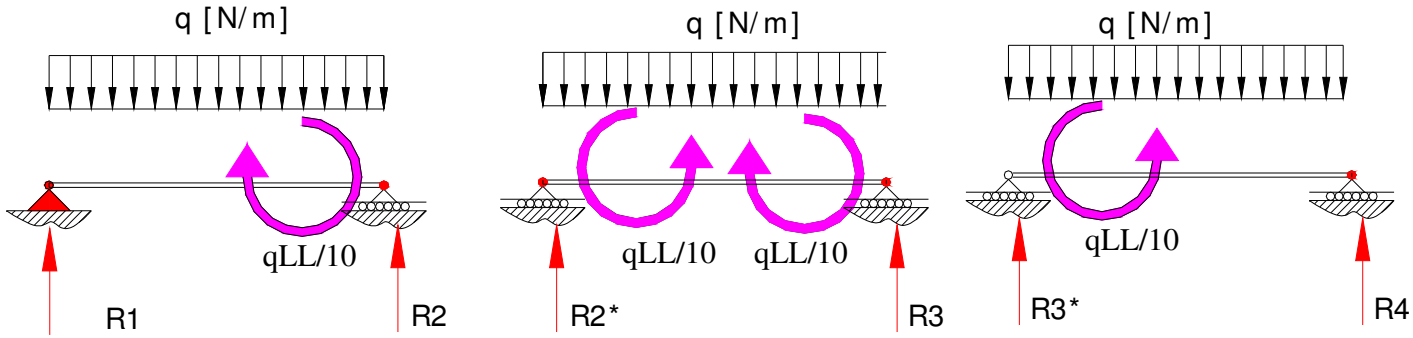
$$EI\ \delta_{22} = \int_0^L M_2 M_2 dx + \int_0^L M_2 M_2 dx = 2 \times \left(\frac{L}{6} (2 \times 1) \right) = \frac{2L}{3}$$

- Sistema de equações canónicas:

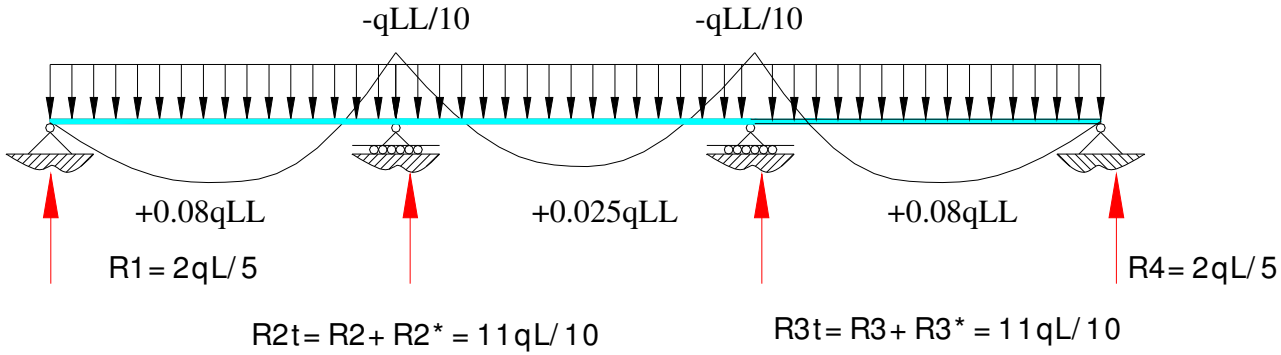
$$\begin{cases} \delta_{10} + \delta_{11}\ x_1 + \delta_{12}\ x_2 = 0 \\ \delta_{20} + \delta_{21}\ x_1 + \delta_{22}\ x_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = \frac{-qL^2}{10} \\ x_2 = \frac{-qL^2}{10} \end{cases}$$

VIGA CONTÍNUA DE 3 TRAMOS 3/3

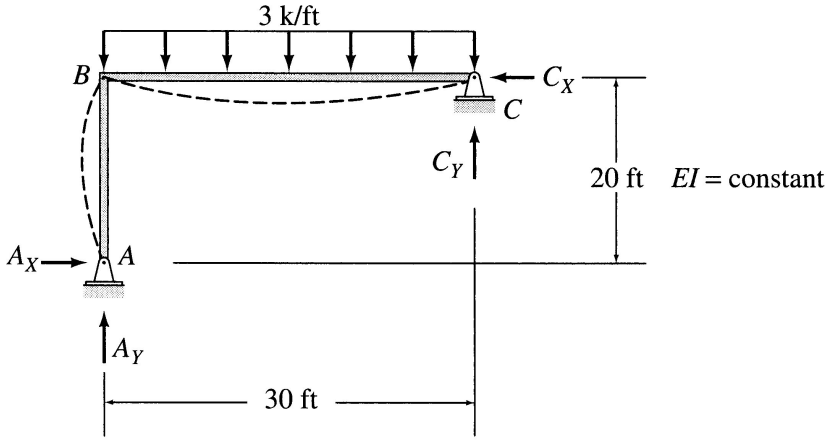
- A viga contínua é tratada como uma sequência de vigas independentes, conforme figura seguinte



- O resultado do diagrama de momentos flectores é o seguinte:



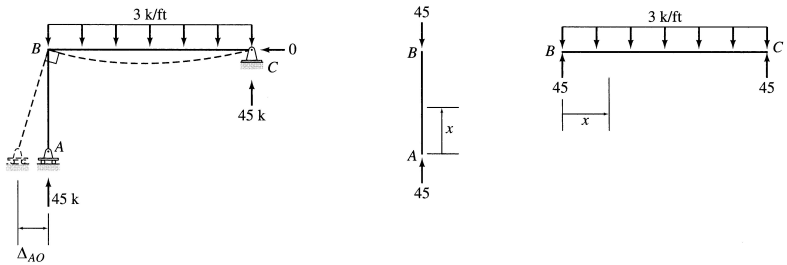
PÓRTICO HIPERESTÁTICO 1/3



(a) Indeterminate Frame

- Para a estrutura porticada representada, com rigidez à flexão igual a EI (constante), determine o diagrama de esforços internos (flector e transverso).

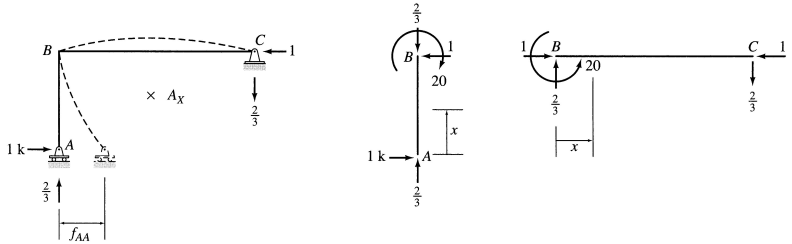
- Sistema base S0: Transformação do apoio duplo esquerdo em apoio simples + caregamento real.



(b) Primary Frame Subjected to External Loading—M_O Moments

$$M^0_{AB} = 0$$
$$V^0_{AB} = 0$$
$$M^0_{BC} = q/2\left(Lx - x^2\right) = 3/2\left(30x - x^2\right)$$
$$V^0_{BC} = -qL/2 = -3L/2$$

- Sistema hiper S1: Transformação do apoio duplo esquerdo em apoio simples + caregamento correspondente a incógnita hiperestática do nóA.



(c) Primary Frame Subjected to Unit Value of Redundant A_X — m_A Moments

$$M^1_{AB} = -x$$
$$V^1_{AB} = 1$$
$$M^1_{BC} = 2/3\,x - 20$$
$$V^1_{BC} = -2/3$$

PÓRTICO HIPERESTÁTICO 2/3

- Determinação dos coeficientes de flexibilidade (considerando apenas esforço de flexão):

$$\delta_{ij} = \int_L \frac{M_i M_j}{EI} dL$$

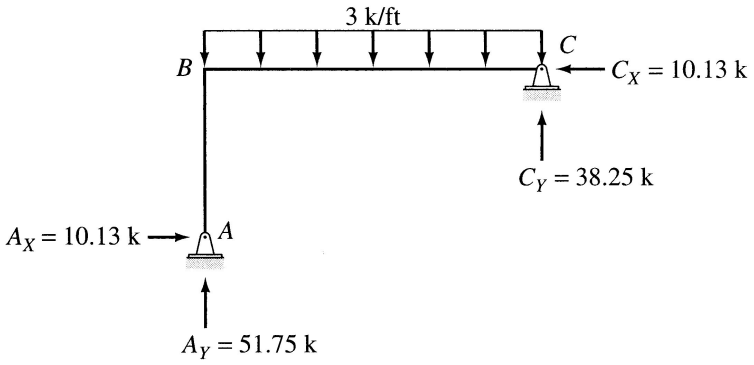
$$EI\ \delta_{10} = \int_0^{L1} M_1 M_0 dx + \int_0^{L2} M_1 M_0 dx = \int_0^{30} \left(45x - \frac{2}{3}x^2\right)\left(\frac{2}{3}x - 20\right) dx = -67500$$

$$EI\ \delta_{11} = \int_0^{L1} M_1 M_1 dx + \int_0^{L2} M_1 M_1 dx = \int_0^{20} (-x)(-x) dx + \int_0^{30} \left(\frac{2}{3}x - 20\right)\left(\frac{2}{3}x - 20\right) dx = 6666.6(7)$$

- Equação canónica:

$$\delta_{10} + \delta_{11} x_1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 10.125 \quad [k]$$

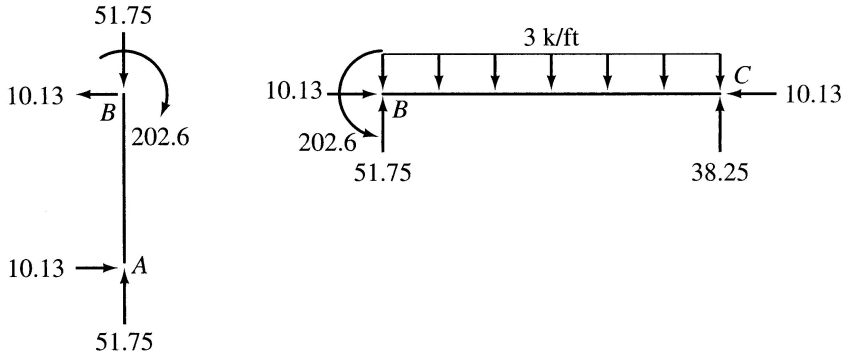
- Determinação das reacções:



Reactions

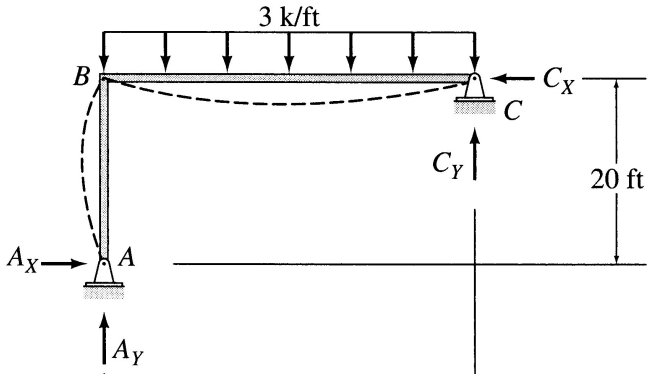
PÓRTICO HIPERESTÁTICO 3/3

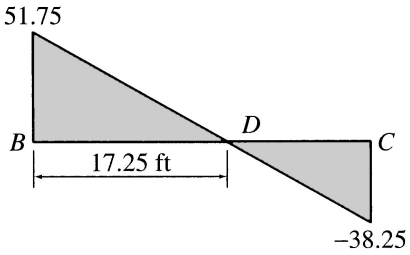
- Esforços externos nos elementos:



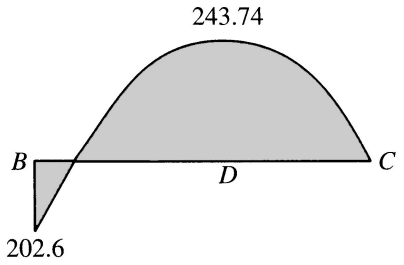
Member end forces

- Determinação dos esforços internos (flexão e corte):





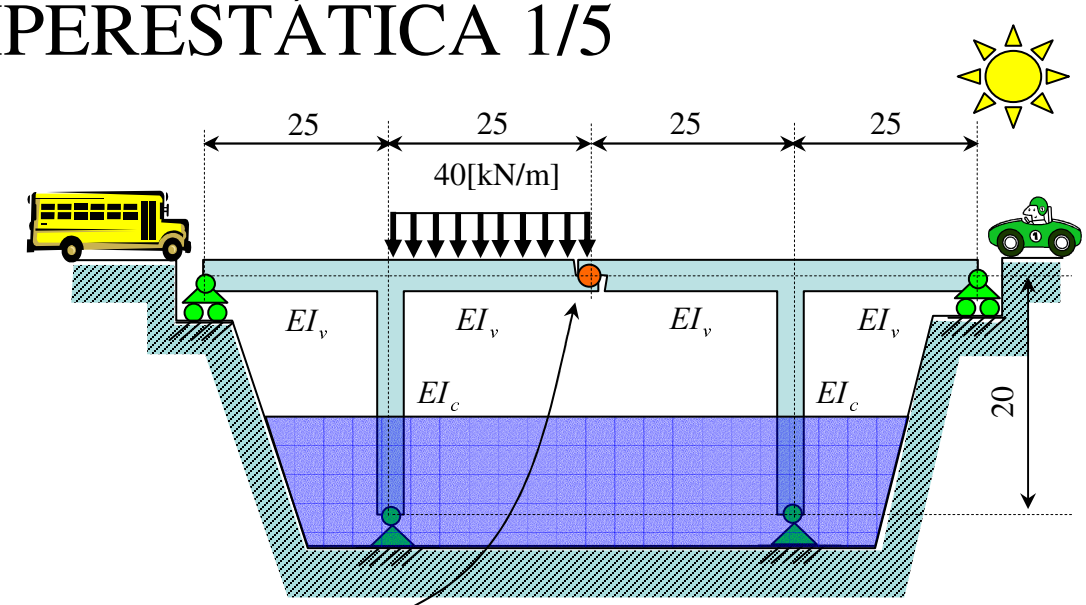
Shear diagrams (k)



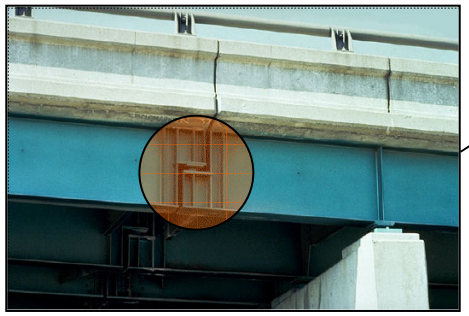
Bending moment diagrams (k-ft)

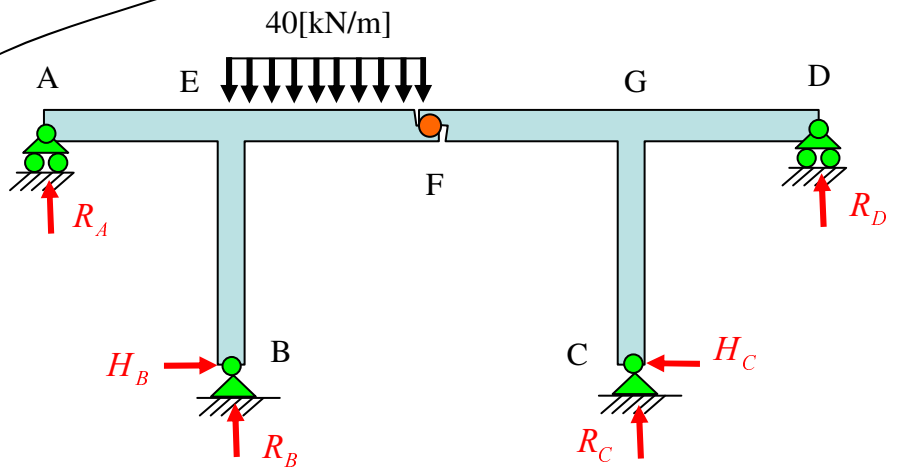
PONTE HIPERESTÁTICA 1/5

- Determinar o diagrama de momentos flectores para a estrutura simétrica representada, sabendo que o maior vão da ponte possui 50 [m], dividido em dois troços por uma rótula central. A rigidez à flexão da viga do tabuleiro vale 200×10^6 [kNm^2], enquanto que a rigidez das colunas valem 50×10^6 [kNm^2].



- Modelo de cálculo de engenharia:





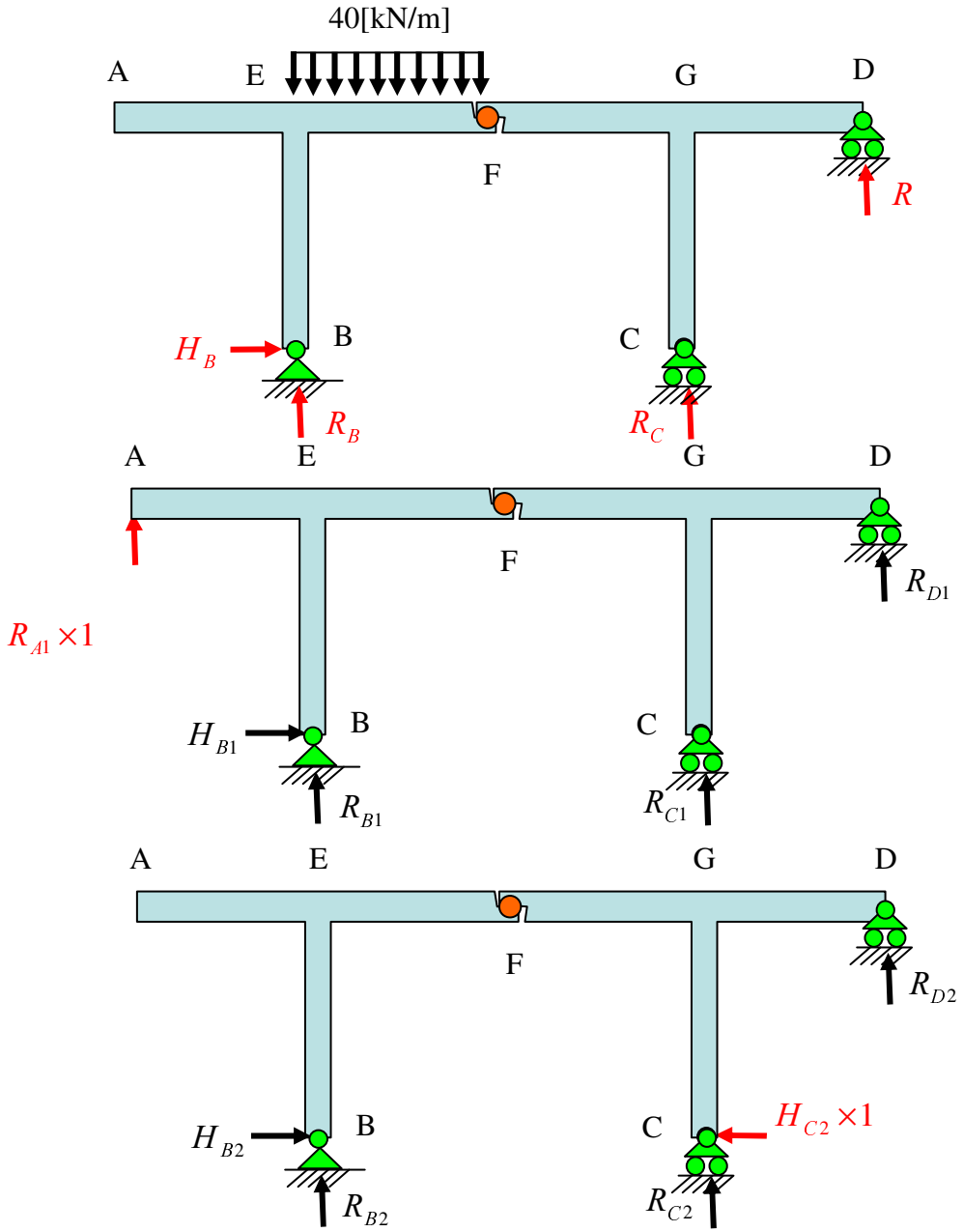
- Determinação do grau de hiperestaticidade:
  - 6 reacções – 1 rótula- 3 equações = Grau 2.

PONTE HIPERESTÁTICA 2/5

- Escolha do sistema base isostático S0.
  - Libertação das incógnitas hiperestáticas em RA e HC.

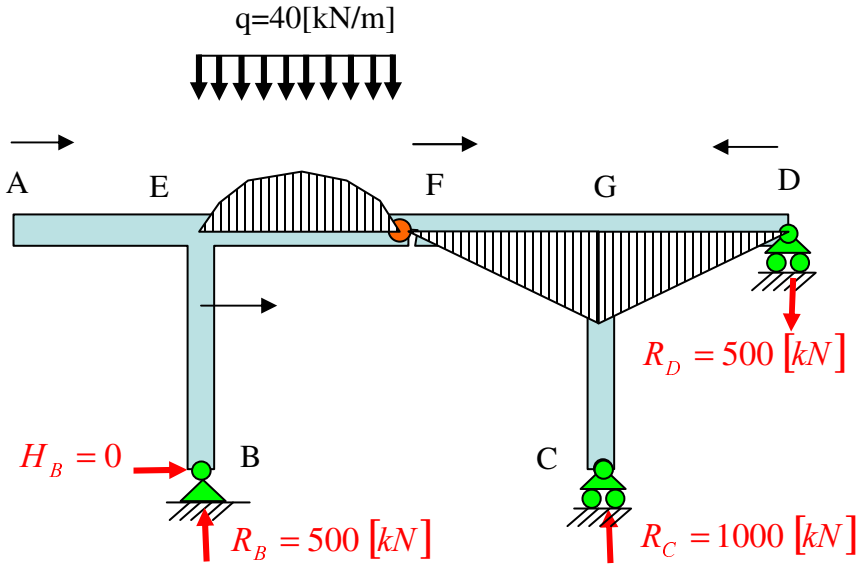
- Sistema hiper S1:

- Sistema hiper S2:

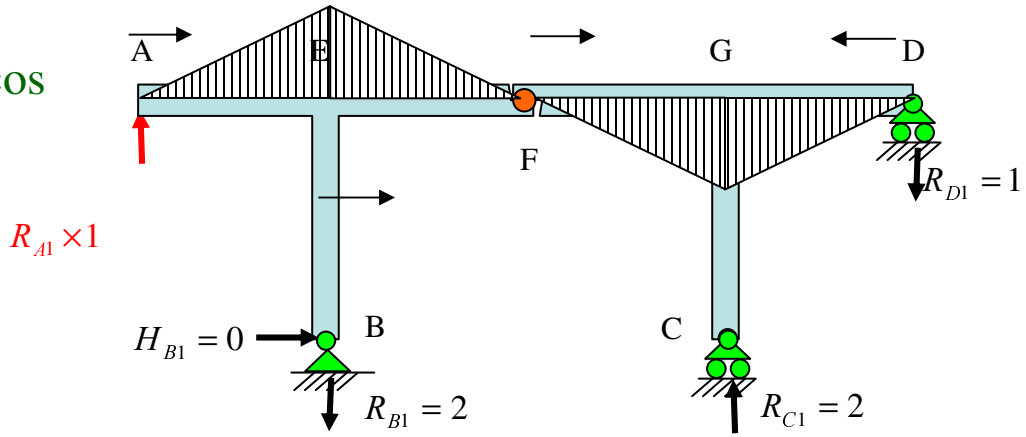


PONTE HIPERESTÁTICA 3/5

- Determinação das reacções e esforços internos – Sistema S0:
  - Secção EF: 0<x<25: $Mf_0=20(25x-x^2)$
  - Secção FG: 0<x<25: $Mf_0=-500x$
  - Secção DG: 0<x<25: $Mf_0=-500x$

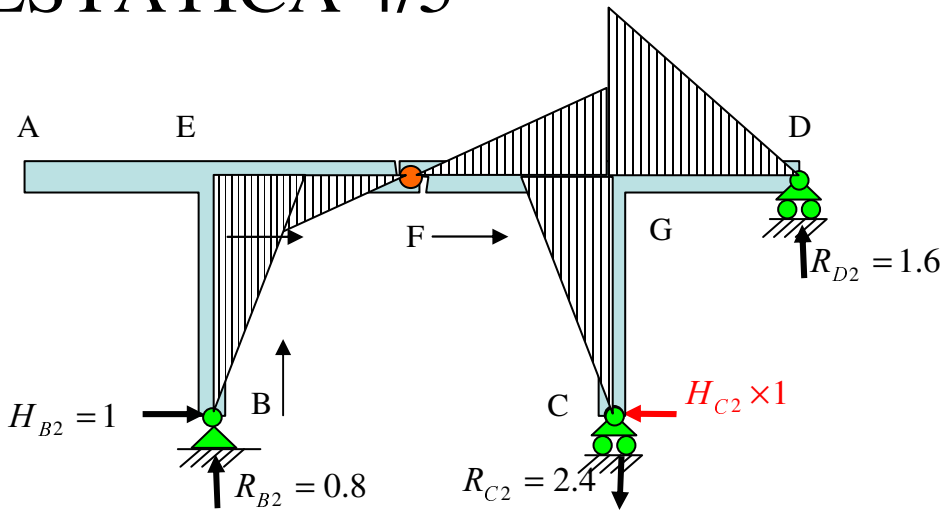


- Determinação das reacções e esforços internos – Sistema S1:
  - Secção AE: 0<x<25: $Mf_1=x$
  - Secção EF: 0<x<25: $Mf_1=(25-x)$
  - Secção FG: 0<x<25: $Mf_1=-x$
  - Secção DG: 0<x<25: $Mf_1=-x$



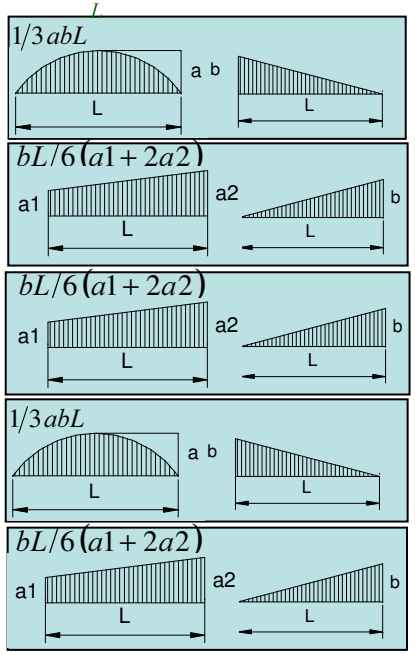
PONTE HIPERESTÁTICA 4/5

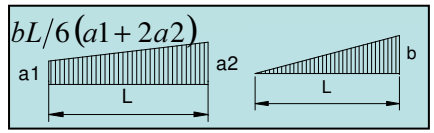
- Determinação das reacções e esforços internos – Sistema S2:
  - Secção BE: 0<x<20: Mf_2=-x
  - Secção EF: 0<x<25: Mf_2=(0.8x-20)
  - Secção FG: 0<x<25: Mf_2=0.8x
  - Secção DG: 0<x<25: Mf_2=1.6x
  - Secção CG: 0<x<20: Mf_2=x

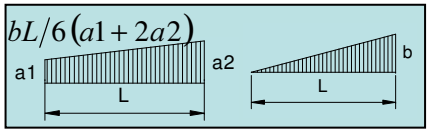


- Determinação dos coeficientes de flexibilidade (considerando apenas esforço de flexão):

$$\delta_{ij}=\int_L M_i M_j / EI\, dx$$







$$\delta_{10}=\frac{1}{EI_v}\left[\frac{1}{3}abL+2\left[bL/6(2a2)\right]\right]=0.0293\ [m]$$

$$\delta_{11}=\frac{1}{EI_v}\int_0^L M_1 M_1 dx=4\times\frac{1}{EI_v}\times\left(\frac{bL}{6}(2\times a2)\right)=0.0001042\ [m/kN]$$

$$\delta_{12}=\frac{1}{EI_v}\int_0^L M_1 M_2 dx=-0.00008333\ [m/kN]$$

$$\delta_{20}=\frac{1}{EI_v}\int_0^L M_2 M_0 dx=-0.03385\ [m]$$

$$\delta_{22}=\frac{1}{EI_v}\int_0^L M_2 M_2 dx+\frac{1}{EI_c}\int_0^L M_2 M_2 dx=0.0002066$$

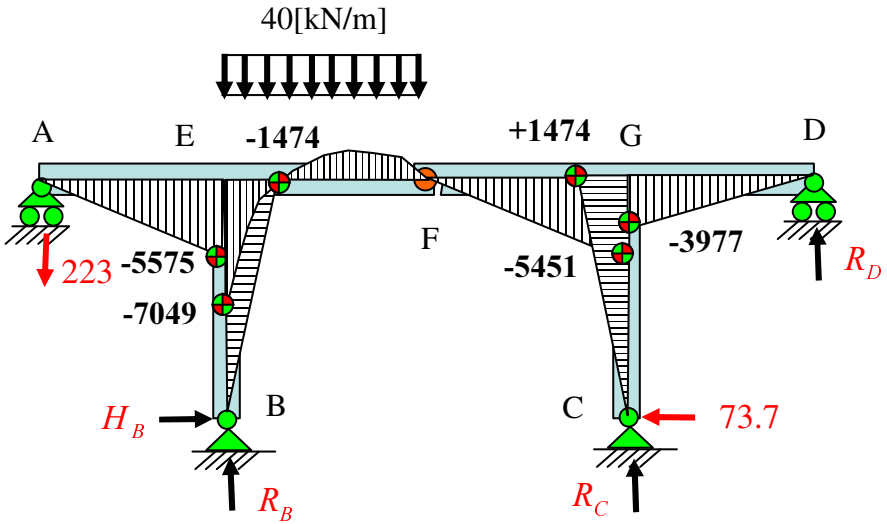
PONTE HIPERESTÁTICA 5/5

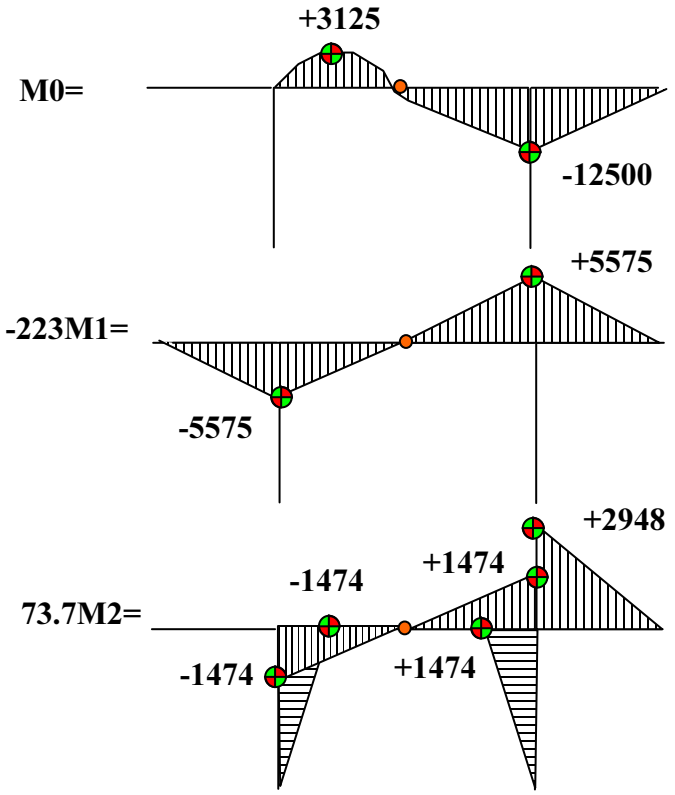
- Sistema de equações canónicas:

$$\begin{cases} \delta_{10} + \delta_{11}\, x_1 + \delta_{12}\, x_2 = 0 \\ \delta_{20} + \delta_{21}\, x_1 + \delta_{22}\, x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} +0.000104 & -0.0000833 \\ -0.0000833 & +0.0002066 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.0293 \\ +0.0338 \end{Bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -223.0 \\ +73.70 \end{Bmatrix}$$

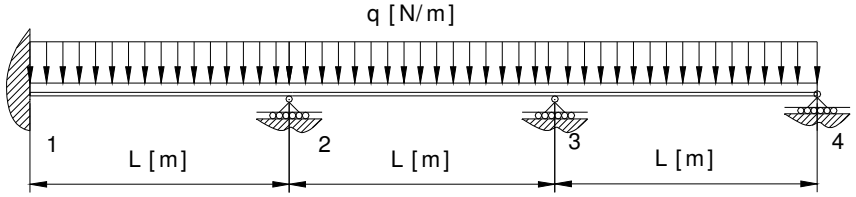
- Representar o diagrama de momento flector:
  - M = M0 + X1 · M1 + X2 · M2



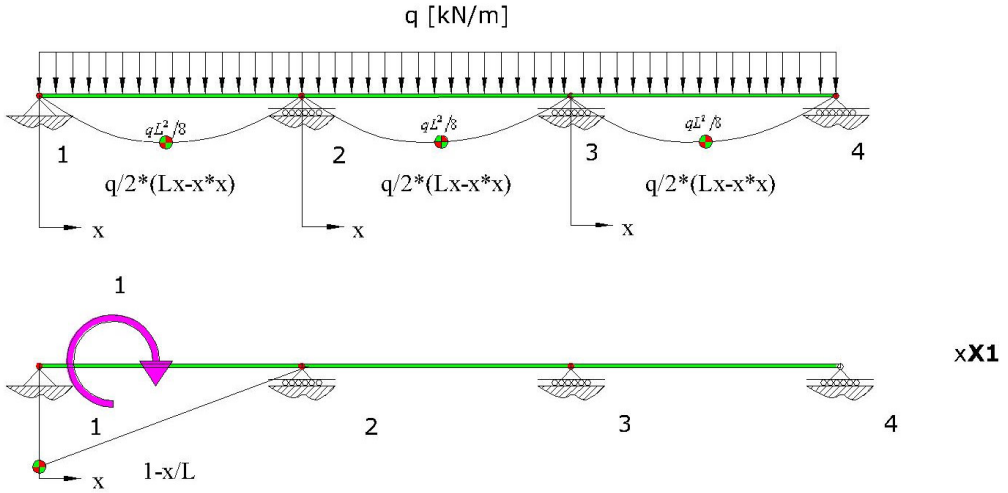


VIGA CONTÍNUA 1/3

- A figura representa uma viga contínua (hiperestática), produzida em material S355, com um módulo de elasticidade igual a $2.1x10^{11}$ [N/m^2]. Determine o diagrama de momentos flectores, utilizando o método das forças.

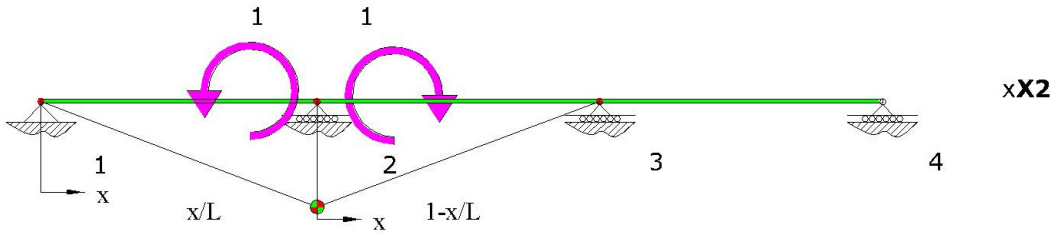


- Determinação do grau de hiperestaticidade:
  - 6 reacções – 3 equações = Grau 3.
- Escolha do sistema base isostático S0.
  - Libertação do momento reactivo no nó 1 e imposição de duas rótulas em 2e 3.
- Sistema hiper S1:

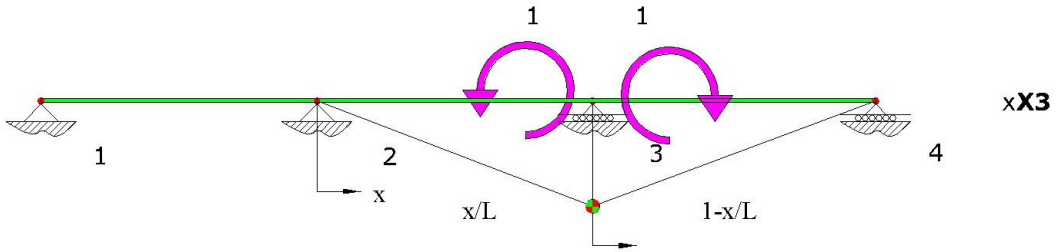


VIGA CONTÍNUA 2/3

- Sistema hiper S2:



- Sistema hiper S3:



- Determinação dos coeficientes de flexibilidade (considerando apenas esforço de flexão):

$$\delta_{ij} = \int_L M_i M_j / EI \; dx$$

$$EI\ \delta_{10} = \int_{3L} M_1 M_0 dx = \left[\frac{1}{3} abL\right] = \frac{qL^3}{24}\ [m] \qquad EI\ \delta_{20} = \int_{3L} M_2 M_0 dx = 2EI\ \delta_{10} = \frac{qL^3}{12}\ [m] \qquad EI\ \delta_{30} = \int_{3L} M_3 M_0 dx = EI\ \delta_{20} = \frac{qL^3}{12}\ [m]$$

$$EI\ \delta_{11} = \int_{3L} M_1 M_1 dx = \left[\frac{1}{6} bL\ 2a_2\right] = \frac{L}{3}\ [m/N] \qquad EI\ \delta_{22} = \int_{3L} M_2 M_2 dx = 2EI\ \delta_{11} = \frac{2L}{3}\ [m/N] \qquad EI\ \delta_{33} = \int_{3L} M_3 M_3 dx = EI\ \delta_{22} = \frac{2L}{3}\ [m/N]$$

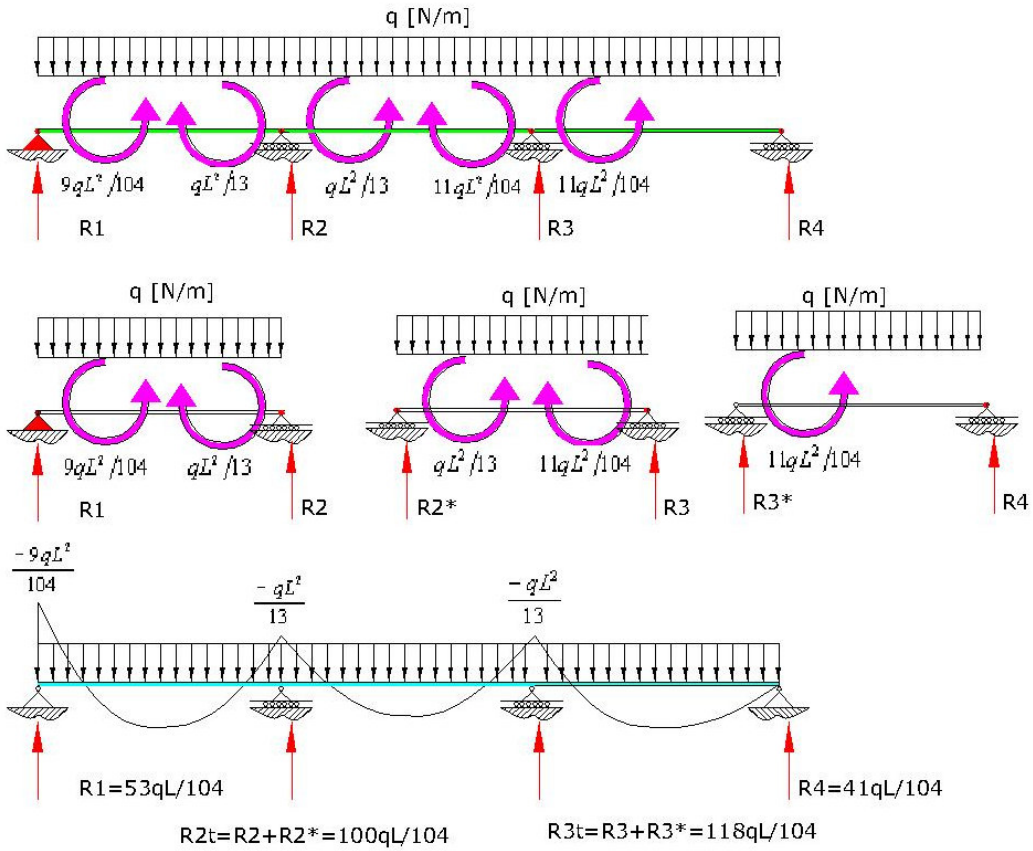
$$EI\ \delta_{12} = \int_{3L} M_1 M_2 dx = \left[\frac{1}{6} bL\ a_1\right] = \frac{L}{6}\ [m/N] \qquad EI\ \delta_{23} = \int_{3L} M_2 M_3 dx = EI\ \delta_{12} = \frac{L}{6}\ [m/N]$$

VIGA CONTÍNUA 3/3

- Sistema de equações canónicas:

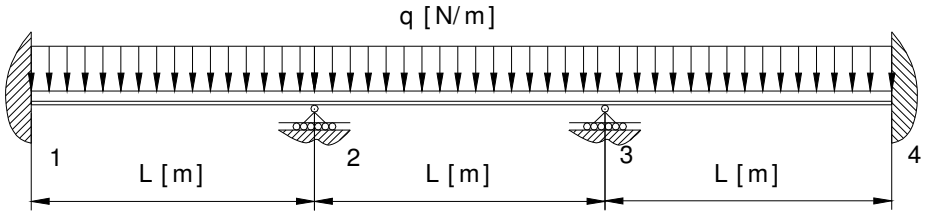
$$\begin{cases} \delta_{10}+\delta_{11}\,x_1+\delta_{12}\,x_2+\delta_{13}\,x_3=0 \\ \delta_{20}+\delta_{21}\,x_1+\delta_{22}\,x_2+\delta_{23}\,x_3=0 \\ \delta_{30}+\delta_{31}\,x_1+\delta_{32}\,x_2+\delta_{33}\,x_3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} L/3 & L/6 & 0 \\ L/6 & 2L/3 & L/6 \\ 0 & L/6 & 2L/3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -qL^3/24 \\ -qL^3/12 \\ -qL^3/12 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -9qL^2/104 \\ -qL^2/13 \\ -11qL^2/104 \end{Bmatrix}$$

- Determinação das reacções e do diagrama de momentos:

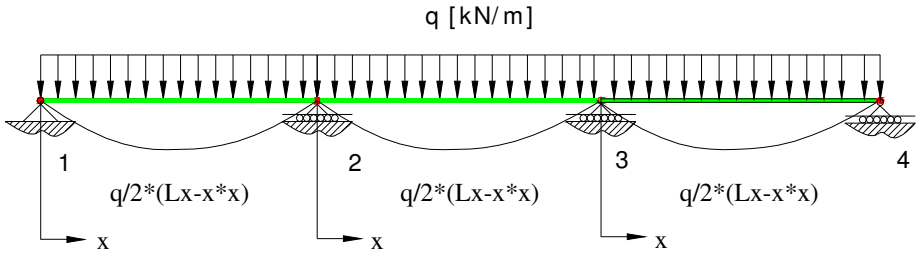


VIGA CONTÍNUA DE 3 TRAMOS 1/4

- A figura representa uma viga contínua (hiperestática), produzida em material S355, com um módulo de elasticidade igual a $2.1x10^{11}$ [N/m^2]. Determine o diagrama de momentos flectores, utilizando o método das forças.

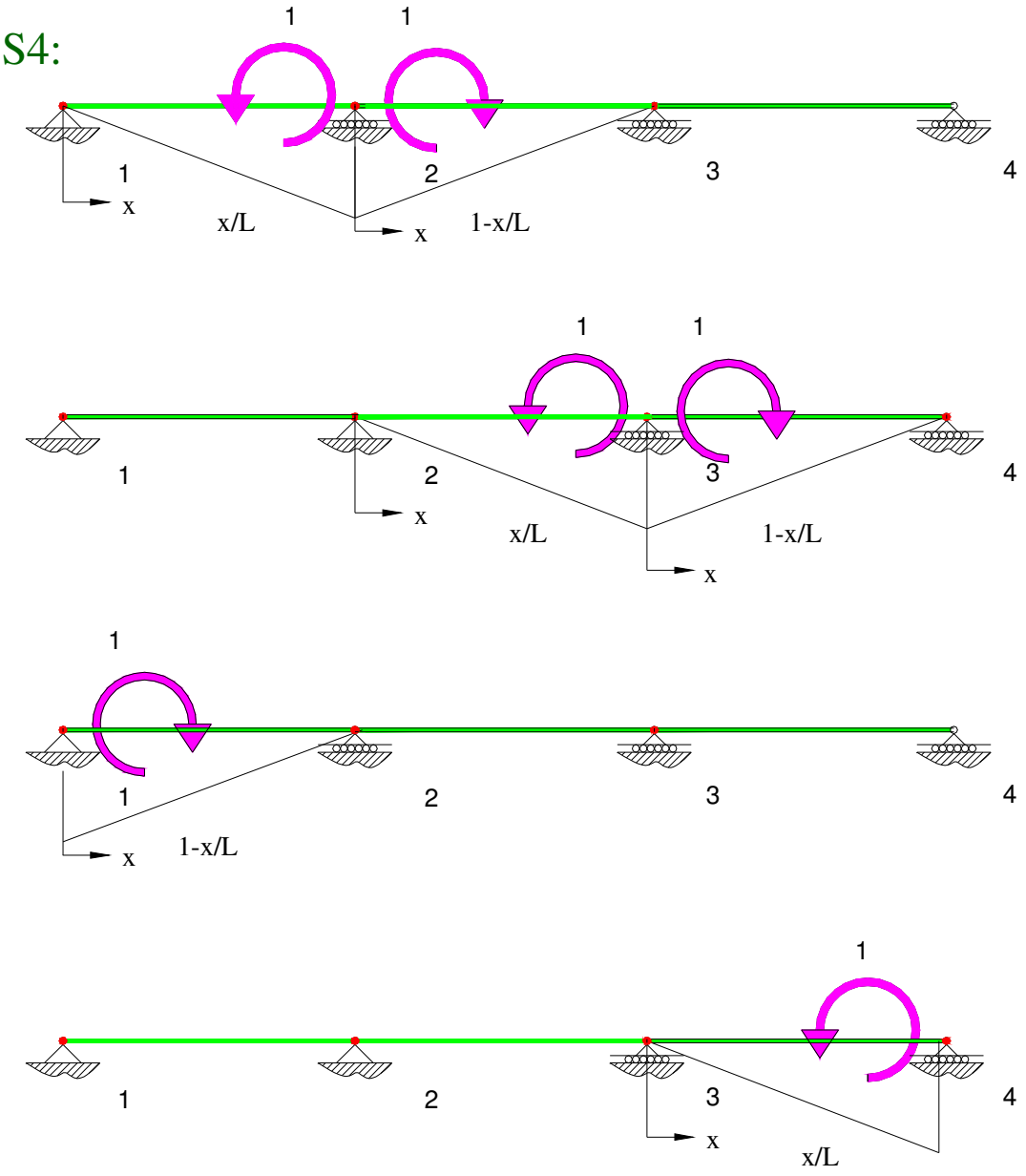


- Escolha do sistema base isostático S0.
  - Libertação do momento reactivo no nó 1e 4.
  - Imposição de duas rótulas em 2e 3.



VIGA CONTÍNUA DE 3 TRAMOS 2/4

- Sistema hiper. S1, S2, S3, e S4:



VIGA CONTÍNUA DE 3 TRAMOS 3/4

- Determinação dos coeficientes de flexibilidade (considerando apenas esforço de flexão):

$$\delta_{ij} = \int_L M_i M_j / EI \; dx$$

$$EI\,\delta_{10} = \int_{3L} M_1 M_0 dx = 2\left[\frac{1}{3} abL\right] = \frac{qL^3}{12}\,[m] \qquad EI\,\delta_{20} = \int_{3L} M_2 M_0 dx = EI\,\delta_{10} = \frac{qL^3}{12}\,[m] \qquad EI\,\delta_{30} = \int_{3L} M_3 M_0 dx = \frac{1}{2} EI\,\delta_{10} = \frac{qL^3}{24}\,[m]$$

$$EI\,\delta_{11} = \int_{3L} M_1 M_1 dx = 2\left[\frac{1}{6} bL\; 2a_2\right] = \frac{2L}{3}\,[m/N] \qquad EI\,\delta_{22} = \int_{3L} M_2 M_2 dx = EI\,\delta_{11} = \frac{2L}{3}\,[m/N] \qquad EI\,\delta_{33} = \int_{3L} M_3 M_3 dx = \frac{1}{2} EI\,\delta_{11} = \frac{L}{3}\,[m/N]$$

$$EI\,\delta_{12} = \int_{3L} M_1 M_2 dx = \left[\frac{1}{6} bL\; a_1\right] = \frac{L}{6}\,[m/N] \qquad EI\,\delta_{24} = \int_{3L} M_2 M_4 dx = EI\,\delta_{13} = \frac{L}{6}\,[m/N] \qquad EI\,\delta_{40} = \int_{3L} M_4 M_0 dx = EI\,\delta_{30} = \frac{qL^3}{24}\,[m]$$

$$EI\,\delta_{13} = \int_{3L} M_1 M_3 dx = \left[\frac{1}{6} bL\; a_1\right] = \frac{L}{6}\,[m/N] \qquad EI\,\delta_{44} = \int_{3L} M_4 M_4 dx = EI\,\delta_{33} = \frac{L}{3}\,[m/N]$$

- Sistema de equações canónicas:

$$\begin{cases} \delta_{10} + \delta_{11}\, x_1 + \delta_{12}\, x_2 + \delta_{13}\, x_3 + \delta_{14}\, x_4 = 0 \\ \delta_{20} + \delta_{21}\, x_1 + \delta_{22}\, x_2 + \delta_{23}\, x_3 + \delta_{24}\, x_4 = 0 \\ \delta_{30} + \delta_{31}\, x_1 + \delta_{32}\, x_2 + \delta_{33}\, x_3 + \delta_{34}\, x_4 = 0 \\ \delta_{40} + \delta_{41}\, x_1 + \delta_{42}\, x_2 + \delta_{43}\, x_3 + \delta_{44}\, x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2L/3 & L/6 & L/6 & 0 \\ L/6 & 2L/3 & 0 & L/6 \\ L/6 & 0 & L/3 & 0 \\ 0 & L/6 & 0 & L/3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -qL^3/12 \\ -qL^3/12 \\ -qL^3/24 \\ -qL^3/24 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -qL^2/12 \\ -qL^2/12 \\ -qL^2/12 \\ -qL^2/12 \end{Bmatrix}$$

VIGA CONTÍNUA DE 3 TRAMOS 4/4

- Determinação das reacções e do diagrama de momentos: